# Méthodes Mathématiques pour les neurosciences
# TD 3

Mathieu Galtier Olivier Faugeras

28 octobre 2009

*Les informations (slides, td...) sont disponibles sur le site http://www-sop.inria.fr/members/Olivier.Faugeras/MVA/MMN09*

**Exercice 1 : Bifurcation pli dans un modele d'ecologie - ou de climat**

1. *Modèle d'écologie.* On considère le systeme dynamique en temps continu:

$$\dot{x} = rx(1 - \frac{x}{K}) - \alpha$$

   ou $r$ et $K$ sont des constantes strictement positives du modele et $\alpha$ le paramètre de bifurcation. C'est un modèle de croissance logistique d'une espèce combiné à une récolte systématique (paramètre $\alpha$). Montrer que ce systeme a une bifurcation pli pour une certaine valeur du parametre $\alpha$ à determiner. Tracer le diagramme de bifurcation. En déduire qu'une récolte excessive peut être catastrophique (au sens mathématique du terme).

2. *Modèle de climat.* On considère le système:

$$\begin{cases} \frac{d\Delta S}{dt} = 2F - 2|q|\Delta S \\ q = k\alpha\Delta T - \beta\Delta S \end{cases}$$

   où $k$, $\alpha$, $\beta$, $\Delta T$ sont des constantes positives et $F$ le paramètre de bifurcation. Voir l'explication en cours pour comprendre le modèle de climat. Montrer dans un premier temps que ce modèle est équivalent au précédent quand $q > 0$. Et completer le diagramme de bifurcation quand $q < 0$. Que doit on en déduire sur la crise climatique?

**Exercice 2 : Bifurcations dans des systemes dynamiques discrets** Le but de cet exercice est de caracteriser les bifurcations d'équilibres dans les systemes dynamiques discrets de type:

$$X_{n+1} = F_\mu(X_n)$$

. Pour les familles de fonctions suivantes:

1. $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$
2. $F_\mu(x) = x^2 + \mu$
3. $F_\mu(x, y) = (y, -\frac{1}{2}x + \mu y - y^3)$
4. Ici on considère le système discret: $u_{k+1} = \alpha u_k(1 - u_{k-1})$. Montrer que ce système admet une bifurcation de Neimark-Sacker pour $\alpha = 2$.

**Exercice 3 : Equation de Ricker - étude du clapet - route vers le chaos** On considere le systeme dynamique $x_{n+1} = F_\alpha(x_n)$ avec $F_\alpha(x) = \alpha x e^{-x}$. On considere uniquement des suites telles que $x_n \geq 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

1. Trouver les points fixes du systeme dynamique et leur stabilite.
2. Montrer que le systeme admet une bifurcation "clapet" en $\alpha = e^2$.
3. Montrer qu'un clapet (pour le système $x_{n+1} = f_\alpha(x_n)$) correspond à une fourche pour le système $x_{n+1} = f_\alpha^2(x_n)$.

   *Note:* Les systèmes de la forme: $x \to -(1+\alpha)x + x^3 + O(x^5)$ admettent une bifurcation fourche en 0.
4. Conclure sur l'existence d'un cycle limite de période 2 pour certains $\alpha$.