Exercice 1

Les fonctions $x(t) \equiv 0$ et $x(t) = \left(\frac{1}{3}(t - t_0)\right)^3$

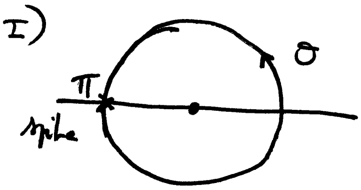
sont toutes deux solutions de l'EDO avec condition initiales.

$\Rightarrow$ pas d'unicité.

La fonction $x \longrightarrow x^{2/3}$ n'est pas localement Lipschitzienne autour de 0

Exercice 2

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = 1 - \cos\theta + (1 + \cos\theta)\, I = f(\theta, I) \\ \theta = \pi \Rightarrow \text{spike émis} \end{cases}$$



1) Pour $I < 0$, 2 points d'equilibre : $\theta_{\pm} = \pm \operatorname{Arccos}\left(\frac{1+I}{1-I}\right)$

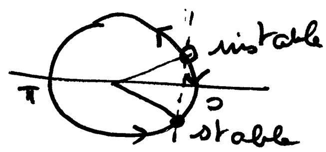
qui est bien défini ($I < 0 \Rightarrow |1+I| < |1-I| \Rightarrow \frac{1+I}{1-I} \in (-1, 1)$))

stabilité : il s'agit de regarder le signe de

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta, I) = \sin(\theta)\,(1 - I)$$

$$= \pm \sqrt{1 - \left(\frac{1+I}{1-I}\right)^2}\,(1 - I) = \pm\sqrt{(1-I)^2 - (1+I)^2} = \pm 2\sqrt{I}$$

$\Rightarrow$ θ_+ est instable, θ_- est stable



Toute solution non issue d'un des points fixes converge vers θ_- point d'equilibre stable : en effet, cette solution sera monotone sur un intervalle, donc converge vers un point fixe, qui est necessairement θ_-.

2) Pour $I > 0$, les points fixes éventuels doivent également vérifier $\cos\theta = \frac{1+I}{1-I}$ qui est de module > 1 donc il n'existe pas de point fixe, $f(\theta, I) \geq f_{min} > 0$ donc la solution retourne à son point de départ en temps fini. Comme l'EDO est autonome ($f(\theta, I)$ indep de t), la solution est donc periodique par l'unicité du thm. de Cauchy-Lipschitz.

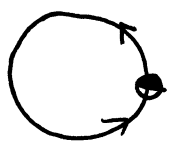
On peut prouver (soit par séparation des variables, soit en vérifiant que la fonction vérifie bien l'équa diff) que dans ce cas,

$$\theta(t) = 2\,\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{I}\,\tan(\sqrt{I}\,t + \alpha)\right)$$

où α est relié à la condition initiale.

La fréquence des spikes est donc $\dfrac{\sqrt{I}}{2\pi}$.

3) Pour $I = 0$, le point $\theta = 0$ est l'unique point fixe et on a $\forall\,\theta,\ f(\theta, 0) \geq 0$.



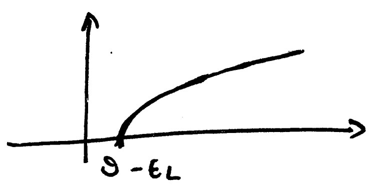
Le point 0 est un point fixe hyperbolique ("saddle point"). Le neurone ne spike pas si la condition initiale est $\theta_0 = 0$.
Il spike si $\theta_0 \in (0, \pi)$, et converge vers 0 après.
Il converge vers 0 si $\theta_0 \in (\pi, 0)$ asymptotiquement.

Exercice 3

1) $V(t) = E_L + RI + e^{-t/\tau}\left(V(0) - (E_L + RI)\right)$

spike si $E_L + RI > \theta$, ie $I > \dfrac{\theta - E_L}{R}$.

fréquence de décharge : $\dfrac{1}{\tau \log\left(\dfrac{E_L + RI - V_r}{E_L + RI - \theta}\right)}$



2) On pose $U = V - \left(\dfrac{V_T + E_L}{2}\right)$. On a :

$$\tau \dot{U} = U^2 + \left(V_T E_L + I - \left(\frac{V_T + E_L}{2}\right)^2\right) =: U^2 + \delta.$$

~~Si $\delta > 0$: $U(t) = \frac{1}{\sqrt{\delta}}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{\delta}}\right)$~~

~~Si $\delta < 0$: $U(t) = -\frac{1}{\sqrt{-\delta}}\,\mathrm{Argth}\left(\frac{x}{\sqrt{-\delta}}\right)$~~

Plus précisément (avec condition initiale $U(t=t_0)=U_0$)

$\underline{\delta>0}$ $U(t)=\sqrt{\delta}\tan\left(\frac{\sqrt{\delta}}{\tau}(t-t_0)+\text{Arctan}\left(\frac{U_0}{\sqrt{\delta}}\right)\right)$

