Exercice ①

① $p = 1/2$

② S_i : siège du passager i

P_i : siège choisi par le passager i

On cherche $p_{n+1} = P(P_{n+1} = S_{n+1})$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} P(P_{n+1} = S_{n+1} \text{ et } P_1 = S_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} P(P_{n+1} = S_{n+1} \mid P_1 = S_i) \times \underbrace{P(P_1 = S_i)}_{1/(n+1)} \qquad \text{Bayes}$$

puisque le passager 1 s'assoit au hasard

de plus $P(P_{n+1} = S_{n+1} \mid P_1 = S_{n+1}) = 0$

et $P(P_{n+1} = S_{n+1} \mid P_1 = S_1) = 1$ car si le 1er passager s'est assis sa place : ok.

donc $p_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}\left[\sum_{i=2}^{n} P(P_{n+1} = S_{n+1} \mid P_1 = S_i) + 1\right]$

événement $\{P_{n+1} = S_{n+1} \mid P_1 = S_i\}$

$\longrightarrow$ le passager 1 a choisi le siège du passager i.

les passagers $2 \dots i-1$ peuvent s'asseoir à leur place en $S_2 \dots S_{i-1}$

le passager i choisit un siège au hasard parmi $\{S_{i+1}, \dots S_{n+1}\}$

les passagers $i+1 \dots n+1$ s'installent ensuite comme ils peuvent

d'où $P(P_{n+1} = S_{n+1} \mid P_1 = S_i) = p_{n+1-i} = \dfrac{1}{2}$ par hyp de récurrence ($i \geq 2$)

$$\Rightarrow \quad p_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{n+1}\left(1 + \frac{1}{2}(n-1)\right) = \frac{1}{2}.$$

Exercice ②

$$P(V < v) = \sum_{m=1}^{\infty} P(V < v \mid M = m)\, P(M = m) + P(V < v \mid M = 0)\, P(M = 0)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} P(V_1 + \dots + V_m < v)\, P(M = m) + \int_{-\infty}^{v} \delta_0(u)\, du \; e^{-\lambda}$$

en effet si aucun sinistre n'arrive V a pour loi $\delta_0(v)$.

V_i i.i.d de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow P(V_i < v) = \displaystyle\int_{-\infty}^{v} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, dx$

somme de variables indépendantes : $V_1 + \dots + V_n \sim \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$

$$\Rightarrow P(V < v) = \int_{-\infty}^{v} p_V(s)\, ds$$

$$= \int_{-\infty}^{v} \left(\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \frac{\lambda^n}{\sqrt{n}\, n!} \exp - \frac{(s - n\mu)^2}{2n\sigma^2} \right] + \delta_0(s) \right) e^{-\lambda}\, d$$

car $P(N = n) = \dfrac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!}$.

CQFD.

② • $$\mathbb{E} V = \int_{\mathbb{R}} v\, p_V(v)\, dv$$

$$= e^{-\lambda} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} v\, \delta_0(v)\, dv}_{0} + \frac{e^{-\lambda}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\sqrt{n}\, n!} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} v \exp\left[- \frac{(v - n\mu)^2}{2n\sigma^2}\right] dv}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 n}} v \exp\left[- \frac{(v - n\mu)^2}{2n\sigma^2} \right] dv}_{= n\mu \text{ (espérance d'une gaussienne)}}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \mu = e^{-\lambda} \mu \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = \lambda\mu.$$

