

Méthodes Mathématiques pour les neurosciences

TD 3

Correction

Mathieu Galtier Olivier Faugeras

28 octobre 2009

Exercice 1 : Bifurcation pli dans un modèle d'écologie ou de climat

- Points fixes: résoudre $rx(1 - \frac{x}{K}) - \alpha = 0$ revient à résoudre l'équation suivante: $x^2 - Kx + \frac{\alpha K}{r} = 0$. Il y a donc deux solutions ($x_{\pm} = \frac{K \pm \sqrt{K^2 - 4\alpha K/r}}{2}$) si $\alpha < \frac{Kr}{4}$, une ($x = \frac{K}{2}$) si $\alpha = \frac{Kr}{4}$ et aucune si $\alpha > \frac{Kr}{4}$.

La bifurcation peut donc avoir lieu en $\alpha = \frac{Kr}{4}$ et $x = \frac{K}{2}$. En ce point le système a une valeur propre qui passe par zéro. Vérifions maintenant les conditions pour avoir une bifurcation pli:

- Valeur propre: $\frac{\partial F_{\alpha}}{\partial x} = r - \frac{2rx}{K} |_{x=K/2} = 0$
- Transversalité: $\frac{\partial F_{\alpha}}{\partial \alpha} = -a \neq 0$
- Condition de non dégénérescence: $\frac{\partial^2 F_{\alpha}}{\partial x^2} = -\frac{2r}{K} \neq 0$

On a donc bien affaire à une bifurcation pli. Le diagramme de bifurcation est le suivant:

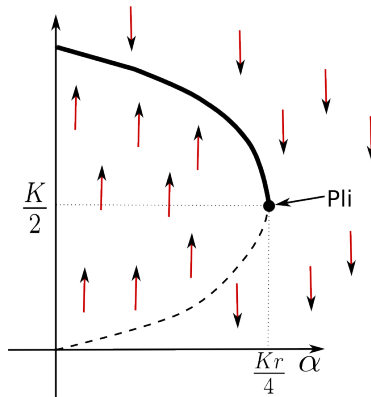


Figure 1: Diagramme de bifurcation où on voit l'effet de catastrophe d'une récolte trop forte.

- En posant $\alpha = 2\beta F$, $K = k\alpha\Delta T$ et $r = 2k\alpha\Delta T$ on trouve que le système climatique s'écrit:

$$\dot{q} = r|q|(1 - \frac{q}{K}) - \alpha$$

Ainsi quand $q > 0$ alors le système est comme précédemment. En revanche quand $q < 0$, on a:

$$\dot{q} = -rq\left(1 - \frac{q}{K}\right) - \alpha$$

Les points d'équilibre sont $q = \frac{K}{2}\left(1 - \sqrt{1 + 4\frac{\alpha}{r}}\right)$ et sont toujours stables. Cet exemple explique donc qu'un jour quelqu'un risque d'emmètre la par-

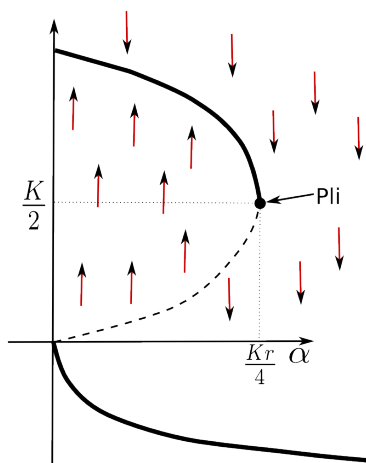


Figure 2: Diagramme de bifurcation de l'exo 1.2

ticule de CO2 de trop. En effet, le CO2 est directement lié au paramètre de bifurcation F . Une fois la bifurcation pli passée (ce qui est peut être déjà le cas on ira vers un état stable en régime salin: le Gulf-Stream tournera dans l'autre sens... Pour plus de détails voir l'article de Stommel (1961) intitulé *Thermohaline convection with two stable regimes of flow*.

