Méthodes Mathématiques pour les neurosciences
Correction du TD 1

Mathieu Galtier Olivier Faugeras

October 26, 2009

Veuillez reporter toute erreur en envoyant un mail à mathieu.galtier@sophia.inria.fr

Exercice 1 : Question d'unicité

- Il est clair que 0 est solution.
- On cherche une autre solution. Utilisons la methode de separation des variables:

$$\frac{dh}{dt} = -A\sqrt{h(t)}$$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{dh}{\sqrt{h}} = -A\int_{t_0}^{t} ds$$

$$h(t) = \left(\frac{A}{2}(t_0 - t) + \sqrt{h(t_0)}\right)^2$$

  On verifie par la suite que cette fonction convient si $h(t_0) = 0$.

Il n'y a pas unicité car la fonction racine n'est pas Lipschitzienne proche de 0. Si le reservoir est vide on ne peut pas savoir quand il s'est vidé.

Exercice 2 : Integrateur parfait

1. Le nombre d'impulsions est $n(t) = U(t) - V(t)$.
2. Etant donné que $U(t)$ vérifie l'EDO de second membre $I(t)$ alors il a la forme:

$$U(t) = V_0 + \int_0^t I(s)ds$$

   ce qui implique que $U(t) \sim_{+\infty} t < I >$.

   Si $< I >> 0$, $n(t)$ explose car V est majoré.

   Si $< I >< 0$. On écarte dans un premier temps la possibilité d'une émission d'un nombre infini de spike en temps fini. Pour ce faire on ajoute la condition que I doit etre intégrable sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}$. On montre dans un deuxième temps que le le neurone devient silencieux au bout d'un moment: En effet $U(t)$ est negatif pour t suffisament à cause de la relation d'equivalence ci dessus. Donc $V(t) \sim_{+\infty} U(t)$ et donc V tend vers $-\infty$, le neurone ne peut donc emmetre une infinité de spikes.

   Quand $< I >= 0$, on ne peut rien dire. En effet, $I = 0$ ne mène a l'èmission d'aucun spike alors que $I(t) = A(t)sin(t)$, avec A une fonction constante par morceaux (sur les $[k\pi, (k+2)\pi[$) croissant suffisemment vite peut amener à une émission d'un nombre infini de spikes.

3. La frequence de dćharge moyenne sur l'intervalle $[0, t[$ est $f(t) = n(t)/t$. On se place a un t suffisament grand pour que le crochet $[]^+$ soit inutile:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{U(t)}{t} - \underbrace{\lim_{t\to+\infty} \left(\frac{V(t)}{t} - \frac{1}{t}\right)}_{=0} \leq \lim_{t\to+\infty} \frac{n(t)}{t} \leq \lim_{t\to+\infty} \frac{U(t)}{t} - \underbrace{\lim_{t\to+\infty} \frac{V(t)}{t}}_{=0}$$

Therefore, $\lim_{t\to+\infty} f(t) =< I >$

Exercice 3 : Integration Synaptique À $t = T$ un premier spike arrive. Donc $V(T^+) = a$. Jusqu'à $2T$, on a donc

$$V(t) = V(T^+) \exp(-t/\tau)$$

Et $V(2T^-) = V(T^+) \exp(-\frac{2T-T}{\tau})$. Et Donc $V(2T^+) = V(T^+) \exp(-T\tau) + a$. Par récurrence on montre facilement que

$$V(kT^+) = a \sum_{i=0}^{k} \exp(-T/\tau)^i$$

En faisant tendre k vers l'infini et en utlisant la formule qui donne la somme d'une suite géomtrique, on trouve que le neurone spike donc si

$$\frac{a}{1 - \exp(-T/\tau)} > \theta$$

Pour trouver le temps du premier spike on cherche $k \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{a}{1 - \exp(-T/\tau)} - \theta = a \sum_{i=k}^{+\infty} \exp(-T/\tau)^i$$

$$\frac{a}{1 - \exp(-T/\tau)} - \theta = a \exp(-kT/\tau) \frac{1}{1 - \exp(-T/\tau)}$$

$$k = \frac{\tau}{T} ln\Big(\frac{a}{a - \theta + \theta \exp(-T/\tau)}\Big)$$

Cependant, le temps du spike doit correspondre avec un numéro de spike (étant donné le système décroissant en l'absence de spike). La solution est donc: $E(k+1)$, oú E est la partie entière.

