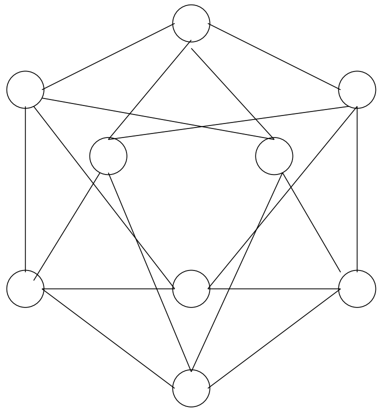
Τέλειοι Γράφοι
Θεωρία και Ιδιότητες

Ορέστης Τελέλης

$\Theta(\pi^2)$



Γενικά περί τέλειων γράφων

- Εισήχθησαν στα τέλη του 1950, αρχές του 1960 από τον Claude Berge.
- Εκαντοντάδες κλάσεις τέλειων γράφων είναι γνωστές.
- Το *πρόβλημα ανγνώρισης* ενός τέλειου γράφου είναι σίγουρα NP. Όμως η πολυπλοκότητα της αναγνώρισης καθεαυτής δεν είναι γνωστή!
- 96 διαφορετικές κλάσεις τέλειων γράφων καταγράφηκαν από τον Hougardy, 1998, καθώς και οι σχέσεις υποσυνόλων μεταξύ τους, μαζί με αντιπαραδείγματα!

Προκαταρκτικά

Δίνεται γράφημα $G(V, E)$, με V σύνολο κόμβων, E σύνολο ακμών:

$$E = \{(u, v) | u, v \in V\}$$

- *Χρωματικός Αριθμός:* Το ελάχιστο πλήθος $\chi(G)$ χρωμάτων που απαιτούνται για χρωματισμό γειτονικών κορυφών με διαφορετικά χρώματα.
- *Αριθμός Κλίκας:* Η μέγιστη πληθυκότητα κόμβων $V' \subseteq V$, που επάγουν έναν πλήρη γράφο, $|V'| = \omega(G)$.
- *Ελάχιστη Κάλυψη με Κλίκες:* Μία ελάχιστη **διαμέριση** $V = A_1 + \ldots + A_k$ του συνόλου των κόμβων, έτσι ώστε τα σύνολα A_j να επάγουν κλίκες. Τότε $k = \kappa(G)$.
- *Μέγιστο ανεξάρτητο υποσύνολο κόμβων:* Ένα μέγιστο υποσύνολο $V' \subseteq V$, με $(u, v) \notin E \ \forall u, v \in V'$. Θέτουμε $\alpha(G) = |V'|$.

Ποιοί γράφοι είναι τέλειοι;

- $\omega(G_A) = \chi(G_A)\ \forall A \subseteq V$
- $\alpha(G_A) = \kappa(G_A)\ \forall A \subseteq V$
- $\omega(G_A)\alpha(G_A) \geq |A|\ \forall A \subseteq V$

Το *θεώρημα τέλειων γράφων* λέει ότι οι παραπάνω ιδιότητες είναι ισοδύναμες: αν ένας γράφος έχει μία, τις έχει όλες!

Δυϊκές σχέσεις

$$\omega(G) = \alpha(\bar{G}) \qquad\qquad \chi(G) = \kappa(\bar{G})$$

Πολυεδρικός Χαρακτηρισμός

ή γιατί κάποια NP-hard προβλήματα επιλύονται σε πολυωνυμικό χρόνο!

Ορίζουμε τα ακόλουθα:

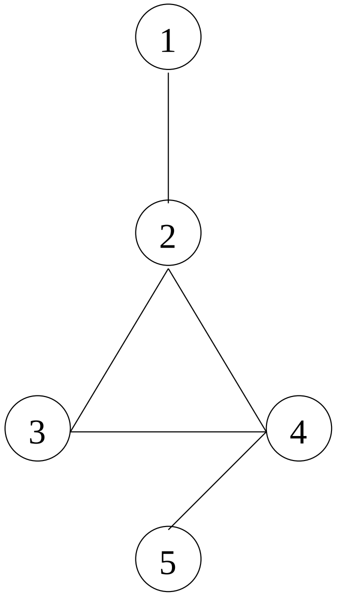
- *Πολύεδρο:* $P(A) = \{\vec{x} | A\vec{X} \leq \vec{1}, \vec{x} \geq \vec{0}\}$.