• de même $\mathbb{E} V^2 = e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\lambda^n}{n!} \mathbb{E} X^2$ où $X \sim \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$

or $\operatorname{Var} X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = n\sigma^2 \Rightarrow \mathbb{E}X^2 = n\sigma^2 + n^2\mu^2$

$$\Rightarrow \mathbb{E} V^2 = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \mu^2 \frac{n \lambda^n}{(n-1)!}} + \underbrace{e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma^2 \frac{\lambda^n}{(n-1)!}}_{\sigma^2 \lambda}$$

$$\mu^2 \lambda \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{\lambda^n}{n!}$$

$$= \mu^2 \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{d\lambda} (\lambda^{n+1}) \frac{1}{n!}$$

$$= \mu^2 \lambda \frac{d}{d\lambda} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+1}}{n!} \right]$$

$$= \mu^2 \lambda \frac{d}{d\lambda} \left[\lambda e^{\lambda} \right]$$

$$= \mu^2 \lambda (e^{\lambda} + \lambda e^{\lambda})$$

$$\Rightarrow \operatorname{Var} V = \mathbb{E}V^2 - (\mathbb{E}V)^2$$
$$= \mu^2(\lambda + \lambda^2) + \lambda\sigma^2 - (\lambda\mu)^2$$
$$= \lambda(\mu^2 + \sigma^2).$$

③ N_t processus de Poisson. valeurs entières $P(N(t)=k) = e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^k}{k!}$

$N_t - N_s$ suit une loi de Poisson de param $\lambda(t-s)$

et $N_{t_k} - N_{t_{k-1}}$ sont indépendants.

. $N_{t+s} - N_s \leq k-1 \iff T_k > t$ où $T_k = \inf\{t>0,\ N_{t+s} - N_s = k\}$

puisque $t \longmapsto N_{t+s} - N_s$ est croissant.

$$\Rightarrow P(T_k > t) = \int_t^{+\infty} p_{T_k}(x)\,dx = P(N_{t+s} - N_s \leq k-1)$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} P(N_{t+s} - N_s = i)$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^i}{i!} \quad \text{car } N_{t+s} - N_t \sim \text{Poisson}(\lambda t$$

Soit $I_k = \displaystyle\int_{\lambda t}^{\infty} e^{-u} u^k\,du = e^{-\lambda t}(\lambda t)^k + k\, I_{k-1}$ (I.P.P)

$I_0 = e^{-\lambda t} \Rightarrow \dfrac{I_k}{k!} = e^{-\lambda t}\displaystyle\sum_{i=0}^{k}\frac{(\lambda t)^i}{i!}$

$$\Rightarrow P(T_k > t) = \frac{I_{k-1}}{(k-1)!} \cdot \frac{1}{(k-1)!}\int_{\lambda t}^{+\infty} e^{-u} u^{k-1}\,du$$

$$= \frac{1}{(k-1)!}\int_t^{+\infty} e^{-\lambda v}(\lambda v)^{k-1}\lambda\,dv \qquad (u = \lambda v)$$

Vrai cela pour $t>0$ d'où $p_{T_k}(x) = \dfrac{\lambda}{(k-1)!} e^{-\lambda x}(\lambda x)^{k-1}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}$

$T_k \sim \Gamma(k,\lambda)$ d'où $\mathbb{E}[T_k] = k/\lambda$

$V[T_k] = k/\lambda^2$.

④ Temps séparant l'émission de deux spikes

$V_t = a_E N_t$ spike si $V > \theta$ le nombre d'entrées doit être supérieur ou égal à $\left[\dfrac{\theta}{a_E}\right] + 1$

$T_{\text{spike}} = \inf\{t>0,\ N_{t+s} - N_t = \left[\dfrac{\theta}{a_E}\right] + 1\} \sim \Gamma\left(1 + \left[\dfrac{\theta}{a_E}\right], \lambda\right)$.

(5) entrées inhibitrices $V(t) = N_E(t) - N_I(t)$.