$\Rightarrow$ Le neurone explose en temps fini pour :

$$\frac{\sqrt{\delta}}{\tau}(t-t_0)+\text{Arctan}\left(\frac{U_0}{\sqrt{\delta}}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

$$\Rightarrow \boxed{t-t_0=\frac{\pi/2-\text{Arctan}\left(\frac{U_0}{\sqrt{\delta}}\right)}{\sqrt{\delta}}\,\tau.}$$

fréq. de décharge : $V_r=-\infty \Rightarrow \boxed{f=\frac{1}{\tau}\frac{\sqrt{\delta}}{\pi}}$

$V_r\neq-\infty \Rightarrow \boxed{f=\frac{1}{\tau}\frac{\sqrt{\delta}}{\pi/2-\text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\left(V_r-\frac{V_T+E_L}{2}\right)\right)}}$ (*)

$\underline{\text{si } \delta<0}$: $U(t)=-\sqrt{-\delta}\tanh\left(\sqrt{-\delta}\frac{(t-t_0)}{\tau}+\text{Argth}\left(\frac{U_0}{\sqrt{-\delta}}\right)\right)$

qui $\underline{\text{est bornée}}$.

$\Rightarrow$ Condition de spike : $\delta>0$ ie : $V_T E_L+I>\left(\frac{V_T+E_L}{2}\right)^2$

$$\boxed{I>\frac{1}{4}\left(V_T^2+E_L^2\right)}$$

et dans ce cas, la fréquence de décharge est donnée par (*).

Exercice 4

- sur $[0, T]$, $V(t) = V_0 e^{-t/\tau}$.
- sur $[T, 2T)$, $V(t) = \left(V_0 e^{-T/\tau} + a\right) e^{-t/\tau}$

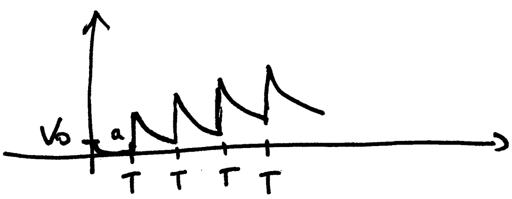
$$= V_0 e^{-(T+t)/\tau} + a e^{-t/\tau}.$$

- si sur $[kT, (k+1)T)$, $V(t) = V_0 e^{-\frac{kT-t}{\tau}} + a \sum_{p=0}^{k-1} e^{-pT/\tau} e^{-t/\tau}$

alors sur $[(k+1)T, (k+2)T)$,

$V(t)$ s'écrit :

$$V(t) = V((k+1)T)\, e^{-t/\tau} = V_0 e^{-(k+1)T/\tau} e^{-t/\tau} + a \sum_{p=0}^{k-1} e^{-pT/\tau} e^{-t/\tau} + a e^{-t/\tau}$$



Condition de spike : * si $a > \theta$, alors le premier spike est au temps $t = T$, fréquence $1/T$.

* si $a < \theta$, alors on doit trouver le plus petit temps t tel que :

$$V(0)\, e^{-kT/\tau} + a \sum_{p=0}^{k} e^{-kT/\tau} = V(nT^+) > \theta .$$

$$V(nT^+) \nearrow \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{a}{1 - e^{-T/\tau}} = \sup_{t \in \mathbb{R}} V(t)$$

si $V(0) = 0$, le neurone spike si et seulement si $\boxed{\frac{a}{1 - e^{-T/\tau}} > \theta}$.

Dans ce cas, $V(nT^+) = a \dfrac{1 - e^{-(n+1)T/\tau}}{1 - e^{-T/\tau}}$.

$$V(nT^+) > \theta \Rightarrow 1 - e^{-(n+1)T/\tau} > \frac{\theta}{a}\left(1 - e^{-T/\tau}\right)$$

$\Rightarrow$ temps de spike : $T \left\lceil \frac{\tau}{T} \log\left(1 - \frac{\theta}{a}\left(1 - e^{-T/\tau}\right)\right) - 1 \right\rceil$

Exercice 5

1) $n = U(t) - V(t)$

(entre 2 impulsions, $U(t)-V(t)$ constant et ↑ de 1 à chaque impulsion)

2) si $\langle I \rangle < 0$, alors $U(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} -\infty$ donc il reste en-dessous du seuil 1 si $t > T_1$ pour un certain T_1. De plus, $U(t) \geq V(t)$ donc aucun spike n'est émis après le temps T_1.

