Exercice 1

1) $P(\lambda) = \lambda^2 - \tau\lambda + \delta$, $\tau = a+d$, $\delta = ad - bc$.

2) $\lambda_1 = \dfrac{\tau + \sqrt{\tau^2 - 4\delta}}{2}$, $\lambda_2 = \dfrac{\tau - \sqrt{\tau^2-4\delta}}{2}$, $\sqrt{\tau^2 - 4\delta}$ est une racine complexe

3) Seul point fixe : $x = 0$ (M inversible)

4) (a) $\tau^2 - 4\delta > 0 \iff$ vp réelles

(b) $\delta < 0 \iff \lambda_1 \lambda_2 < 0$ et comme elles sont réelles, elles sont de signe opposé donc l'equilibre est hyperbolique (point selle)

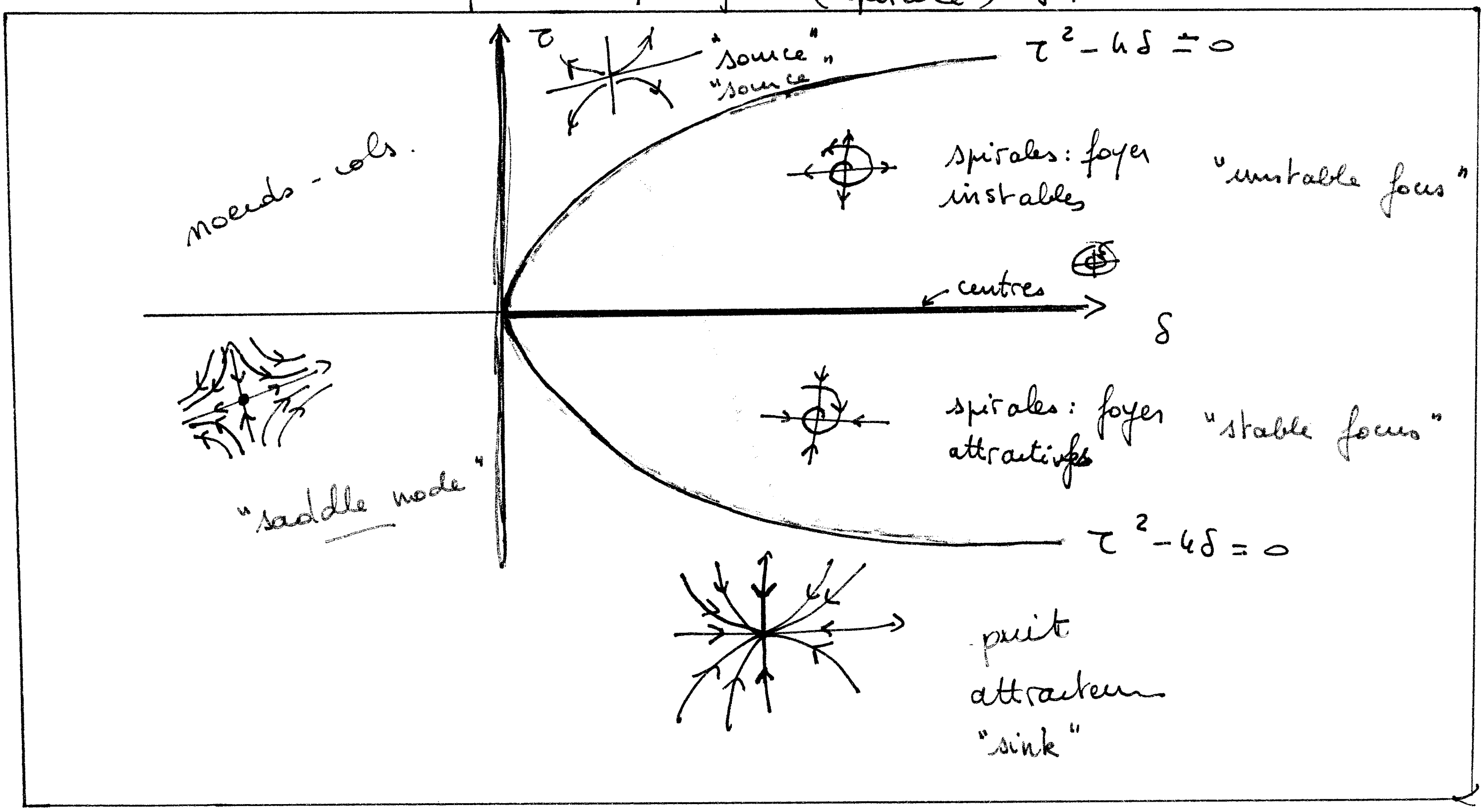
(c) $\delta > 0 \Rightarrow$ ~~si~~ Les deux valeurs propres sont de même signe.
$\tau < 0 \Rightarrow$ les deux valeurs propres sont $< 0 \Rightarrow$ on a un puit ~~[illegible]~~