On cherche $P(V(t) = m \mid n$ sauts ont lieu dans $[0,t])$

$n = n_E + n_I \qquad N(t) = n \geq m \qquad n_E = \frac{n+m}{2}$ donc n et m ont même parité

$m = n_E - n_I$

Soit p_r la probabilité que le potentiel s'accroisse de 1 au temps t quand il y a un saut supplémentaire:

$$p_r = \lim_{s \to 0} P(V(t+s) - V(t) = 1 \mid N(t+s) - N(t) = 1)$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{P(V(t+s) - V(t) = 1 \text{ et } N(t+s) - N(t) = 1)}{P(N(t+s) - N(t) = 1)}$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{P(N_E(t+s) - N_E(t) = 1)}{P(N(t+s) - N(t) = 1)}$$

- N_t est un processus de Poisson de param λt où $\lambda = \lambda_E + \lambda_I$ (somme de poisson indépendants, cf fonction caractéristique $\phi_X(y) = \mathbb{E}\, e^{iyX}$)
- $N_E(t+s) - N_E(t)$ est un processus de Poisson de param λs

$$p_r = \lim_{s \to 0^+} \frac{e^{-\lambda_E s}}{e^{-\lambda s}} \frac{\lambda_E s}{\lambda s} = \frac{e^{-\lambda_E s}}{e^{-(\lambda_E + \lambda_I)s}} \underbrace{\frac{\lambda_E}{\lambda_I + \lambda_E}}_{p} = \lim_{s \to 0^+} p\, e^{\lambda_I s} = p.$$

- $P(V(t) = m \mid N(t) = n) = \binom{n}{n_E} p^{n_E} (1-p)^{n - n_E}$ (Binomiale (n,p))

$$= \binom{n}{\frac{n+m}{2}} p^{\frac{n+m}{2}} q^{\frac{n-m}{2}}.$$

(6) $p_m(t) = P(V(t) = m \mid V(0) = 0)$

$\hookrightarrow N_E(0) - N_I(0) = 0$: toujours le cas.

$$P(V(t) = m) = \sum_{n \geq m}^{\prime} P(V(t) = m \mid N(t) = n) \underbrace{P(N(t) = n)}_{e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}}$$

où la somme est prise sur n pairs (resp impairs) si m est pair (resp impair).

(7) $$p_m(t) = e^{-\lambda t} \sum_{n\geq m}' \frac{(\lambda t)^n}{n!} \binom{n}{\frac{n+m}{2}} p^{\frac{n+m}{2}} q^{\frac{n-m}{2}} \qquad n = m, m+2, m+4 \ldots$$

$$= e^{-\lambda t} \sum_{n_I=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{m+2n_I}}{(m+2n_I)!} \binom{m+2n_I}{m+n_I} p^{m+n_I} q^{n_I}$$

$$= e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{m+2k}}{\cancel{(m+2k)!}} t^{m+2k} \frac{\cancel{(m+2k)!}}{(m+k)!\,k!} \left(\frac{\lambda_E}{\lambda}\right)^{m+k} \left(\frac{\lambda_I}{\lambda}\right)^k$$

$$= e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{m+2k}}{k!\,(m+k)!} \left(\sqrt{\lambda_E \lambda_I}\right)^{m+2k} \left(\frac{\lambda_E}{\lambda_I}\right)^{m/2}$$

$$= \left(\frac{\lambda_E}{\lambda_I}\right)^{m/2} e^{-\lambda t} I_m\left(2t\sqrt{\lambda_E\lambda_I}\right). \qquad \text{(QFD.}$$

(8) Un chemin V commençant à 0 atteint $m > \theta$ à la date t. Comme $m > \theta$ le chemin franchit le niveau θ à une date $t' < t$ pour la première fois.
En intégrant sur toutes les possibilités pour t' :

$$p_m(t) = \int_0^t f_\theta(t')\, p_{m-\theta}(t-t')\, dt'. \qquad \text{où } p(t_1 < T_\theta < t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f_\theta(t)\, dt$$

(9) Transformée de Laplace $\mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty e^{-ps} f(p)\, dp.$

