TD 3
http://www-sop.inria.fr/members/Olivier.Faugeras/MVA/MMN11

---

1 Bifurcation de Hopf

Exercice 1. Brusselator On considère le système suivant:

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} &= -(\beta+1)u_1 + u_1^2 u_2 + \alpha \\ \frac{du_2}{dt} &= \beta u_1 - u_1^2 u_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

où α et β sont des constantes positives.

1. Montrer qu'il existe un équilibre $(\alpha, \beta/\alpha)$ et étudier la stabilité de cet équilibre. En déduire la présence d'une bifurcation de Hopf.
2. On fait le changement de variable $u_1 = \alpha - v_2$, $u_2 = \frac{\beta}{\alpha} - (v_1 + v_2)$ et on pose également $\omega = \alpha$, $2\mu = \beta - 1 - \alpha^2$ montrer que le système (1.1) devient:
$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dt} &= v_2 \\ \frac{dv_2}{dt} &= -\omega^2 v_1 + 2\mu v_2 - 2\omega v_1 v_2 + \frac{2\mu+1-\omega^2}{\omega} v_2^2 - (v_1+v_2)v_2^2. \end{cases} \tag{1.2}$$
3. Ecrire le système (1.2) sous la forme
$$\frac{dv}{dt} = \mathbf{L}v + \mathbf{R}(v,\mu)$$
et montrer que $\mathbf{R}(v,\mu) = \mu\mathbf{R}_{11}v + \mathbf{R}_{20}(v,v) + \mu\mathbf{R}_{21}(v,v) + \mathbf{R}_{30}(v,v,v)$.
4. Montrer que les coefficients de la forme normale:
$$\frac{dA}{dt} = i\omega A + a\mu A + bA|A|^2 + \text{h.o.t.}$$
sont
$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= -\frac{1}{2}(2+\omega^2) - \frac{i}{6\omega}(4 - 7\omega^2 + 4\omega^4). \end{aligned}$$

2 Bifurcation fourche

Exercice 2. Modèle de Burgers On considère le problème suivant:

$$\begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial t} &= \frac{1}{\mathcal{R}}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \phi - \frac{\partial(\phi^2)}{\partial x} + U\phi \\ \frac{dU}{dt} &= -\frac{1}{\mathcal{R}}U - \int_0^1 \phi^2(x,t)dx \\ 0 &= \phi(0,t) = \phi(1,t) \end{cases} \tag{2.1}$$

où $\phi(x,t) \in \mathbb{R}$, $U(t) \in \mathbb{R}$ et $(x,t) \in \,]0,1[\times\mathbb{R}$. $\mathcal{R}$ est le nombre de Reynolds.

1. Réécrire le système (2.1) comme une équation du premier order ayant la forme suivante:
$$\frac{du}{dt} = \mathbf{L}_{\mathcal{R}}u + \mathbf{R}(u)$$

2. On choisit comme espaces de Hilbert:
$$\begin{aligned}\mathcal{X} &= L^2(0,1)\times\mathbb{R}\\ \mathcal{Y} &= H_0^1(0,1)\times\mathbb{R}\\ \mathcal{Z} &= \big(H^2(0,1)\cap H_0^1(0,1)\big)\times\mathbb{R}.\end{aligned}$$
Montrer que pour tout $u\in\mathcal{Z}$ on a $\mathbf{R}(u)\in\mathcal{Y}$.

3. Montrer que le système (2.1) commute avec la symétrie $\mathbf{T}$ définie par:
$$\mathbf{T}\begin{pmatrix}\phi(x)\\ U\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\phi(1-x)\\ U\end{pmatrix}.$$

4. Montrer que le spectre de l'opérateur linéaire $\mathbf{L}$ est composé de $\lambda_0=-\frac{1}{\mathcal{R}}$ avec $(0,1)$ comme vecteur propre ainsi que des $\lambda_k=1-\frac{k^2\pi^2}{\mathcal{R}^2}$ avec vecteur propre $(\sin(k\pi x),0)$ pour $k\in\mathbb{N}$. Montrer qu'il existe des valeurs du paramètre $\mathcal{R}$ telles que σ_0 est non vide. Montrer que l'hypothèse 2.2 du théorème de la variété centrale est alors satisfaite.

5. On se place en $\mathcal{R}=\mathcal{R}_1=\pi^2$ et on pose $\mu=\mathcal{R}-\mathcal{R}_1$. On réécrit le système sous la forme donnée dans le théorème, c'est à dire $\mathbf{L}=\mathbf{L}_{\mathcal{R}_1}$ et $\mathbf{R}(u,\mu)=\mathbf{R}(u)+\mathbf{L}_{\mathcal{R}_1+\mu}-\mathbf{L}_{\mathcal{R}_1}$. Montrer que $\mathbf{L}$ satisfait les hypothèses de régularité 2.1 et que $\mathbf{R}\in\mathcal{C}^k(\mathcal{Z}\times\mathcal{V}_\mu,\mathcal{X})$ pour tout k.

6. Montrer que l'hypothèse 2.3 sur l'estimation de la résolvante est satisfaite. C'est à dire: pour tout $f=(\psi,V)\in\mathcal{X}$, la solution $u=(\phi,U)\in\mathcal{Y}$ du système
$$\begin{aligned}(i\omega-1)\phi-\frac{1}{\pi^2}\phi'' &= \psi\\ (i\omega+\frac{1}{\pi^2})U &= V\end{aligned}$$
vérifie
$$\|u\|_{\mathcal{X}}\le\frac{c}{|\omega|}\|f\|_{\mathcal{X}}$$
pour $|\omega|\ge\omega_0$ et c une constante positive.

7. Si l'on note $\xi_0=(\sin(\pi x),0)$ et si $u(t)=A(t)\xi_0+\Psi(A(t),\mu)$ l'équation réduite sur la variété centrale est:
$$\frac{dA}{dt}=f_0(A,\mu)\text{ avec }f_0(A,\mu)=O(|A|(|\mu|+|A|)).$$
A l'aide de la symétrie $\mathbf{T}$ montrer que
$$\frac{dA}{dt}=a\mu A+bA^3+O(|A|(|\mu|^2+|A|^2))$$

8. Montrer que les coefficients a et b sont donnés par:
$$\begin{aligned}a &= \frac{1}{\pi^2}\\ b &= -\frac{5\pi^2}{6}.\end{aligned}$$