(d) $\delta > 0$, si $\tau > 0$, on a : $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0 \Rightarrow$ on a une source ~~foyer~~.

5) On suppose $\tau^2 - 4\delta < 0$ ($\Rightarrow$ les valeurs propres sont complexes)

(a) $\tau = 2Re(\lambda_1) = 2Re(\lambda_2)$.
$\tau < 0 \Rightarrow$ equilibre attractif . (spirale) "foyer"

(b) $\tau > 0 \Rightarrow$ equilibre repulsif (spirale) "foyer"



Exercice 2

Soit $[t_0, t_1)$ l'intervalle de définition de la solution $x(t)$, t_1 est éventuellement infini.

On note $\tau := \sup \{ t \geq t_0 \mid \forall s \in [t_0, t],\ x(s) \in F \}$

le premier temps éventuel de sortie de F. On doit montrer que $\tau = t_1$.

On raisonne par l'absurde :

si $\tau < t_1$, alors $x(\tau)$ est défini et appartient à F.

$$\frac{d}{dt} f(x(t))\Big|_{t=\tau} = df_{x(\tau)}\, X(\tau, x(\tau))$$

Nécessairement, $x(\tau) \in \partial F = f^{-1}(0)$ donc

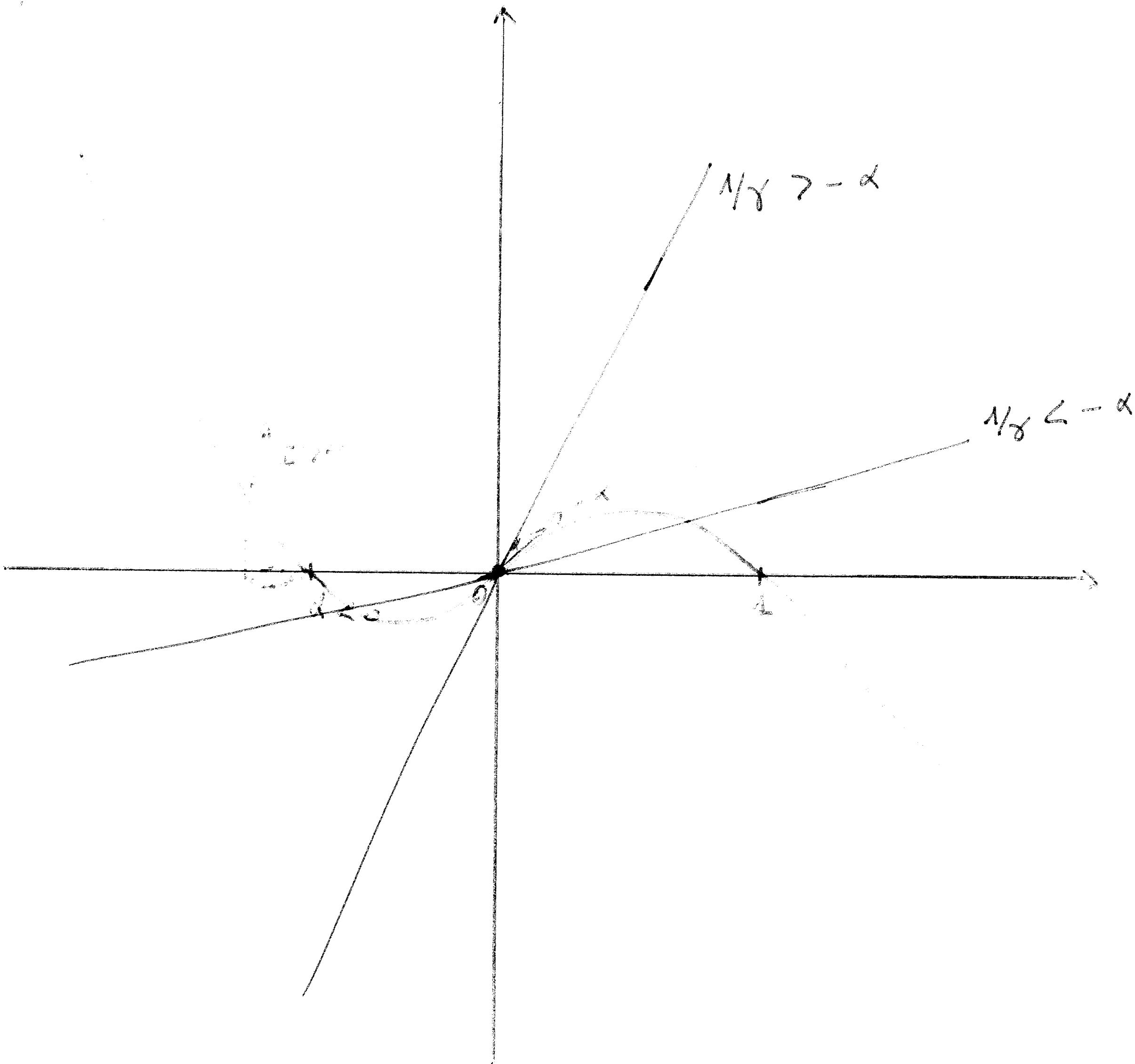
$$\boxed{\frac{d}{dt} f(x(t))\Big|_{t=\tau} < 0}$$

