Méthodes mathématiques pour les neurosciences — 21 Octobre 2009

Grégory Faye / Olivier Faugeras — MVA

TD 2

Exercice 1. Classification des équilibres en dimension 2

Le but de cet exercice est de caractériser la stabilité des équilibres et le comportement des solutions d'un système dynamique linéaire en dimension 2:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1}$$

en fonction de la trace et du déterminant de la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On suppose que M est inversible.

1) Déterminer l'expression du polynôme caractéristique de la matrice M:

$$p(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{Id} - M)$$

en fonction de la trace τ et du déterminant δ de M.

2) Trouver les racines de ce polynôme dans $\mathbb{C}$.

3) Trouver le ou les points fixes du système dynamique (1).

4) Valeurs propres réelles:

a. Trouver une condition en fonction de τ et δ pour que les valeurs propres soient réelles.

b. Dans ce cas, trouver une condition en fonction de δ pour que l'équilibre soit un noeud-col.

c. Trouver une condition sur τ et δ pour que l'équilibre soit attractif (puit).

d. Trouver une condition sur τ et δ pour que l'équilibre soit répulsif (source).

5) Valeurs propres complexes:

a. Trouver une condition en fonction de τ uniquement pour que l'équilibre soit attractif (foyer stable).

b. Trouver une condition en fonction de τ uniquement pour que l'équilibre soit répulsif (foyer instable).

6) Tracer sur un diagramme (τ, δ) la stabilité du point fixe et les différents comportements autour du point fixe.

Exercice 2. Champ de vecteurs rentrant

On se place sur $\mathbb{R}^n$ et on considère un ouvert F de $\mathbb{R}^n$ défini par $F = \{x | f(x) \leq 0\}$ où f est une fonction C^1 de $\mathbb{R}^n$.

Soit $X(t, x)$ un champ de vecteurs défini pour $t \in \mathbb{R}^n$ et pour tout x dans un voisinage de F. On suppose que $Df(x).X(t, x) < 0$ pour tout $x \in f^{-1}(0)$ le bord de F (dans ce cas le champ de vecteurs est dit rentrant).

Montrer que les solutions de l'équation $\dot{x} = X(t, x)$ qui sont dans F en $t = t_0$ restent dans F pour tout temps dans l'intervalle de définition supérieur à t_0.

Exercice 3. Spikes dans le modèle de Fitzhugh-Nagumo

On considère le modèle de Fitzhugh-Nagumo d'un seul neurone:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{u} = u(u-\alpha)(1-u) - w + I \\ \dot{w} = \epsilon(u - \gamma w) \end{array} \right. \tag{2}$$

avec $(\alpha, I) \in \mathbb{R}^2$, $\epsilon > 0$ et $\gamma > 0$.
1) Tracer le portrait de phase de ce système dynamique, pour différents I, et montrer graphiquement qu'il peut exister un, deux ou trois points fixes, dans le cas $\alpha < 0$ (on distinguera le cas $-\alpha < \frac{1}{\gamma}$ ou $-\alpha > \frac{1}{\gamma}$).
2) Pour $I = 0$, étudier en fonction de α la stabilité du point fixe $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer que ce point fixe peut être stable et instable en fonction de α. Tracer dans un digramme (α, γ) les zones où ce point fixe est stable ou instable.
3) Dans le cas ou le point fixe est instable, montrer qu'il existe une orbite périodique en utilisant le théorème de Poincaré-Bendixon:

Théorème 1. *Soit $x(t)$ une solution d'un champ de vecteurs X du plan. Si $x(t)$ reste bornée lorsque $t \to \infty$, alors l'adhérence de $x(t)$ contient soit un point singulier de X soit une orbite périodique. Dans ce dernier cas, si $x(t)$ n'est pas elle même périodique, on dit que l'orbite périodique est un cycle limite.*

a. Soit $\begin{pmatrix} u_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$ une condition initiale pour l'équation de neurone de Fitzhugh-Nagumo avec $I = 0$. Trouver un ensemble compact du plan de pahse dans lequel le champ de vecteur est rentrant.
b. En utilisant le résultat de l'exercice précédent, montrer que toute solution ayant sa condition initiale dans ce compact reste indéfiniment dans ce compact.
c. Montrer qu'il existe un cycle limite dans ce compact. Ce cycle limite correspond aux spikes émis par le modèle de Fitzhugh-Nagumo.

Exercice 4. Application de Poincaré
1) Considère le système dynamique dans le plan:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + y - y(x^2 + y^2) \end{cases} \tag{3}$$

et la section $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0, y = 0\}$. a. Ecrire le système dynamique en coordonnées polaires $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$ et montrer que:

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases} \tag{4}$$

Ecrire de même l'équation de Σ dans ces nouvelles coordonnées.
b. Intégrer ce système en utilisant qu'une primitive de $\frac{x}{x(1-x^2)}$ est $\frac{1}{2}\ln(\frac{x^2}{x^2-1})$. En déduire que le flot s'écrit:

$$\phi^t(r_0, t_0) = \left(\left(1 + (\frac{1}{r_0^2} - 1)e^{-2t}\right)^{-\frac{1}{2}}, t + \theta_0 \right) \tag{5}$$

c. Trouver le temps de premier retour sur Σ et en déduire que l'application de Poincaré s'écrit:

$$P(r_0) = \left(1 + (\frac{1}{r_0^2} - 1)e^{4\pi}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{6}$$

d. Trouver les points fixes de P et leur stabilité. En déduire l'existence d'une orbite périodique.
2) Faire la même analyse avec le système tridimensionnel suivant en rajoutant la composante z telle que: $\dot{z} = \mu z$ puis $\dot{z} = \mu - z^2$. Suivant le signe de μ discuter de la stabilité de l'orbite périodique.