Exercice 2 : Bifurcations dans des systèmes dynamiques discrets

1. $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$. Tout d'abord calculons les fonctions qui nous seront utiles:

$$\frac{\partial F_\mu}{\partial \mu} = x(1 - x)$$

$$\frac{\partial F_\mu}{\partial x} = \mu - 2\mu x$$

$$\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x^2} = -2\mu$$

$$\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x \partial \mu} = 1 - 2x$$

$$\frac{\partial^3 F_\mu}{\partial x^3} = 0$$

Ensuite trouvons les points fixes. On résout: $F_\mu(x) = x \Leftrightarrow x(\mu - 1 - \mu x) = 0$ Donc $x_{eq} = 0$ est point fixe et $x_{eq} = \frac{\mu - 1}{\mu}$ aussi.

Cas $x_{eq} = 0$. C'est un point fixe de multiplicateur $\frac{\partial F_\mu}{\partial x}(x_{eq}) = \mu$. La stabilité est donc donnée par: $|\mu| < 1$. Les bifurcations possibles ont donc lieu en 1 et -1.

- En $\mu = -1$. On calcule la condition de transversalité sachant qu'on cherche une bifurcation clapet (car le multiplicateur est $\mu = -1$): $\frac{\partial^2 F_{-1}}{\partial x \partial \mu} = \mu = 1 \neq 0$. Par ailleurs

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_{\mu}}{\partial x^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^3 F_{\mu}}{\partial x^3} = \frac{1}{2} \neq 0$$

. Donc on a bien affaire à une bifurcation clapet.

- En $\mu = 1$, on suspecte une bifurcation pli. Or $\frac{\partial F_1}{\partial \mu} = 0$. La condition de transversalité n'est pas vérifiée. On a donc affaire à une bifurcation transcritique, où a lieu un phénomène d'échange de stabilité.

Cas $x_{eq} = \frac{\mu-1}{\mu}$. C'est un point fixe de multiplicateur $\frac{\partial F_{\mu}}{\partial x}(x_{eq}) = 2 - \mu$. le système est donc stable si $\mu \in]1, 3[$. Les bifurcations possibles ont donc lieu en 1 et 3.

- Si $\mu = 1$ alors $\frac{\mu-1}{\mu} = 0$ et le cas a déjà été traité plus haut.
- En $\mu = 3$, $\frac{\mu-1}{\mu} = 2/3$. Le multiplicateur vaut -1, on suspecte une bifurcation clapet. La condition de transversalité est vérifiée: $\frac{\partial^2 F_{-1}}{\partial x \partial \mu} = -\frac{1}{3} \neq 0$. Par ailleurs

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_{\mu}}{\partial x^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^3 F_{\mu}}{\partial x^3} = -3 \neq 0$$

. Donc on a bien affaire à une bifurcation clapet.

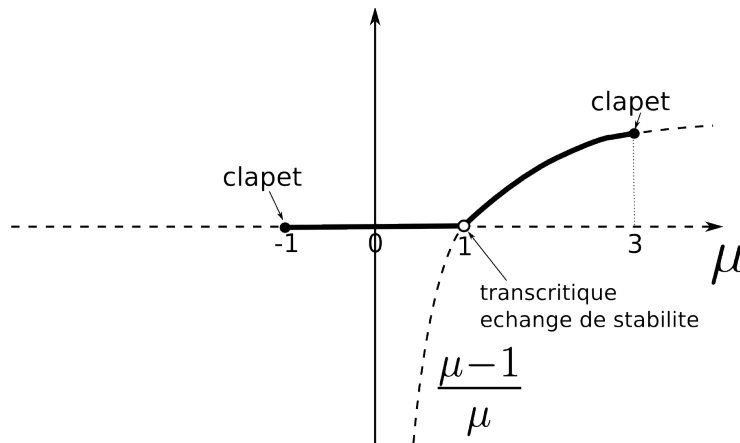


Figure 3: Diagramme de bifurcation exercice 2.2

2. $F_{\mu}(x) = x^2 + \mu$

Points d'équilibres:

- $\mu < \frac{1}{4} \Rightarrow 2$ points fixes: $\frac{1 \pm \sqrt{1-4\mu}}{2}$.
- $\mu = \frac{1}{4} \Rightarrow 1$ point fixe: $\frac{1}{2}$.
- $\mu > \frac{1}{4} \Rightarrow 0$ points fixes.