Donc dans un intervalle autour de τ, $f(x(t)) \leq 0$, ce qui contredit la définition de τ en tant que maximum.

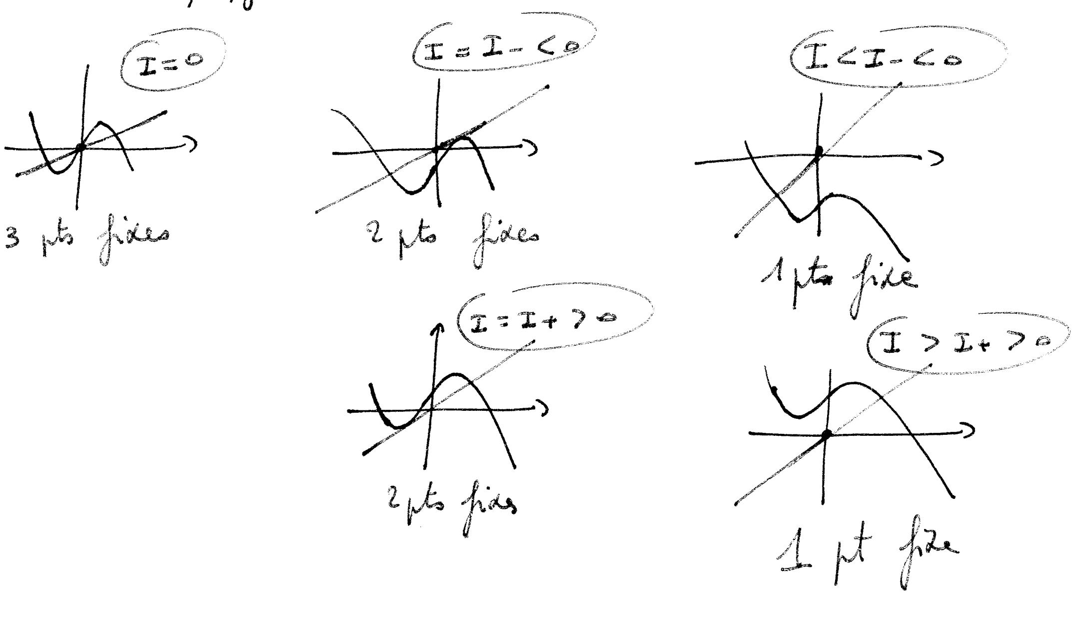
$\Rightarrow \boxed{\tau = t_1}$.