[Transformée de Fourier $\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-itx}\, dt$]

$$p_m = f_\theta * p_{m-\theta} \qquad \text{(convolution)} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}p_m = \mathcal{L}f_\theta \times \mathcal{L}p_{m-\theta}.$$

$$a = 2\sqrt{\lambda_E\lambda_E} \qquad \mathcal{L}(I_m(at)) = \frac{\left(s - \sqrt{s^2-a^2}\right)^m}{a^m\sqrt{s^2-a^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathcal{L}\, I_m(at)}{\mathcal{L}\, I_{m-\theta}(at)} = \frac{\left(s-\sqrt{s^2-a^2}\right)^\theta}{a^\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{ds}\left[\frac{\mathcal{L}\, I_m(at)}{\mathcal{L}\, I_{m-\theta}(at)}\right] = \frac{\theta}{a^\theta}\left(s-\sqrt{s^2-a^2}\right) \times \frac{d}{ds}\left(s-\sqrt{s^2-a^2}\right)$$

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{\mathcal{L}\, I_m(at)}{\mathcal{L}\, I_{m-\theta}(at)}\right] = \frac{\theta}{a^\theta}\left(s-\sqrt{s^2-a^2}\right)^{\theta-1}\left(1 - \frac{2s}{2\sqrt{s^2-a^2}}\right)$$

$$= -\frac{\theta}{a^\theta}\frac{\left(s-\sqrt{s^2-a^2}\right)^\theta}{\sqrt{s^2-a^2}} = -\theta\,\mathcal{L}\left[I_\theta(at)\right]$$

or $\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{\infty} \mathcal{L} f$

$$\int_s^{+\infty} \frac{d}{ds} \frac{\mathcal{L}\, I_m(at)}{\mathcal{L}\, I_{m-\theta}(at)}\, ds = -\theta \int_s^{+\infty} \mathcal{L}\left[I_\theta(at)\right](u)\, du$$

$$= -\theta\, \mathcal{L}\left[\frac{I_\theta(at)}{t}\right](s)$$

d'où $\frac{\mathcal{L}\, I_m(at)}{\mathcal{L}\, I_{m-\theta}(at)}(s) = \theta\, \mathcal{L}\left[\frac{I_\theta(at)}{t}\right](s)$ car $\lim\limits_{u\to+\infty} \frac{\mathcal{L}\, I_m(at)}{\mathcal{L}\, I_{m-\theta}(at)}(u) = 0$.

or $\mathcal{L} f_\theta = \frac{\mathcal{L}\, p_m}{\mathcal{L}\, p_{m-\theta}}$ ac $p_m = \left(\frac{\lambda_E}{\lambda_I}\right)^{m/2} e^{-\lambda t}\, I_m(at)$

$$\Rightarrow \mathcal{L} f_\theta = \left(\frac{\lambda_E}{\lambda_I}\right)^{\theta/2} \frac{\mathcal{L}\left[e^{-\lambda t} I_m(at)\right]}{\mathcal{L}\left[e^{-\lambda t} I_{m-\theta}(at)\right]}$$

$$= \left(\frac{\lambda_E}{\lambda_I}\right)^{\theta/2} \frac{\mathcal{L}\left[I_m(at)\right](\cdot+\lambda)}{\mathcal{L}\left[I_{m-\theta}(at)\right](\cdot+\lambda)}$$

$$= \left(\frac{\lambda_E}{\lambda_I}\right)^{\theta/2} \theta\, \mathcal{L}\left[\frac{I_\theta(at)}{t}\right](\cdot+\lambda)$$

$$\Rightarrow f_\theta(t) = \theta \left(\frac{\lambda_E}{\lambda_I}\right)^{\theta/2} \frac{e^{-\lambda t}}{t}\, I_\theta\left(2t\sqrt{\lambda_E \lambda_I}\right).$$ CQFD.