- *Ακέραιο Κυρτό Κάλυμμα (Integral Convex Hull):*
  $P_I(A) = \{\vec{x} | \vec{x} \in P(A), \vec{x} \text{ ακέραιο}\}$

- *Πίνακας Πλήρων Μέγιστων Υπογράφων (Maximal Cliques Matrix):*
  Περιγράφει όλες τις maximal κλίκες του γράφου.

Θεώρημα(*Chvátal, 1975*): Έστω A ο πίνακας κλικών ενός μη κατευθυνόμενου γράφου G. Τότε ο G είναι τέλειος αν και μόνο αν $P(A) = P_I(A)$

Παράδειγμα: Το μέγιστο ανεξάρτητο υποσύνολο



$$A_{3\times 5} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\max Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

$$x_2 + x_3 + x_4 \leq 1$$

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_4 + x_5 \leq 1$$

Φαίνεται λοιπόν ότι, σε πολυωνυμικό χρόνο μπορούν να επιλυθούν προβλήματα που εκφράζονται πάνω στον πίνακα A των κλικών, ή των μέγιστων ανεξάρτητων υποσυνόλων (κατά συμπληρωματικό τρόπο).

Η ισχυρή εικασία των τέλειων γράφων

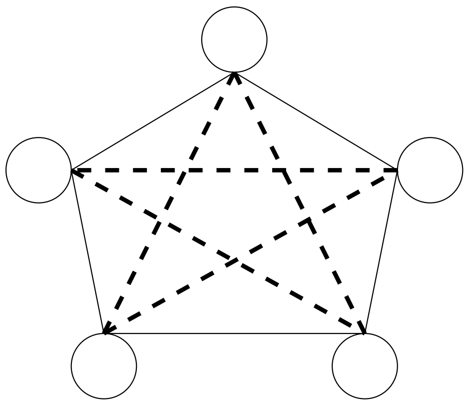
- *Περιττή Τρύπα (Odd Hole):* Κύκλος περιττού πλήθους κορυφών (≥ 5) χωρίς χορδή.
- *Περιττή Αντι-Τρύπα (Odd Anti-Hole):* Περιττή τρύπα στον συμπληρωματικό γράφο.
- *Ένας γράφος είναι τέλειος αν και μόνο αν δεν περιέχει περιττή τρύπα ή περιττή αντι-τρύπα*

Γιατί; Διότι όποτε ο Berge ανακάλυπτε ένα μή τέλειο γράφο, αυτός είχε περιττή τρύπα ή περιττή αντι-τρύπα. Για το λόγο αυτό οι γράφοι χωρίς «τρύπες» ονομάστηκαν *γράφοι Berge.* Επομένως:

Ισχυρή Εικασία Τέλειων Γράφων: Ένας γράφος είναι τέλειος αν και μόνο αν είναι Berge γράφος.

Γιατί η ισχυρή εικασία είναι ενδιαφέρουσα;

Μια περιττή (αντι-) τρύπα 5 κόμβων



Θεώρημα(*Proemel, Steger, 1992*): Αν $Berge(n)$ είναι το πλήθος των τέλειων γράφων n κόμβων χωρίς περιττή τρύπα ή αντι-τρύπα, και $Perfect(n)$ είναι το πλήθος όλων των τέλειων γράφων n κόμβων, τότε:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Perfect(n)}{Berge(n)} = 1$$

Τέλειοι Γράφοι και Θεωρία Πληροφορίας (1)

Δεδομένου ενός γράφου $G(V, E)$, ορίζεται μία πιθανοτική κατανομή $\vec{p} \in \Re^V$, ώστε:

$$\sum_{j=1}^{|V|} p_j = 1$$

$$p_j \geq 0, \forall j = 1 \ldots |V|$$

n-οστή συνκανονική δύναμη του G: $G^{(n)}(V^n, E^{(n)})$

- $V^n = \{\vec{x} = \langle x_1, \ldots x_n \rangle | x_j \in V\}$
- $E^{(n)} = \{\vec{x}\vec{y} | \vec{x}, \vec{y} \in V^n \text{ και } \exists j : x_j y_j \in E\}$