Stabilité:

$$\frac{\partial F_{\mu}}{\partial x}(x) = 2x$$

Donc $\frac{1+\sqrt{1-4\mu}}{2}$ est instable et $\frac{1-\sqrt{1-4\mu}}{2}$ est stable pour $-3/4 < \mu < 1/4$. Nous nous intéressons donc à $\mu = 1/4$ et $\mu = -3/4$.

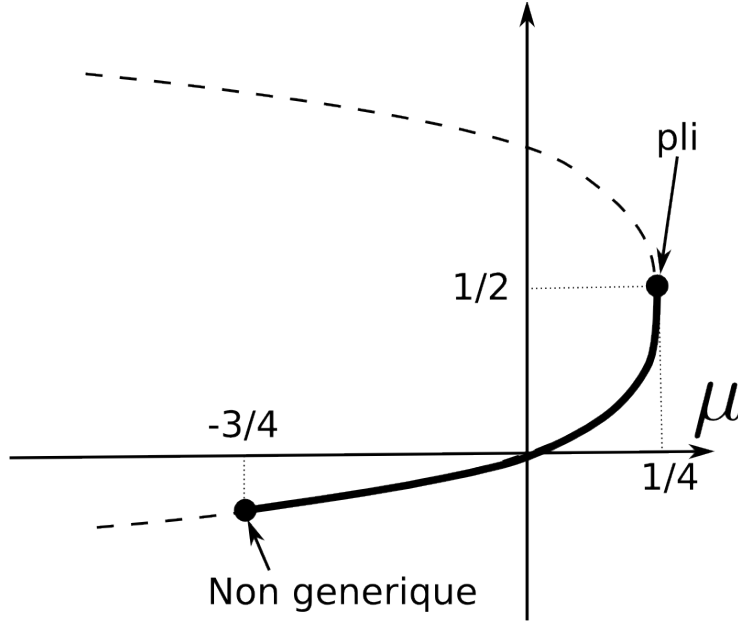


Figure 4: Diagramme de bifurcation de l'exo 2.2

- En $\mu = 1/4$, le multiplicateur est $\frac{\partial F_\mu}{\partial x}(x) = 1$. On suspecte donc une bifurcation pli. On vérifie donc que la condition de transversalité est Ok: $\frac{\partial F_\mu}{\partial \mu} = 1 \neq 0$. Puis que la condition de non dégénérescence l'est aussi: $\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x^2} = 2 \neq 0$. C'est donc une bifurcation pli.
- En $\mu = -3/4$, le multiplicateur est -1 . Mais la condition de transversalité n'est pas vérifiée: $\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x \partial \mu} = 0$. Ce n'est donc pas un clapet.

3. $F_\mu(x, y) = (y, -\frac{1}{2}x + \mu y - y^3)$

Points fixes: ils vérifient

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -\frac{x}{2} + \mu y + y^3 \end{pmatrix}$$

Donc

- $\mu \leq 3/2 \Rightarrow$ 1 seul point fixe $x = y = 0$.
- $\mu > 3/2 \Rightarrow$ 3 points fixes $\begin{cases} x = y = 0 \\ x = y = \frac{\sqrt{4\mu-6}}{2} \\ x = y = -\frac{\sqrt{4\mu-6}}{2} \end{cases}$

La jacobienne de F_μ s'écrit:

$$J(\mu, x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/2 & \mu - 3y^2 \end{pmatrix}$$

- Stabilité de zéro: $J(\mu, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/2 & \mu \end{pmatrix}$. Ses valeurs propres sont $\frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 2}}{2}$ (la racine est au sens complexe).

$$\text{si } |\mu| \leq \sqrt{2}, |\lambda_\pm|^2 = 1/2$$

$$\text{si } |\mu| > \sqrt{2}, \left| \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - 2}}{2} \right| < 1 \Rightarrow \mu < 3/2$$

$$\text{si } |\mu| > \sqrt{2}, \left| \frac{\mu - \sqrt{\mu^2 - 2}}{2} \right| < 1 \Rightarrow \mu > -3/2$$

Donc zéro est stable pour $\mu \in]-3/2, 3/2[$ et est instable sinon.

- Stabilité des solutions $\pm \frac{\sqrt{4\mu-6}}{2}$.