I est bornée sur $[0, T_1]$, notons M son sup sur $[0, T_1]$

$$U(t) \leq M T_1 + V(0)$$

Donc le nombre d'impulsion émises est fini, inférieur à la partie entière de $MT_1 + V(0)$.

si $\langle I \rangle > 0$, alors $U(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$, et donc le nombre de spikes dans l'intervalle $[0,T]$, égal à $U(t) - V(t)$, tend également vers l'infini, car $V(t) \in (-\infty, 1)$ donc majoré.

si $\langle I \rangle = 0$: on ne peut rien dire sur le nombre de spikes.

ex : $I \equiv 0 \qquad n = 0$

$I = \mathbb{1}_{[0,3+\varepsilon]} \qquad n = 3 \qquad \varepsilon \in (0,1)$

$I = \mathbb{1}_{[0,p+\varepsilon]} \qquad n = p \quad . \qquad \varepsilon \in (0,1)$

$I = (t)^{-1/2} \qquad \langle I \rangle = 0$, $U(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$

$\Rightarrow n_T \xrightarrow[T\to\infty]{} \infty$ où n_T = nb de spike dans $[0,T)$.

3) La fréquence de décharge est définie comme le nombre de spike par unité de temps. Supposons $\langle I \rangle \geq 0$.

$$f = \lim_{T\to\infty} \frac{n_T}{T} = \lim_{T\to\infty} \frac{U(T) - V(T)}{T} = \lim_{T\to\infty} \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T I(t)\,dt}_{\xrightarrow[T\to\infty]{} \langle I \rangle} - \underbrace{\frac{V(T)}{T}}_{\xrightarrow[T\to\infty]{} 0}$$

$$= \langle I \rangle$$

si $\langle I \rangle < 0$, la freq de décharge est nulle car on a 1 nb fini de spikes

Exercice 6

1) $U = RI$

2) ok.

3) (a) $\partial_x^2 u - u = -i_{ext}(x) =: f(x)$

$$u(x) = \alpha e^{-x} + \beta e^{x} + \frac{1}{2}\left(\int_0^t f(s) e^{s} ds + \int_0^t f(s) e^{-s} ds \; e^{2t}\right) e^{-t}$$

$$\begin{cases} u(0) = \alpha + \beta \\ u(L) = \alpha e^{-L} + \beta e^{L} + C(L) \end{cases}$$ système inversible

$$\begin{cases} u(0) = \alpha + \beta \\ u'(0) = -\alpha + \beta - \cancel{\tfrac{1}{2}} f(0) \end{cases}$$

(b) $v(x-ct) := u(x,t)$ $\quad \xi = x - ct$

$$-c\,\dot{v}(\xi) = \ddot{v}(\xi) - v(\xi) + i_{ext}.$$

→ Mettre le système en 2 dimensions, c'est une EDO linéaire, diagonaliser, résoudre, on obtient :

$$\boxed{v(\xi) = \alpha e^{\left(-\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}\sqrt{c^2+4}\right)\xi} + \beta e^{\left(-\frac{1}{2}c - \frac{1}{2}\sqrt{c^2+4}\right)\xi} - \left(\int_0^{\xi} f(z) e^{\left(\frac{1}{2}c - \sqrt{c^2+4}\right)z} dz \; e^{\left(-\frac{1}{2}c + \sqrt{c^2+4}\right)\xi} - \int_0^{\xi} f(z) e^{\left(\frac{1}{2}c + \sqrt{c^2+4}\right)z} dz \; e^{\left(-\frac{1}{2}c - \sqrt{c^2+4}\right)\xi}\right)\frac{1}{\sqrt{c^2+4}}}$$

(la sol. particulière est obtenue par variation de la constante)

(c) TF spatiale →

$$\partial_t \hat{u}(t,k) + k^2 u(t,k) + u(t,k) = \frac{\delta(t)}{\sqrt{2\pi}}$$

C'est une EDO linéaire à coeffs constants, la solution s'écrit :

$$\boxed{u(t,k) = \frac{e^{-(1+k^2)t}}{\sqrt{2\pi}} \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(t)}$$

fonction indicatrice

qui par T.F. inverse en k donne :

$$\boxed{u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \, e^{-t - x^2/4t} \, \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(t) =: G(t,x)}$$

G est appelé fonction de Green. Elle donne toutes les solutions de l'équation des câbles :

$$\boxed{u(t,x) = \int_{-\infty}^{t} dt' \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \, G(t-t', x-x') \, i_{ext}(t', x')}$$

(par linéarité).

④ Equation non-linéaire :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u) - w + I_{ext} \\[2mm] \dfrac{\partial w}{\partial t} = a(bu - w) \end{cases}$$

(a) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u) - w + I_{ext} = 0 \\ a(bu - w) = 0 \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} \partial_x^2 u + f(u) - bu + I_{ext} = 0 \\ w = bu \end{cases}}$$

Pour $I_{ext} = 0$, eq. à variables séparées.

(b) $v(x - ct) := u(x,t)$ $\quad \xi = x - ct$.

$$\boxed{\begin{cases} -c\,\dot{v}(\xi) = \ddot{v}(\xi) + f(v(\xi)) + w + I \\ \dot{w} = a(bv - w). \end{cases}}$$

Par des méthodes de perturbations singulières, on peut montrer qu'une vitesse de transport est sélectionnée, ce qui concorde avec les observations de Hodgkin-Huxley.