Κάθε πιθανοτική κατανομή p στο V επάγει μία πιθανοτική κατανομή p^n στο V^n ως εξής:

$$p^n(\vec{x}) := p(x_1) \cdot p(x_2) \cdot \ldots \cdot p(x_n),\ \vec{x} \in V^n,\ x_j \in V$$

Τέλειοι Γράφοι και Θεωρία Πληροφορίας (2)

- Έστω $U \subseteq V^n$ και $G^{(n)}[U]$ ο επαγόμενος από το U υπογράφος.

- Με $\chi(G^{(n)}[U])$ συμβολίζεται ο χρωματικός αριθμός του γράφου αυτού.

- Για κάθε ϵ με $0 < \epsilon < 1$, το ακόλουθο όριο αποδεικνύεται ότι υπάρχει:

$$H(G,p) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n} \min_{p^n(U)\geq 1-\epsilon} \log \chi(G^{(n)}[U])\right]$$

  και είναι ανεξάρτητο του ϵ! Είναι η *εντροπία του γράφου G ως προς την κατανομή p*

- Αν ο $G(V,E)$ είναι ο πλήρης γράφος, τότε ο παραπάνω τύπος εκφυλίζεται στη γνωστή εντροπία του Shannon:

$$H(p) = -\sum_{i\in V} p_i \log p_i$$

Τέλειοι Γράφοι και Θεωρία Πληροφορίας (3)

Θεώρημα(*Csiszár, Koerner, Lovász, Marton, Simonyi, 1990*): Ένας γράφος G είναι τέλειος αν και μόνο αν για κάθε πιθανοτική κατανομή p στους κόμβους του ισχύει:

$$H(G, p) + H(\bar{G}, p) = H(p)$$

Σημείωση: Ένας γράφος για τον οποίο ισχύει η σχέση του θεωρήματος, ονομάζεται *ισχυρά διαχωριζόμενος* (Strongly Splitting).

p-Κρίσιμοι Γράφοι (p-Critical Graphs)

- Είναι γράφοι *παραλίγο* τέλειοι: Αν διαγραφεί μία κορυφή και οι προσκείμενες ακμές, ο γράφος που προκύπτει είναι τέλειος!
- $\alpha(G) \cdot \omega(G) = |V| - 1$
- Ο G έχει ακριβώς $|V|$ μέγιστες (maximum) κλίκες, και κάθε κόμβος περιέχεται σεακριβώς $\omega(G)$ τέτοιες κλίκες.
- Ο G έχει ακριβώς $|V|$ μέγιστα (maximum) σταθερά (ανεξάρτητα) υποσύνολα, και κάθε κόμβος περιέχεται σε ακριβώς $\alpha(G)$ τέτοια σταθερά υποσύνολα.

Με p-κρίσιμους γράφους ασχολήθηκε ο Padberg, 1974, 1976. Παρόμοια δομική προσέγγιση, εξετάζει η Wagler, 1999, σχετικά με τη διαγραφή ή εισαγωγή ακμών. Ο γράφος του τίτλου είναι ο μικρότερος τέλειος, για τον οποίο οποιαδήποτε εισαγωγή ή διαγραφή ακμής καταστρέφει την τελειότητά του.

Η P_4 δομή των τέλειων γράφων

Chvátal, 1984

Ορισμός: Δεδομένου γράφου $G(V, E)$, η P_4 δομή του είναι ένας 4-ομοιόμορφος υπεργράφος στο V, του οποίου οι υπερακμές είναι όλες υποσύνολα του V πληθυκότητας 4, που επάγουν ένα τεσσάρων κόμβων μονοπάτι στον G.

Ο Chvátal παρατήρησε ότι οι μή τέλειοι γράφοι δίνουν P_4 δομή ισοδύναμη με αυτή ενός γράφου με περιττή (αντι-) τρύπα:

Ημι-Ισχυρή Εικασία Τέλειων Γράφων: Ένας γράφος είναι τέλειος αν και μόνο αν έχει την P_4 δομή ενός τέλειου γράφου (Αποδείχθηκε από τον Reed το 1987).