Méthodes Mathématiques pour les neurosciences
TD 1

Mathieu Galtier Olivier Faugeras

October 26, 2009

Exercice 1 : Question d'unicité

On peut montrer, en utilisant le principe de Bernouilli, que la hauteur d'eau d'un réservoir dont le fond est percé d'un orifice, vérifie une équation du type

$$\dot{h}(t) = -A\sqrt{h(t)}$$

oú A est une constante positive dépendant des paramètres physiques du problème. Montrer qu'une telle équation a plusieurs solutions sous la condition initiale $h(t_0) = 0$. Connaissant l'état du réservoir l'instant t_0, peut-on en déduire son état à n'importe quel instant ?

Exercice 2 : Integrateur parfait L'integre-et-tire habituel, dit aussi integrateur a fuite, satisfait l'equation differentielle:

$$C\frac{dV}{dt} = -g_L V + I(t)$$

ou g_L est la conductance de fuite, C la capacite membranaire et I le courant injecte. L'integrateur parfait correspond au cas limite $g_L = 0$.

Sans perte de generalite, on etudie le systeme integrateur parfait adimensionne de seuil 1 et de valeur de reinitialisation 0, et avec condition initiale en $t = 0$:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} & = I(t) \\ V(0) & = V_0 \in [0, 1) \\ V(t^-) & = 1 \Rightarrow V(t) = 0 \end{cases}$$

On suppose que le courant d'entree est une fonction bornee du temps admettant une valeur moyenne.

Note: On definit la moyenne temporelle d'une fonction par la limite, si elle existe:

$$\langle f \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, dt$$

1. On note $V(t)$ le potentiel de membrane de ce neurone, et $U(t)$ la solution de :

$$\begin{cases} \frac{dU(t)}{dt} = I(t) \\ U(0) = V_0 \end{cases}$$

   Calculer en fonction de $U(t)$ et $V(t)$ que le nombre d'impulsions emises dans l'intervalle $[0, t]$.

2. Montrer que le modele n'emet qu'un nombre fini d'impulsions si $\langle I \rangle < 0$ et une infinite d'impulsions si $\langle I \rangle > 0$. Que peut-on dire si $\langle I \rangle = 0$?

3. Quand $< I >> 0$, montrer que la frequence de decharge du neurone vaut $\langle I \rangle$.

Exercice 3 : Integration Synaptique On considere un neurone integre et tire a fuite, qui recoit a un spike tous les intervalles de temps T, qui le depolarise instantanement d'une valeur constante $a > 0$ (i.e. $V(t) = V(t^-) + a$ en un temps t ou un spike arrive). La dynamique du neurone est donc

$$\tau \frac{dV}{dt} = -V$$

et il emet un spike des qu'il atteint le seuil θ. On suppose qu'a l'instant $t = 0$ le potentiel de membrane est a sa valeur de repos $V(0) = 0$ et que le premier spike arrive au temps T.

Trouver une condition sur a et T pour que le neurone spike. Dans le cas ou le neurone emet une impulsion, trouver le temps du premier spike.

Exercice 4 : Frequence de decharge d'integres-et-tirent

1. On considere un neurone integre-et-tire simplissime:

$$\tau \frac{dV}{dt} = E_L - V + RI$$

avec seuil θ et reinitialisation V_r. Trouver la condition pour laquelle le neurone spike. Calculer dans ce cas la frequence de decharge (i.e. le nombre de spike par unite de temps) du neurone en fonction de I.

2. On considere l'integre-et-tire quadratique

$$\tau \frac{dV}{dt} = (V - V_T)(V - E_L) + I.$$

Il n'y a pas de seuil dans ce modele, et on considere qu'un spike est emis quand le potentiel de membrane atteint $+\infty$ quand le systeme explose en temps fini. Le système est alors reinitialise a $-\infty$ (ou une constante v_r). Donner une condition pour que ce neurone spike. Sous cette condition, calculer la fréquence de décharge. [On donne: $\int_0^t \frac{dx}{x^2+1} = Arctan(t)$ et $\int_0^t \frac{dx}{x^2-1} = Argth(t)$]

Exercice 5 : Le neurone θ Le neurone theta est un modèle abstrait de la génération du potentiel d'action. Le potentiel est représenté par la variable $\theta \in \mathcal{S}^1$ ($\mathcal{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est le cercle, i.e., $[0, 2\pi]$ où 0 et 2π sont identifiés) et suit l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d\theta}{dt} = 1 - \cos\theta + (1 + \cos\theta)I$$

où I est le courant injecté. On considère que le neurone émet un potentiel d'action lorsque θ passe le point π.

1. Montrer que pour $I < 0$, il existe deux points d'équilibre pour le système, dont un est stable est l'autre instable.

2. Pour $I > 0$, montrer qu'il n'y a pas de point d'équilibre. En déduire que les trajectoires sont périodiques et que le neurone émet des potentiels d'action régulièrement espacés. Calculer la fréquence d'émission des spikes. Pour cela, on prouvera que dans ce cas, la solution s'écrit:

$$\theta(t) = 2\arctan\left(\tan(\sqrt{I}t + \alpha\sqrt{I})/\sqrt{I}\right)$$

où α est une constante d'intégration donnée par la condition initiale.

3. Que se passe-t-il pour $I = 0$?

Note: Ceci est un premier exemple de ce qu'on appelle une *bifurcation.* Il s'agit ici d'un changement dans la *nature* et le *nombre* de points d'équilibres. Cette bifurcation s'appelle une *saddle-node bifurcation on limit cycle* (nœud-col sur un cycle limite), et a été introduite par Ermentrout et Kopell (1986)

Exercice 6 : Equations linéaires

Considérons l'équation différentielle dans $\mathbb{R}^n$.

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) & = A(t)x(t) \\ x(t_0) & = x_0 \end{cases}$$

où $A \in C^0(I, M_n(\mathbb{R}))$, b est continue sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et $t_0 \in I$.

1. *Cas commutatif.* Trouver la solution de (1) quand $A(t)$ commute avec $A(s)$.

2. *Calcul du determinant du flot.* Le flot est $\Phi_{t_0}^{t_1} : \; x(t_0) \mapsto x(t_1)$. Prouver que

$$det\Phi_{t_0}^{t_1} = exp\left(\int_{t_0}^{t_1} trA(s)ds\right)$$

   Aide: se servir de la question precedente. L'espace des forme n-lineaires alternées est de dimension 1.

3. *Ajout d'un terme de forcage.* On considère, pour cette question, l'équation

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) & = A(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) & = x_0 \end{cases}$$

   Exprimer la solution de (2) en fonction du flot su système autonome (1).

4. *Cas non-commutatif.* Pour le système (1) montrer que la solution s'écrit :

$$x(t) = \mathcal{P} \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(s)ds\right) x_0$$

   où

$$\mathcal{P}\left[A(t)A(s)\right] = \begin{cases} A(t)A(s) \text{ si } t > s \\ A(s)A(t) \text{ si } t < s \end{cases}$$

   On prouvera que le membre de droite et bien définit. En déduire l'intervalle de définition des solutions.