Exercice 4 : Frequence de decharge d'integres-et-tirent

1. Le point d'equilibre du neurone vérifie: $V = E_L + RI$. Donc le neurone spike si $E_L + RI > \theta$. De plus, on montre facilement que:

$$V(t) = E_l + RI + (V_0 - E_L - RI) \exp(-\frac{t}{\tau})$$

Pour trouver la fréquence de décharge d'un tel neurone on se place a l'instante d'émission d'un spike t_s. Donc $V(t_s^+) = V_r$. La période démission T est donnée par léquation:

$$V(T) = \theta \Leftrightarrow \frac{\theta - E_L - RI}{V_r - E_L - RI} = \exp(-\frac{T}{\tau})$$

Donc la fréquence de décharge est:

$$f_{decharge} = \frac{1}{\tau \ln\left(\frac{E_l + RI - V_r}{E_L + RI - \theta}\right)}$$

2. On commence par introduire $\tilde{V} = V - \frac{E_L+V_T}{2}$. L'équation différentielle sur $\tilde{V}$ sera:
$$\tau \frac{d\tilde{V}}{dt} = \tilde{V}^2 + \tilde{I}$$
oú $\tilde{I} = I - \frac{(E_L-V_T)^2}{4}$.
On utilise la méthode de séparation des variables:
$$\frac{d\tilde{V}}{\tilde{V}^2 + \tilde{I}} = \frac{dt}{\tau}$$
   - Si $\tilde{I} > 0$:
$$\left[\arctan(\frac{U}{\sqrt{\tilde{I}}})\right]_{\tilde{V_0}}^{\tilde{V}} = \frac{t}{\tau}\sqrt{\tilde{I}}$$
$$\tilde{V}(t) = \tan\left(\frac{\sqrt{\tilde{I}}t}{\tau} + \arctan\frac{\tilde{V}_0}{\sqrt{\tilde{I}}}\right)\sqrt{\tilde{I}}$$
on considère que $\tilde{V}_0 = -\infty$. $\tilde{V}$ explose quand $\frac{\sqrt{\tilde{I}}t}{\tau} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ Donc la fréquence de décharge est:
$$f_{decharge} = \frac{\sqrt{\tilde{I}}}{\tau\pi}$$
   - Si $\tilde{I} < 0$:
$$\tilde{V}(t) = -th\left(\frac{\sqrt{-\tilde{I}}t}{\tau} + arcth\frac{\tilde{V}_0}{\sqrt{-\tilde{I}}}\right)\sqrt{-\tilde{I}}$$
pas d'émission de spike.

Exercice 5 : Le neurone θ On note $\dot{\theta} = f(\theta, I)$ le système.

1. - *Recherche des points d'equilibre.* On résoud $f(\theta, I) = 0$. Si $I < 0$ alors $|\frac{1+I}{1-I}| < 1$, auquel cas il existe 2 points d'equilibres:
$$\theta\pm = \pm\arccos\left(\frac{1+I}{1-I}\right)$$
   - *Stabilité des points d'equilibre.* On cherche le signe de la partie réelle des valeurs propres de f aux points d'equilibres. Ici le système est unidimensionel: on a juste besoin du signe de la derivée de f par rapport à θ aux points d'equilibres:
$$\frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta\pm, I) = \sin(\theta\pm)(1-I) = \pm(1-I)\sqrt{1 - cos^2(\theta\pm)} = \pm 2\sqrt{-I}$$
Donc $\theta+$ est instable et $\theta-$ est stable.

2. Pour $I > 0$: $|\frac{1+I}{1-I}| > 1$, or un point d'equilibre doit verifier $cos\theta = \frac{1+I}{1-I}$, ce qui est impossible. Donc il n'y a pas de points d'equilibre. Donc $f(\theta, I)$ est de signe fixe, positif strictement. PLus précisément $f(\theta, I) \geq f_{min}(I) > 0$. La vitesse de rotataion ne tend donc pas vers 0 et le neurone emet des spikes a répétition.