(10) $$P(T_\theta < \infty) = \int_0^{\infty} f_\theta(u)\, du = \theta \left(\frac{\lambda_E}{\lambda_I}\right)^{\theta/2} \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{I_\theta(at)}{t}\, dt}_{\mathcal{L}\left(\frac{I_\theta(at)}{t}\right)(\lambda) \text{ par définition}}$$

or on a vu $\mathcal{L}\left[\frac{I_\theta(at)}{t}\right](\lambda) = \frac{1}{\theta} \frac{\mathcal{L}\, I_m(at)}{\mathcal{L}\, I_{m-\theta}(at)}(\lambda) = \frac{1}{\theta}\left(\frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - a^2}}{a^\theta}\right)^\theta$

avec $a = 2\sqrt{\lambda_E \lambda_I}$ et $\lambda = \lambda_E + \lambda_I$ $\Rightarrow \lambda^2 - a^2 = (\lambda_E - \lambda_I)^2$

- cas $\lambda_E > \lambda_I$ $\quad P(T_\theta < \infty) = \cancel{\theta} \left(\frac{\lambda_E}{\lambda_I}\right)^{\theta/2} \frac{1}{\cancel{\theta}} \frac{(\cancel{2}\lambda_I)^\theta}{(\cancel{2}\sqrt{\lambda_E \lambda_I})^\theta} = 1.$

- cas $\lambda_E < \lambda_I$ $\quad P(T_\theta < \infty) = \left(\frac{\lambda_E}{\lambda_I}\right)^{\theta/2} \frac{(2\lambda_E)^\theta}{(2\sqrt{\lambda_E \lambda_I})^\theta} = \left(\frac{\lambda_E}{\lambda_I}\right)^\theta.$

- $E(T_\theta) = \int_0^{+\infty} t\, f_\theta(t)\, dt = \theta \left(\frac{\lambda_E}{\lambda_I}\right)^{\theta/2} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} I_\theta(at)\, dt$

$$= \theta \left(\frac{\lambda_E}{\lambda_I}\right)^{\theta/2} \mathcal{L}\left[I_\theta(at)\right](\lambda)$$

$$= \theta \left(\frac{\lambda_E}{\lambda_I}\right)^{\theta/2} \frac{(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - a^2})^\theta}{a^\theta \sqrt{\lambda^2 - a^2}}$$

- cas $\lambda_E > \lambda_I$ $\quad E(T_\theta) = \theta \left(\frac{\lambda_E}{\lambda_I}\right)^{\theta/2} \frac{1}{(2\sqrt{\lambda_E\lambda_I})^\theta} \frac{(2\lambda_I)^\theta}{\lambda_E - \lambda_I} = \frac{\theta}{\lambda_E - \lambda_I}$

- cas $\lambda_E < \lambda_I$ $\quad E(T_\theta) = \theta \left(\frac{\lambda_E}{\lambda_I}\right)^{\theta/2} \frac{1}{(2\sqrt{\lambda_E\lambda_I})^\theta} \frac{(2\lambda_E)^\theta}{\lambda_I - \lambda_E} = \theta \left(\frac{\lambda_E}{\lambda_I}\right)^\theta \frac{1}{\lambda_I - \lambda_E}.$

$\downarrow$

ou plutôt $E(T_\theta \mid T_\theta < \infty)$ $\to$ en effet les calculs précédents (par $f(t)$) supposent qu'on atteint le seuil θ en temps fini.

$T_\theta \sim f_\theta(t)$ si $T_\theta < \infty$

et $T_\theta = \infty$ avec proba $1 - \left(\frac{\lambda_E}{\lambda_I}\right)^\theta$

Exercice 3

X_k sous martingale / $\mathcal{F}_k$: $E(X_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) \geq X_{k-1}$.

X_k^+ est aussi une sous martingale.

