

TD6: Intégrale stochastique et formule d'Itô

G. Faye O. Faugeras

November 26, 2009

Exercice 1 : Martingales et mouvement Brownien Soit $(B_t)_t$ un mouvement brownien et $(\mathcal{F}_t)_t$ la filtration associée.

1. Montrer que $(B_t)_{t \geq 0}$ est une martingale
2. Montrer que $(B_t^2 - t)_{t \geq 0}$ est une martingale
3. Montrer que le processus $(e^{\theta B_t - \theta^2 t/2})_{t \geq 0}$ est une martingale en utilisant le fait que la transformée de Laplace d'une Gaussienne $N \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$ vaut $\mathbb{E}(e^{xN}) = e^{x^2 \sigma^2/2}$.
4. Montrer que si X_t est un Brownien de dimension d et F est une fonction harmonique (i.e. $\Delta F := \sum_{i=1}^d \frac{d^2 F}{dx_i^2} = 0$), alors $F(X_t)$ est une martingale.
5. On considère le processus $X_t = (t, B_t)_{t \geq 0}$.
 - (a) Vérifier que l'on peut appliquer la formule d'Itô à ce processus.
 - (b) Soit $F : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ une fonction C^2 (deux fois continuellement différentiable). Écrire la formule d'Itô pour le processus $F(t, B_t)$.
 - (c) En déduire que si F est solution de l'équation de la chaleur:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0$$

alors le processus $F(t, B_t)$ est une martingale.

- (d) En déduire que $\mathbb{E}(F(t, B_t)) = F(0, 0)$ pour tout $t \geq 0$
- (e) Vérifier que les trois premiers exemples sont des cas particuliers.
- (f) Montrer que si on note $h_n(t, x) = t^{n/2} H_n(x/\sqrt{t})$ où H_n est le polynôme de Hermite d'ordre n :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2/2}),$$

qui est solution de l'équation différentielle:

$$H_n''(x) - xH_n'(x) + nH_n(x) = 0$$

alors $h_n(t, B_t)$ est une martingale.

Exercice 2 : En utilisant la formule d'Ito, montrer que

$$\int_0^t B_s^2 dB_s = \frac{1}{3} B_t^3 - \int_0^t B_s ds$$

Exercice 3 : Soit B_t un MB p -dimensionnel. On définit $R(t) = \|B_t\|$.

1. En utilisant la formule de Ito, montrer que

$$R_t^2 = R_0^2 + 2 \sum_{i=1}^p \int_0^t B_s^i dB_s^i + p \cdot t$$

2. Montrer que $P(R_t < a) \propto \int_0^a r^{p-1} e^{-r^2/2t} dr$.
3. (★) Soit $p > 1$ et $g_\epsilon(y) = \sqrt{y} \mathbb{1}(y \geq \epsilon) + 1(y < \epsilon)(3\sqrt{\epsilon}/8 + 3y/4\sqrt{\epsilon} - y^2/8\epsilon\sqrt{\epsilon})$. Montrer que g_ϵ est C^2 . On considère $f_n = g_{1/n}$. Utiliser f_n pour montrer que

$$R_t = R_0 + \sum_{i=1}^p \int_0^t \frac{B_s^i}{R_s} dB_s^i + \int_0^t \frac{d-1}{R_s} ds$$

Exercice 4 : Indicatrices Soit B un mouvement Brownien.

1. Soit C le processus défini par:

$$C_t = \int_0^t \mathbb{1}_{B_s=0} ds$$

Montrer que le processus $B_t C_t$ est une martingale.

2. Montrer que $\int_0^t \mathbb{1}_{B_s=0} dB_s = 0$ dans $\mathbb{L}^2([0, T])$.