

# Méthodes Mathématiques pour les neurosciences

## Processus stochastiques

Romain VELTZ      Olivier Faugeras

November 13, 2008

Vous pouvez me poser vos questions par mail: [romain.veltz@sophia.inria.fr](mailto:romain.veltz@sophia.inria.fr)

### Exercice 1 : Petit rappel de proba...

Un avion contient  $n \geq 2$  passagers. Le premier passager ne connaît pas son numéro de siège et s'assoit au hasard. Tous les autres passagers connaissent leur numéro de siège. Le second passager s'assoit à son siège s'il est libre et en choisit un au hasard dans le cas contraire. Tous les autres passagers font de même. Quelle est la probabilité que le dernier passager s'assoit à sa place ?

1. Faire le cas  $n = 2$  et  $n = 3$ .
2. Conjecturer le résultat et le démontrer par récurrence. (On pourra conditionner avec le siège choisi par le premier passager).

### Exercice 2 : Autour du processus de Poisson

Une v.a. de Poisson  $X$  de paramètre  $\lambda > 0$  prend des valeurs entières positives est telle que

$$P(X \geq 0) = 1, \quad P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots$$

On rappelle aussi que  $E(X) = \lambda$  et  $Var(X) = \lambda$ . On souhaite obtenir une description probabiliste des petits changements de voltages qui apparaissent au niveau des synapses spontanément actives. On suppose qu'il y a  $n$  sites sur le nerf ou les neurotransmetteurs peuvent être libérés. Quand un PA arrive dans le terminal, l'émission de neurotransmetteurs a lieu dans un nombre aléatoire  $M$  de sites, et cause un accroissement du potentiel  $V_i$  à chaque site  $i$  actif. On suppose les  $V_i$  iid de loi  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ . L'amplitude de e.p.p. est donnée par :

$$V = V_1 + \dots + V_M$$

On suppose que  $M \equiv Poisson(\lambda)$ .

1. Montrer que  $p_V(v) = e^{-\lambda} \left[ \delta_0 + \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^m}{\sqrt{m}m!} \exp\left(-\frac{(v-m\mu)^2}{2m\sigma^2}\right) \right]$ . On pourra étudier  $P(V < v | M = m)$ .
2. Trouver  $E(V)$  et  $Var(V)$ . On pourra admettre que  $V$  est sommable.

On modélise la dépolarisation d'une cellule nerveuse par un processus de Poisson<sup>1</sup> d'intensité  $\lambda$ . Chaque entrée excitatrice cause un accroissement  $a_E$  du potentiel de membrane  $V : V_t = a_E N_t$ .  $V_0 = 0$ , quand  $V$  dépasse un seuil  $\theta$ , un PA est émis.

On pourra remarquer qu'un processus de Poisson est croissant ps car  $P(N(t+s) - N(t) \geq 0) = P(N(t) - N(0) \geq 0) = 1$  car  $N(t) - N(0)$  suit une loi de Poisson.

<sup>1</sup> $N(0) = 0$ , pour  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$  les va  $N(t_k) - N(t_{k-1})$  sont indépendantes, pour  $0 \leq t_1 < t_2$ ,  $N(t_2) - N(t_1)$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda(t_2 - t_1)$ .

- On appelle  $T_k = \inf \{t > 0, N_{t+s} - N_s = k\}$ . Montrer que la  $T_k \equiv \Gamma(k, \lambda)$  ie  $P_{T_k}(x) = \frac{\lambda}{(k-1)!} (\lambda x)^{k-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}$ . En remarquera que  $t \rightarrow N_{t+s} - N_s$  est croissant et on utilisera  $P(T_k > t) = P(N_{t+s} - N_s \leq k-1)$ .
- En deduire la loi du temps separant l'emission de deux spikes.

On ajoute des entrees inhibitrices et on ignore la dynamique du potentiel entre les entrees. Le modele s'ecrit :

$$V(t) = N_E(t) - N_I(t)$$

le seuil est toujours note  $\theta$ . Le reset est  $v_r = 0$ . On note  $N = N_E + N_I$  le nombre de sauts ainsi que  $\lambda = \lambda_E + \lambda_I$ ,  $p \equiv \lambda_E/\lambda$ ,  $q \equiv \lambda_I/\lambda$ .