La jacobienne est identique dans les 2 cas et vaut $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/2 & -2\mu + 9/2 \end{pmatrix}$.

Ses valeurs propres s'écrivent:

$$\lambda_{\pm} = -\mu + \frac{9}{4} \pm \sqrt{16\mu^2 - 72\mu + 73}$$

On vérifie que pour $\mu \in]3/2, 3[$ les valeurs propres sont de module inférieur à 1 donc le système est stable et sinon is est instable.

C'est ce qu'on appelle une bifurcation fourche (devinez pourquoi...)

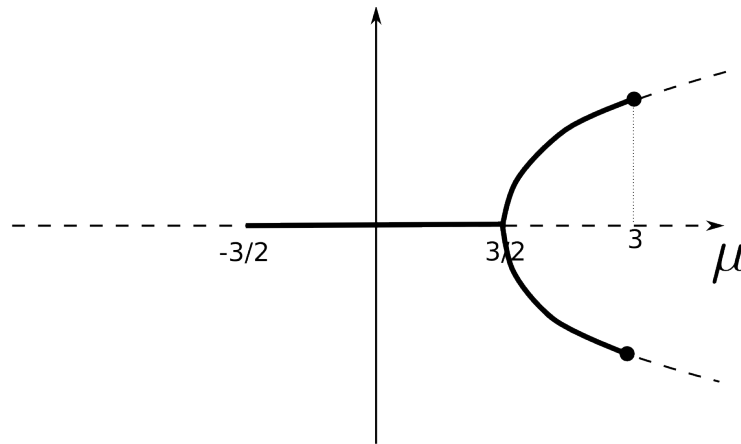


Figure 5: Diagramme de bifurcation de l'exo 2.3. C'est ce qu'on appelle une bifurcation fourche.

4. Voir correction de l'examen de 2008.

Exercice 3 : Equation de Ricker - étude du clapet - route vers le chaos

On note $F_{\alpha}(x) = \alpha x e^{-x}$ où $\alpha > 0$ et $x > 0$. On précalcule:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \alpha(e^{-x} - x e^{-x})$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \alpha(-2e^{-x} + x e^{-x})$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} = \alpha(3e^{-x} - x e^{-x})$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \alpha} = e^{-x} - x e^{-x}$$

1. Points fixes:

- $x = 0, \forall \alpha$

- $x = \log(\alpha)$, $\forall \alpha > 0$. On ne considère que des suite telles que $x > 0$ donc ce point fixe n'existe que pour $\alpha > 1$.

Stabilité:

- $x = 0$: $\frac{\partial F}{\partial x}(x = 0) = \alpha$ donc il y a changement de stabilité pour $\alpha = 1$.
- $x = \log(\alpha)$: $\frac{\partial F}{\partial x}(x = \log(\alpha)) = 1 - \log(\alpha)$ donc il y a changement de stabilité pour $\alpha = e^2$.

2. $\alpha = e^2$, $x = 2$, on a: $\frac{\partial F}{\partial \alpha} = -1$.

- $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} = \frac{1}{3} \neq 0$
- $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \alpha} = -e^{-2} \neq 0$

On a donc une bifurcation clapet.

3. On considère la forme normale d'une bifurcation clapet ou point $\alpha = e^2$ et on la compose avec elle même. On tombe sur la forme normale de la bifurcation fourche.
4. On voit sur la figure 5 qui représente une bifurcation fourche qu'il y a des points fixes stables pour l'itération double. C'est donc la preuve qu'il y a des oscillations de période 2.

En fait si on continue cette étude (numériquement car les outils mathématiques manquent) à chaque point de bifurcation on voit toujours apparaitre des fourches. Pour un α fini on arrive a des cycles de période infinie: le chaos. Ceci s'appelle une route vers le chaos par doublement de période.

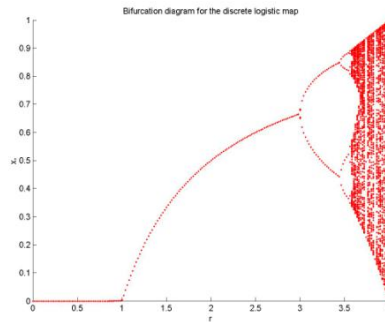


Figure 6: Route vers le chaos de l'équation logistique. exo 3