# TD6: Intégrale stochastique et formule d'Itô

Romain Veltz　　Olivier Faugeras

November 18, 2008

**Exercice 1 : Martingales et mouvement Brownien** Soit $(B_t)_t$ un mouvement brownien et $(\mathcal{F}_t)_t$ la filtration associée.

1. Montrer que $(B_t)_{t\geq 0}$ est une martingale
2. Montrer que $(B_t^2 - t)_{t\geq 0}$ est une martingale
3. Montrer que le processus $(e^{\theta B_t - \theta^2 t/2})_{t\geq 0}$ est une martingale en utilisant le fait que la transformée de Laplace d'une Gaussienne $N \sim \mathcal{N}(0,\sigma)$ vaut $\mathbb{E}(e^{xN}) = e^{x^2\sigma/2}$.
4. Montrer que si $X_t$ est un Brownien de dimension $d$ et $F$ est une fonction harmonique (i.e. $\Delta F := \sum_{i=1}^d \frac{d^2F}{dx_i^2} = 0$), alors $F(X_t)$ est une martingale.
5. On considere le processus $X_t = (t, B_t)_{t\geq 0}$.
   (a) Verifier que l'on peut appliquer la formule d'Itô à ce processus.
   (b) Soit $F : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ une fonction $C^2$ (deux fois continuement differentiable). Ecrire la formule d'Itô pour le processus $F(t, B_t)$.
   (c) En déduire que si $F$ est solution de l'equation de la chaleur:
   $$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0$$
   alors le processus $F(t, B_t)$ est une martingale.
   (d) En déduire que $\mathbb{E}(F(t, B_t)) = F(0,0)$ pour tout $t \geq 0$
   (e) Verifier que les trois premiers exemples sont des cas particuliers.
   (f) Montrer que si on note $h_n(t,x) = t^{n/2}H_n(x/\sqrt{t})$ où $H_n$ est le polynôme de Hermite d'ordre $n$:
   $$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2}\frac{d^n}{dx^n}\Big(e^{-x^2/2}\Big),$$
   qui est solution de l'équation différentielle:
   $$H_n''(x) - xH_n'(x) + nH_n(x) = 0$$
   alors $h_n(t, B_t)$ est une martingale.

**Exercice 2 : E**n utilisant la formule d'Ito, montrer que

$$\int_0^t B_s^2 dB_s = \frac{1}{3}B_t^3 - \int_0^t B_s ds$$

**Exercice 3 : S**oit $B_t$ un MB p-dimensionel. On definit $R(t) = ||B||$.

1. En utilisant la formule de Ito, montrer que

$$R_t^2 = R_0^2 + 2\sum_{i=1}^{p}\int_0^t B_s^i dB_s^i + p \cdot t$$

2. Montrer que $P(R_t < a) \propto \int_0^a r^{d-1} e^{-r^2/2t} dr$.

3. ($\star$) Soit $d > 1$ et $g_\epsilon(y) = \sqrt{y}1(y \geq \epsilon) + 1(y < \epsilon)(3\sqrt{\epsilon}/8 + 3y/4\sqrt{\epsilon} - y^2/8\epsilon\sqrt{\epsilon})$. Montrer que $g_\epsilon$ est $C^2$. On considere $f_n = g_{1/n}$. Utiliser $f_n$ pour montrer que

$$R_t = R_0 + \sum_{i=1}^{p}\int_0^t \frac{B_s^i}{R_s} dB_s^i + \int_0^t \frac{d-1}{R_s} ds$$

**Exercice 4 : Indicatrices** Soit $B$ un mouvement Brownien.

1. Soit $C$ le processus défini par:

$$C_t = \int_0^t \mathbb{1}_{B_s=0}\, ds$$

   Montrer que le processus $B_t C_t$ est une martingale.

2. Montrer que $\int_0^t \mathbb{1}_{B_s=0} dB_s = 0$ dans $\mathbb{L}^2([0,T])$.