Méthodes Mathématiques pour les neurosciences
Processus stochastiques

Geoffroy Hermann   Olivier Faugeras

18 Novembre 2009

Vous pouvez me poser vos questions par mail: geoffroy.hermann@sophia.inria.fr

Exercice 1 : Petit rappel de proba...

Un avion contient $n \geq 2$ passagers. Le premier passager ne connait pas son numero de siege et s'assoit au hasard. Tous les autres passagers connaissent leur numero de siege. Le second passager s'assoit a son siege s'il est libre et en choisit un au hasard dans le cas contraire. Tous les autres passagers font de meme. Quelle est la probabilite que le dernier passager s'assoit a sa place ?

1. Faire le cas $n = 2$ et $n = 3$.
2. Conjecturer le resultat et le demontrer par recurrence. (On pourra conditionner avec le siege choisi par le premier passager).

Exercice 2 : Autour du processus de Poisson

Une v.a. de Poisson X de parametre $\lambda > 0$ prend des valeurs entieres positives telle que

$$P(X \geq 0) = 1, \ P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1...$$

On rappelle aussi que $E(X) = \lambda$ et $Var(X) = \lambda$. On souhaite obtenir une description probabiliste des petits changements de voltage qui apparaissent au niveau des synapses spontanement actives. On suppose qu'il y a n sites sur le nerf ou les neurotransmetteurs peuvent etre liberes. Quand un PA arrive dans le terminal, l'emission de neurotransmetteurs a lieu dans un nombre aleatoire M de sites, et cause un accroissement du potentiel V_i a chaque site i actif. On suppose les V_i iid de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. L'amplitude de e.p.p. est donnee par :

$$V = V_1 + ... + V_M$$

On suppose que $M \equiv Poisson(\lambda)$.

1. Montrer que $p_V(v) = e^{-\lambda}\left[\delta_0 + \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda^m}{\sqrt{m}m!}exp\left(-\frac{(v-m\mu)^2}{2m\sigma^2}\right)\right]$. On pourra etudier $P(V < v|M = m)$.
2. Trouver $E(V)$ et $Var(V)$. On pourra admettre que V est sommable.

On modelise la depolarisation d'une cellule nerveuse par un processus de Poisson[1] d'intensite λ. Chaque entree excitatrice cause un accroissement a_E du potentiel de membrane V : $V_t = a_E N_t$. $V_0 = 0$, quand V depasse un seuil θ, un PA est emis.

On pourra remarquer qu'un processus de Poisson est croissant ps car $P(N(t+s)-N(t) \geq 0) = P(N(t)-N(0) \geq 0) = 1$ car $N(t)-N(0)$ suit une loi de Poisson.

[1] $N(0) = 0$, pour $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n$ les va $N(t_k) - N(t_{k-1})$ sont independantes, pour $0 \leq t_1 < t_2$, $N(t_2) - N(t_1)$ suit une loi de Poisson de parametre $\lambda(t_2 - t_1)$.

1. On appelle $T_k = inf\left\{t > 0, N_{t+s} - N_s = k\right\}$ .Montrer que $T_k \equiv \Gamma(k,\lambda)$ *ie* $P_{T_k}(x) = \frac{\lambda}{(k-1)!}(\lambda x)^{k-1}e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}$. On remarquera que $t \to N_{t+s} - N_s$ est croissant et on utilisera $P(T_k > t) = P(N_{t+s} - N_s \leq k-1)$.

2. En deduire la loi du temps separant l'emission de deux spikes.

On ajoute des entrees inhibitrices et on ignore la dynamique du potentiel entre les entrees. Le modele s'ecrit :

$$V(t) = N_E(t) - N_I(t)$$

le seuil est toujours note θ. (Le reset est $v_r = 0$). On note $N = N_E + N_I$ le nombre de sauts ainsi que $\lambda = \lambda_E + \lambda_I$, $p \equiv \lambda_E/\lambda$, $q \equiv \lambda_I/\lambda$.

1. Calculer $P(V(t) = m | n \textit{ sauts ont eu lieu dans } (0,t])$. On pourra ecrire $n = n_E + n_I$ et $m = n_E - n_I$.

2. En deduire que

$$p_m(t) \equiv P(V(t) = m|V(0) = 0) = e^{-\lambda t}\sum_{n\geq m}{}' \frac{(\lambda t)^n}{n!}\binom{n}{\frac{n+m}{2}}p^{(n+m)/2}q^{(n-m)/2}$$

   La somme est prise sur les nombres pairs (resp. impairs) si m est pair (resp. impair).

3. En deduire que $p_m(t) = \left(\frac{\lambda_E}{\lambda_I}\right)^{m/2} e^{-\lambda t} I_m(2t\sqrt{\lambda_E\lambda_I})$, avec la fonction de Bessel $I_r(x) = \sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!\Gamma(k+r+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+r}$.

On suppose $\theta \in \mathbb{N}*$. On desire calculer la loi f_θ du temps d'interspike T_θ.

1. Prouver que : $p_m(t) = \int_0^t f_\theta(u)p_{m-\theta}(t-u)du$ si $m > \theta$.

2. Prouver que $f_\theta(t) = \theta\left(\frac{\lambda_E}{\lambda_I}\right)^{\theta/2}\frac{e^{-\lambda t}}{t}I_\theta(2t\sqrt{\lambda_E\lambda_I})$ avec une transformee de Laplace. On utilisera le fait que $\mathcal{L}\left\{e^{ct}f(t)\right\} = (\mathcal{L}f)(.-c)$, $\mathcal{L}(a^r I_r(at)) = \frac{(p-\sqrt{p^2-a^2})^r}{\sqrt{p^2-a^2}}$ ainsi que $\mathcal{L}(f(t)/t) = \int_s^\infty \mathcal{L}f$.

3. En deduire $P(T_\theta < \infty)$ puis $E(T_\theta)$.

On peut montrer que $P(T_\theta < \infty) = 1$ si $\lambda_E \geq \lambda_I$ et $\frac{\lambda_E^\theta}{\lambda_I^\theta}$ sinon.

Exercice 3 : Inegalite de Doob

Montrer que pour une suite finie $(X_k)_{k\leq n}$, sous-martingale[2] relative a une filtration $\mathcal{F}_k$, on a l'inegalite suivante :

$$P\left[\max_{k\leq n} X_k \geq l\right] \leq l^{-1}E(X_n^+)$$

Exercice 4 : Mouvements Browniens

On se place dans un espace de probabilite $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et on se donne $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien. Montrer que les processus suivants sont des mouvements Browniens:

1. $X_t := -B_t$ pour $t \geq 0$ (propriete de symetrie)

[2] X_k est mesurable sur $\mathcal{F}_k$, $E(|X_k|) < \infty$ et $E(X_k|\mathcal{F}_{k-1})(\geq) = X_{k-1}$

2. $X_t := tB_{\frac{1}{t}}$ pour $t > 0$, et $X_0 = 0$ (inversion du temps). Pour la continuite en zero, on se contentera de prouver que $B_n/n \to 0$ ps.

3. Pour $a > 0$ fixe, $X_t := \frac{1}{\sqrt{a}} B_{at}$ pour $t \geq 0$ (propriete de scaling)

4. ($\star$) Soit B_t un mouvement brownien p-dimensionel commencant a 0 et $U \in O(p)$ une matrice constante. Prouver que $\tilde{B}_t = UB_t$ est aussi un mouvement brownien.