Exercice 1

① $\alpha < 0$, $I = 0$



Cas $\alpha < 0$, $1/\gamma < -\alpha$:



Cas $\alpha < 0$, $1/\gamma < -\alpha$: 1 point fixe $\forall I$

2) $I = 0$.

pts fixes : $\begin{cases} u(u-\alpha)(1-u) - w = 0 \\ u - \gamma w = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} u(u-\alpha)(1-u) - \frac{1}{\gamma} u = 0 \\ w = 1/\gamma\, u. \end{cases}$

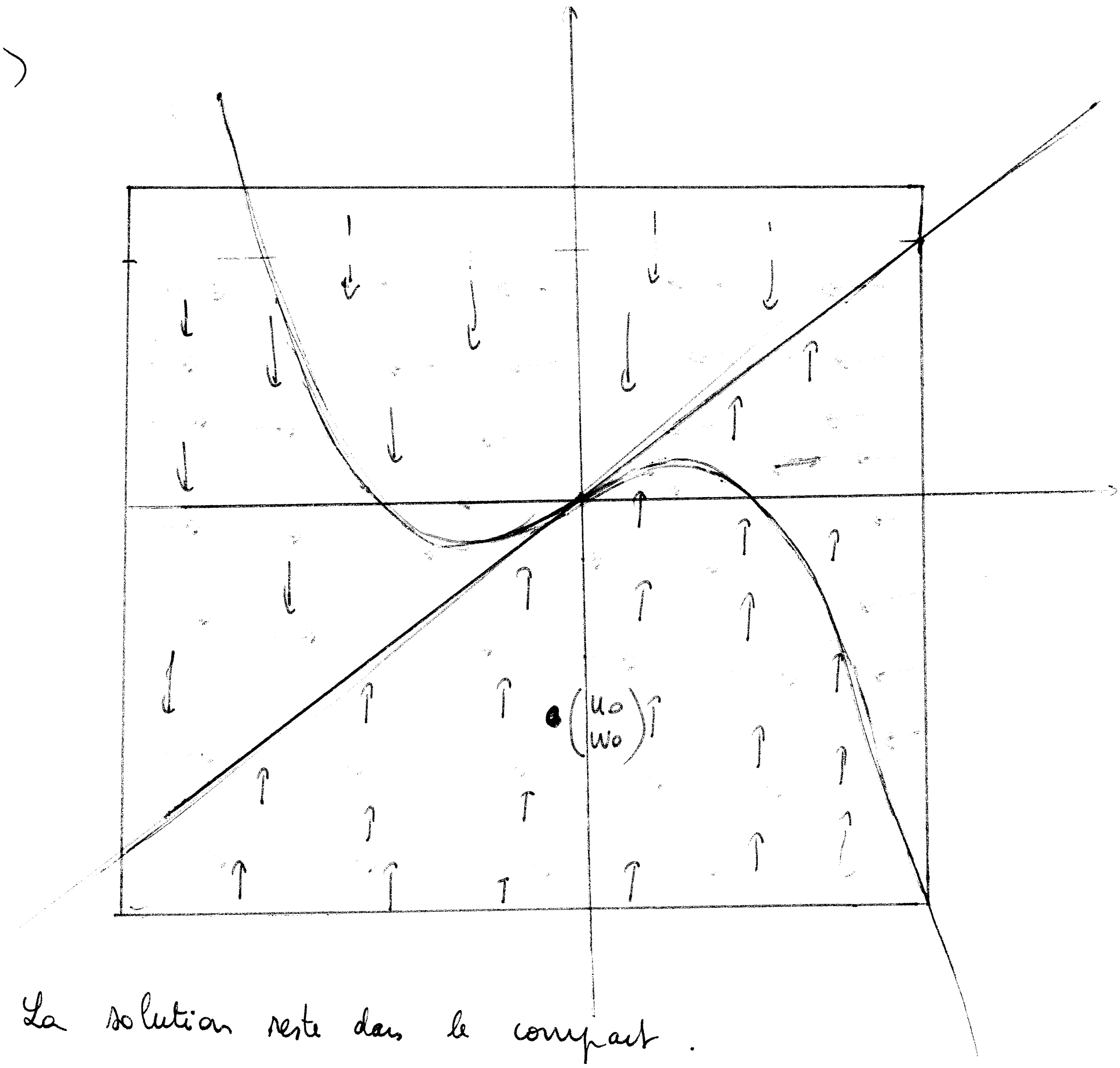
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un point fixe.