- Calculer  $P(V(t) = m | n \text{ sauts ont eu lieu dans } (0, t])$ . On Pourra ecrire  $n = n_E + n_I$  et  $m = n_E - n_I$ .
- En deduire que

$$p_m(t) \equiv P(V(t) = m | V(0) = 0) = e^{-\lambda t} \sum_{n \geq m} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \binom{n+m}{2} p^{(n+m)/2} q^{(n-m)/2}$$

La somme est prise sur les nombres pairs (resp. impairs) si  $m$  est pair (resp. impair).

- En deduire que  $p_m(t) = \left(\frac{\lambda_E}{\lambda_I}\right)^{m/2} e^{-\lambda t} I_m(2t\sqrt{\lambda_E\lambda_I})$ , avec la fonction de Bessel  $I_r(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k! \Gamma(k+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+r}$ .

On suppose  $\theta \in \mathbb{N}^*$ . On desire calculer la loi  $f_\theta$  du temps d'interspike  $T_\theta$ .

- Prouver que :  $p_m(t) = \int_0^t f_\theta(u) p_{m-\theta}(t_u) du$  si  $m > \theta$ .
- Prouver que  $f_\theta(t) = \theta \left(\frac{\lambda_E}{\lambda_I}\right)^{\theta/2} \frac{e^{-\lambda t}}{t} I_\theta(2t\sqrt{\lambda_E\lambda_I})$  avec une transformee de Laplace. On utilisera le fait que  $\mathcal{L}\{e^{ct} f(t)\} = (\mathcal{L}f)(\cdot - c)$ ,  $\mathcal{L}(I_r(at)/a^r) = \frac{(p - \sqrt{p^2 - a^2})^r}{\sqrt{p^2 - a^2}}$  ainsi que  $\mathcal{L}(f(t)/t) = \int_s^\infty \mathcal{L}f$ .
- En deduire  $P(T_\theta < \infty)$  puis  $E(T_\theta)$ .

On peut montrer que  $P(T_\theta < \infty) = 1$  si  $\lambda_E \geq \lambda_I$  et  $\frac{\lambda_E}{\lambda_I} > \frac{\theta}{\theta-1}$  sinon.

### Exercice 3 : Inegalite de Doob

Montrer que pour une suite finie  $(X_k)_{k \leq n}$ , sous-martingale<sup>2</sup> relative a une filtration  $\mathcal{F}_k$ , on a l'inegalite suivante :

$$P \left[ \max_{k \leq n} X_k \geq l \right] \leq l^{-1} E(X_n^+)$$

### Exercice 4 : Mouvements Browniens

On se place dans un espace de probabilite  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , et on se donne  $(B_t)_{t \geq 0}$  un mouvement Brownien. Montrer que les processus suivants sont des mouvements Browniens:

- $X_t := -B_t$  pour  $t \geq 0$  (propriete de symetrie)

<sup>2</sup> $X_k$  est mesurable sur  $\mathcal{F}_k$ ,  $E(|X_k|) < \infty$  et  $E(X_k | \mathcal{F}_{k-1})(\geq) = X_{k-1}$

2.  $X_t := tB_{\frac{1}{t}}$  pour  $t > 0$ , et  $X_0 = 0$  (inversion du temps). Pour la continuité en zéro, on se contentera de prouver que  $B_n/n \rightarrow 0$  ps.
3. Pour  $a > 0$  fixe,  $X_t := \frac{1}{\sqrt{a}}B_{at}$  pour  $t \geq 0$  (propriété de scaling)
4. Pour  $T > 0$  fixe,  $X_t := B_T - B_{T-t}$  pour  $t \in [0, T]$ .
5. (★) Soit  $B_t$  un mouvement brownien  $p$ -dimensionnel commençant à 0 et  $U \in O(p)$  une matrice constante. Prouver que  $\tilde{B}_t = UB_t$  est aussi un mouvement brownien.