   Calcul de θ. On intègre le système en séparant les variables:
$$t_1 - t_0 = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{d\theta}{(1-I)\cos\theta + 1 + I} = \frac{1}{1+I}\int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{d\theta}{1 + \underbrace{\frac{1-I}{1+I}}_{\beta}\cos\theta}$$

on fait le changement de variable $x = \tan\frac{\theta}{2}$ qui nous permet d'utiliser la formule de l'arc moitié: $\cos\theta = \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$

$$t_1 - t_0 = \frac{1}{1+I}\int_{\tan\frac{\theta_0}{2}}^{\tan\frac{\theta_1}{2}} \frac{1}{1+\beta\frac{1-x^2}{1+x^2}}\frac{2dx}{1+x^2}$$

$$= \frac{2}{1+I}\int_{\tan\frac{\theta_0}{2}}^{\tan\frac{\theta_1}{2}} \frac{dx}{1+\beta+x^2(1-\beta)}$$

On note que $\frac{1-\beta}{1+\beta} = I$ et que $\frac{2}{(1+I)(1+\beta)} = 1$. Ce qui mène à:

$$= \int_{\tan\frac{\theta_0}{2}}^{\tan\frac{\theta_1}{2}} \frac{dx}{1+(\sqrt{I}x)^2}$$

on fait le changement de variable $y = \sqrt{I}x$ qui mène à:

$$t_1 - t_2 = \left[\frac{\arctan(\sqrt{I}x)}{\sqrt{I}}\right]_{\tan\frac{\theta_0}{2}}^{\tan\frac{\theta_1}{2}}$$

Et donc:

$$\theta(t) = 2\arctan\left(\frac{\tan\Big(\sqrt{I}(t-t_0) + \arctan(\sqrt{I}\tan\frac{\theta_0}{2})\Big)}{\sqrt{I}}\right)$$

3. Si $I = 0$, le système a un point fixe pour $\theta = 0$. Si $\theta \neq 0$ alors $f(\theta, 0) > 0$. Donc si $\theta < \pi$ il y a émission d'un spike (et un seul). et si $\theta_0 > \pi$ pas d'émission de spike. Quoi qu'il arrive on se stabilise sur le point $\theta = 0$. On dit que *theta* est un point stationaire d'une orbite homocline.

Exercice 6 : Equations linéaires

1. *Cas commutatif.* Si A est constant, la solution est $x(t) = \exp\Big(-A(t-t_0)\Big)x_0$. Ceci nous pousse a introduire, pour le cas A non-constant, la solution
$$x(t) = \exp(\int_{t_0}^{t_1} A(s)ds)x_0$$
qui est bien définie sur I (d'après le théoreme de Volterra).

2. *Calcul du determinant du flot.*

   - Montrons dans un premier temps que le flot est linéaire. Pour ce faire il suffita de voir (par le calcul) que $\psi(t) = \phi_{t_0}^{t_1}(x_0) + \phi_{t_0}^{t_1}(y_0)$ est solution de l'equation (1) pour la condition initiale $x_0 + y_0$. Donc par unicite (Cauchy-Lipschitz) $\psi(t) = \phi_{t_0}^{t_1}(x_0 + y_0)$. Donc le flot est lineaire et on peut l'ecrire comme une fonction matricielle.
   - Nous souhaitons utiliser la question précédente. Nous montrons donc maintenant que le determinant du flot est solution d'une équation différentielle (bien choisie). Comme $\phi_{t_0}^{t}$ est lineaire on peut nomme ses colonnes $X_i(t), \imath \in \{1..n\}$.
$$det\phi_{t_0}^{t} = det\Big(X_1, .., X_n\Big)$$

Maintenant on calcule $\frac{d}{dt}det\phi_{t_0}^t$:

$$\frac{d}{dt}det\phi_{t_0}^t = \sum_{i=1}^{n} det(X_1, .., \dot{X}_i, .., X_n) = \sum_{i=1}^{n} det(X_1, .., AX_i, .., X_n)$$

$(X_1, .., X_n) \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} det(X_1, .., AX_i, .., X_n)$ est une forme n-linéaire alternée. Cet espace est de dimension 1. Et donc cette fonction est proportionelle au determinant.

- Trouvons la valeur du coefficient de proportionalité. Pour ce faire il suffit de changer de base et de se placer dans la base canonique. Ce coefficient de proportionalité est donc $tr(A)$.
- On a donc l'equation differentielle:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}det\phi_{t_0}^t & = trA(t)det\phi_{t_0}^t \\ det\phi_{t_0}^{t_0} & = 1 \end{cases}$$

L'application de la première question mène au résultat.

3. *Ajout d'un terme de forcage.* On utilise la méthode de variation de la constante pour montrer que $x(t) = \phi_{t_0}^t x_0 + \int_{t_0}^t \phi_s^{t_0} b(s)ds$. En effet, une condition necessaire pour une fonction du type $h(t) = \lambda(t)\phi_{t_0}^t(x_0)$ de résoudre (2) est que $\lambda'(t) = \phi_t^{t_0} b(t)$. Le résultat suit.

4. *Cas non-commutatif.* A faire...