Jacobienne en 0 : $J_0 = \begin{pmatrix} -\alpha & -1 \\ \varepsilon & -\varepsilon\gamma \end{pmatrix}$

$\begin{cases} \det J_0 = \varepsilon(\alpha\gamma + 1) \\ \mathrm{Tr}\, J_0 = -(\alpha + \varepsilon\gamma) \end{cases}$

- si α proche de 0, alors $\det J_0 > 0$, $\mathrm{Tr}(J_0) < 0 \Rightarrow$ stable.
- si $\alpha > -\frac{1}{\gamma}$, alors $\det J_0 < 0$ et on a un <u>col</u> $\Rightarrow$ <u>instable</u>

3) a)



(b) La solution reste dans le compact.

(c) Elle est bornée $\Rightarrow$ dans l'adhérence, il y a soit un 1 point singulier soit une orbite (Poincaré – Bendixon). Or dans le compact, il

n'existe qu'un unique point fixe, $\binom{0}{0}$, qui est <u>instable</u>
donc qui n'est pas dans l'adhérence de $x(t)$ donc il existe
un cycle limite.

$\boxed{\text{Exercice 4}}$

1) a) $r = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \dot{r} = \frac{1}{r}(x\dot{x} + y\dot{y})$

$= \frac{1}{r}\left(x^2 - xy - x^2(x^2+y^2) + xy + y^2 - y^2(x^2+y^2)\right)$

$= \frac{1}{r}(r^2 - r^4)$

$$\boxed{\dot{r} = r(1-r^2)}$$

$\theta = \operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{1}{1+y^2/x^2}\left(\frac{\dot{y}}{x} - \frac{y\dot{x}}{x^2}\right) = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2+y^2}$

$$\boxed{\dot{\theta} = 1}$$

$\Sigma = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times S^1 ;\ r > 0,\ \theta = 0\}$

(b) $\frac{\dot{r}}{r(1-r^2)} = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}\log\left(\frac{r^2}{r^2-1}\ \frac{r_0^2-1}{r_0^2}\right) = t$

$\Rightarrow \frac{r^2}{r^2-1} = e^{2t}\frac{r_0^2}{r_0^2-1}$

$\Rightarrow r^2 = e^{2t}\frac{r_0^2}{r_0^2-1}(r^2-1)$

$r^2 = \frac{e^{2t} r_0^2}{r_0^2 - 1 - r_0^2 e^{2t}} \Rightarrow \boxed{r(t) = \left(1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1\right)e^{-2t}\right)^{-1/2}}$

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0 + t.}$$

$\Rightarrow \varphi^t(r_0, \theta_0) = \left(\left(1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1\right)e^{-2t}\right)^{-1/2},\ \theta_0 + t\right)$

(c) le 1er retour est en $t = 2\pi$, et le point atteint sur la section de Poincaré Σ est :

$$\boxed{P(r_0) = \left(1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1\right)e^{-4\pi}\right)^{-1/2}}$$

(d) points fixes : $P(r_0) = r_0 \iff r_0^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{r_0^2}-1\right)e^{-4\pi}} \Rightarrow r_0^2 = 1 \Rightarrow \boxed{r_0 = 1}$

car $r_0 > 0$

Le seul point fixe de P est $\boxed{r_0 = 1}$, qui correspond à l'orbite périodique $\boxed{r \equiv 1.}$

Stabilité du point fixe :

$$dP(1) = P'(1) = -\frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{1}{r_0^2}-1\right)e^{-4\pi}\right)^{-3/2}\left(-\frac{2e^{-4\pi}}{r_0^3}\right)\Bigg|_{r_0=1}$$

$$= e^{-4\pi} < 1$$

Donc le point fixe est stable.

Remarque 1 : On aurait pu prouver ce résultat en trouvant directement l'orbite périodique : $r=1$ est point fixe de l'équation en polaire, et on peut regarder sa stabilité :

$$\frac{d}{dr}\left(r-r^3\right)\Big|_{r=1} = 1-3r^2\Big|_{r=1} = -2 < 0 \Rightarrow \text{le point fixe est stable}$$

Remarque 2 : L'application de Poincaré est une itération de fonction et non une équation différentielle. La condition de stabilité n'est donc pas sur le signe ~~des valeurs propres~~ de la partie réelle des valeurs propres mais sur le module des valeurs propres :

si elles ont toutes un module <1, alors le p^t est stable

si $\exists$ une valeur propre de module >1, alors le p^t est répulsif.