Soit $\tau = \inf\{k \mid X_k \geq \ell\}$

$$\mathbb{E}(X_n^+) \geq \mathbb{E}(\underbrace{X_n^+}_{\geq 0} \underbrace{\mathbb{1}_{\{\tau \leq n\}}}_{\in[0,1]}) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left[X_n^+ \mathbb{1}_{\{\tau = k\}}\right]$$

$$= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{\tau=k\}} X_n^+ \mid \mathcal{F}_k\right]\right]$$

$$= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{\tau=k\}} \mathbb{E}\left[X_n^+ \mid \mathcal{F}_k\right]\right]$$

$$\geq \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{\tau=k\}} X_k^+\right]$$

d'où $\mathbb{E}[X_n^+] \geq l \sum_{k=1}^{n} P(\tau = k) = l\, P(\tau \leq n) = l\, P(\max_{k \leq n} X_k \geq l)$. 8

$(\forall t\, D_t)$

__Exercice ④__ B_t brownien dans $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

① $X_t := -B_t \quad t \geq 0$

On doit vérifier que X_t est un processus gaussien centré C^0 de covariance $\mathbb{E}[X_t X_s] = t \wedge s$

évident puisque $\mathbb{E}[X_t X_s] = \mathbb{E}[B_t B_s]$

② $X_t = t B_{\frac{1}{t}}$ pour $t > 0$ et $X_0 = 0$.

continuité en 0. loi forte des grands nombres si $\lim_{t \to \infty} \langle M, M \rangle_t = \infty$ (variation quadratique)

alors $\lim_{t \to \infty} \frac{M_t}{\langle M, M \rangle_t} = 0$. (pour une martingale M_t)

or dans le cas du brownien $\langle B, B \rangle_t = t$ (Lévy) d'où $\frac{B_t}{t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$.

. $B_t \sim \mathcal{N}(0,t)$ $\quad B_{\frac{1}{t}} \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{t})$ $\quad t B_{\frac{1}{t}} \sim \mathcal{N}(0,t)$

et $\mathbb{E}\, X_t X_s = \mathbb{E}\left(ts\, B_{\frac{1}{t}} B_{\frac{1}{s}}\right) = ts\, \frac{1}{t} \wedge \frac{1}{s} = \frac{ts}{t \vee s} = t \wedge s$.

③ $a > 0$ $\quad X_t = \frac{1}{\sqrt{a}} B_{at}$ gaussien centré

$$\mathbb{E}\, X_t X_s = \frac{1}{a} \mathbb{E}(at \wedge as) = t \wedge s.$$

④ B_t brownien p dimensionnel $\quad U \in O(p)$ groupe orthogonal.

$(B_t^1, \dots B_t^p)$ MB si les B_t^i sont indépendants et si chaque B_t^i MB / filtration commune $\mathcal{F}_t$.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} U \end{bmatrix}}_{\in O(p)} \begin{bmatrix} B_t^1 \\ \vdots \\ B_t^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_t^1 \\ \vdots \\ X_t^p \end{bmatrix}$$

. X_t^i est gaussien centré C^0. Pour t fixé $(X_t^1, \dots X_t^p)$ est un vecteur gaussien ses coordonnées sont indépendantes si sa matrice de variance-covariance est diagonale

$\mathrm{cov}(X_t^i, X_t^j) = \mathrm{cov}\left(\sum_{k=1}^p U_{ik} B_t^k, \sum_{l=1}^p U_{jl} B_t^l\right) = \sum_{k,l} U_{ik} U_{jl} \overbrace{\mathrm{cov}(B_t^k, B_t^l)}^{\delta_{kl} t} = \delta_{ij}\, t.$

. et $\mathbb{E}(X_t^i X_s^i) = \mathbb{E}\left[(UB_t)^i (UB_s)^i\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^p U_{ij} B_t^j \sum_{k=1}^p U_{ik} B_s^k\right]$

$= \sum_{j,k} U_{ij} U_{ik} \underbrace{\mathbb{E}[B_t^j B_s^k]}_{t \wedge s\, \delta_{jk}} = \sum_{j=1}^p U_{ij} U_{ij} (t \wedge s) = t \wedge s (U^t U)_{ii}$

$= t \wedge s$

car $U^t U = Id$.