TD7: Équations Différentielles Stochastiques

Romain Veltz   Olivier Faugeras

November 26, 2008

Vous pouvez me poser vos questions par mail: romain.veltz@sophia.inria.fr

Exercice 1 : Resolution d'EDS non-linéaires Resoudre les EDS suivantes (en expliquant pourquoi il existe une unique solution):

1. On s'intéresse à l'EDS non-linéaire:

$$\begin{cases} dX_t & = \sqrt{1+X_t^2}\, dW_t + \left(\sqrt{1+X_t^2} + \frac{X_t}{2}\right) dt \\ X_0 & = x \end{cases}$$

   (a) Ecrire l'EDS que vérifie le processus $X_t = sh(W_t + t)$ où sh est le sinus hyperbolique $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. On rappelle que $sh' = ch$, $ch' = sh$ et $ch = \sqrt{1+sh^2}$.

   (b) En déduire la solution de l'EDS que l'on cherche.

2. Trouver la solution de l'EDS:

$$\begin{cases} dX_t = X_t^6\, dt + \frac{1}{6}(X_t)^2 dW_t \\ X_0 = 0 \end{cases}$$

3. On considere l'EDS:

$$\begin{cases} dX_t & = \frac{X_t}{2}\, dt + \sqrt{1+X_t^2}\, dW_t \\ X_0 & = x \end{cases}$$

   La methode que l'on va utiliser ici consiste a trouver une martingale et l'identifier pour resoudre l'equation. Cette methode n'est pas generale pour resoudre les EDS. On note $F(x) = \frac{x}{2}$ and $G(x) = \sqrt{1+x}$.

   (a) Soit s une fonction C^2. Trouver une condition sur les derivees de s pour que $s(X_t)$ soit une martingale.

   (b) Trouver la fonction s telle que:

$$\frac{1}{2}G(x)^2 s''(x) + s'(x)F(x) = 0.$$

   (On donne $Argsh'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$)

   (c) En déduire l'équation de l'unique solution de l'equation.

Exercice 2 : L'intégrale de Stratonovich Soit (W_t) un mouvement brownien et X_1 et X_2 deux processus tels que:

$$\begin{cases} dX_1 = F_1\, dt + G_1 dW_t \\ dX_2 = F_2\, dt + G_2 dW_t \end{cases}$$

On définit l'intégrale de Stratonovich de X_1 par rapport à X_2 par la formule:

$$\int_0^t X_1(s) \circ dX_2(s) := \int_0^t X_1(s) dX_2(s) + \frac{1}{2} \int_0^t G_1(s) G_2(s)\, ds$$

1. Montrer en utilisant les formules démontrées dans le cours que pour tout $t > 0$ et toute suite de subdivisions $0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_{p_n}^n = t$ emboitées de $[0, t]$ dont le pas tend vers 0, on a:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{p_n - 1} \frac{W(t_{i+1}^n) + W(t_i^n)}{2} (W(t_{i+1}^n) - W(t_i^n)) = \int_0^t W(s) \circ dW(s)$$

   dans $\mathbb{L}^2([0, T])$.

2. Montrer que si $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^3 (trois fois continuement dérivable) alors on a:

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_s) \circ dX_s$$

Exercice 3 : Premiers temps d'atteinte

1. Soit T_a le premier temps d'atteinte du Brownien a la constante a:

$$T_a := \inf\{t > 0, B_t = a\}$$

   On admet que le temps d'atteinte T_a est presque surement fini. En utilisant le fait que $e^{\theta B_t - \theta^2/2t}$ est une martingale, montrer que la transformée de Laplace de T_a vérifie: $\mathbb{E}(e^{-\lambda T_a}) = e^{-\sqrt{2\lambda} a} \forall \lambda \geq 0$. Cette transformee de Laplace est la tranformée de la Gaussienne inverse a^2/B_1^2, dont la densité vaut:

$$p(t) = \frac{\mid a \mid}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-a^2/2t}$$

Exercice 4 : Le processus de Bessel

1. Soit $W = (W^1, \ldots, W^n)$ un mouvement Brownien de dimension n. On pose

$$R_t := \|W_t\| = \left(\sum_{i=1}^n (W_t^i)^2 \right)^{(1/2)}$$

   Montrer que R satisfait l'équation différentielle stochastique:

$$dR_t = \sum_{i=1}^n \frac{W_t^i}{R_t} dW_t^i + \frac{n-1}{2R_t}\, dt$$

   On pourra introduire

$$g_\epsilon(y) = \left(\frac{3}{8}\sqrt{\epsilon} + \frac{3}{4\epsilon} y - \frac{1}{8\epsilon\sqrt{\epsilon}} y^2 \right) 1(y < \epsilon) + \sqrt{y} 1(y \geq \epsilon)$$

   et on notera

$$K_t(\epsilon) = \int_0^t 1(R_s^2 < \epsilon) \frac{1}{4\epsilon} \left[3n - (n+2) R_s^2/\epsilon \right] ds$$

$$J_t(\epsilon) = \int_0^t 1(R_s^2 \geq \epsilon) \frac{n-1}{2R_s} ds$$

$$I_t^i(\epsilon) = \int_0^t \left[1(R_s^2 \geq \epsilon) \frac{1}{R_s} + 1(R_s^2 < \epsilon) \frac{1}{2\sqrt{\epsilon}} \left(3 - R_s^2/\epsilon \right) \right] W_s^i dW_s^i ds$$

2. On suppose que $n \geq 3$ et $x_0 \in \mathbb{R}^3$ tel que $R_1 < \|x_0\| < R_2$. On considere le processus de Bessel partant de x_0 (c'est à dire $\|W + x_0\|$). Calculer explicitement la probabilité que R sort de la sphere de rayon R_2 avant de sortir de la sphere de rayon R_1. Pour cela, on pourra étudier la fonction

$$\Phi(x) := \frac{1}{\|x\|^{n-2}}.$$

On pourra montrer par exemple que $\Delta\Phi = 0$

Exercice 5 : Feynman Kac pour des frontieres dependant du temps
Soit X la solution de l'EDS:

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$$

Soit $a(t)$ une courbe deterministe donnee et τ_a le premier temps d'atteinte de X a la courbe a:

$$\tau_a := \inf\{t > 0 X_t = a(t)\}$$

On veut caracteriser la transformee de Laplace de τ_a qui s'crit $u_\lambda(x) := \mathbb{E}(e^{-\lambda\tau_a})$ pour $\lambda \geq 0$. Soit v_λ la solution de l'EDP:

$$\begin{cases} \partial_t v_\lambda(t,x) + \mathcal{L}v_\lambda(t,x) - \lambda v_\lambda(t,x) = 0 \\ v_\lambda(t,a(t)) = 1 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} v_\lambda(t,x) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

où $\mathcal{L}$ est l'opérateur différentiel:

$$\mathcal{L}f(x) := \frac{1}{2}\sigma(x)^2\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + b(x)\frac{df(x)}{dx}$$

1. Montrer que $e^{-\lambda t}v_\lambda(t, X_t)$ est une martingale.

2. En deduire que $u_\lambda(x) = v_\lambda(0,x)$. (On supposera que $\tau_a \leq K$ ps)