

Equations différentielles stochastiques

Olivier FAUGERAS

Plan

Définitions, exemples

Existence et unicité des solutions

Propriétés des solutions

Equations différentielles stochastiques linéaires

Plan

Définitions, exemples

Existence et unicité des solutions

Propriétés des solutions

Equations différentielles stochastiques linéaires

Plan

Définitions, exemples

Existence et unicité des solutions

Propriétés des solutions

Equations différentielles stochastiques linéaires

Plan

Définitions, exemples

Existence et unicité des solutions

Propriétés des solutions

Equations différentielles stochastiques linéaires

Notation

- ▶ On se donne un processus brownien $\mathbf{W}(\cdot)$ de dimension m .
- ▶ On note $\mathcal{F}(t)$ la σ -algèbre engendrée par la variable aléatoire réelle \mathbf{X}_0 de dimension n et l'histoire du processus brownien $\mathbf{W}(\cdot)$ jusqu'au temps t inclus.
- ▶ On se donne $T > 0$ et les fonctions

$$\mathbf{b} : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \mathbf{B} : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{M}^{n \times m}$$

Définition

On dit qu'un processus stochastique $\mathbf{X}(\cdot)$ à valeurs dans \mathbb{R}^n est solution de l'équation différentielle stochastique d'Itô

$$\begin{cases} d\mathbf{X} &= \mathbf{b}(\mathbf{X}, t) dt + \mathbf{B}(\mathbf{X}, t) d\mathbf{W} \\ \mathbf{X}(0) &= \mathbf{X}_0 \end{cases}$$

pour $0 \leq t \leq T$ si

Définition

1. $\mathbf{X}(\cdot)$ est progressivement mesurable par rapport à $\mathcal{F}(\cdot)$,
2. $\mathbf{F} = \mathbf{b}(\mathbf{X}, t)$ is in $\mathbb{L}_n^1(0, T)$,
3. $\mathbf{G} = \mathbf{B}(\mathbf{X}, t)$ is in $\mathbb{L}_{n \times m}^2(0, T)$,
4. et $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0 + \int_0^t \mathbf{b}(\mathbf{X}, s) ds + \int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X}, s) d\mathbf{W}$ pour $0 \leq t \leq T$.

Définition

Remarques :

1. De iii) et iv) on déduit que $\mathbf{X}(\cdot)$ a p.s. des trajectoires continues.
2. Une EDS d'ordre supérieur

$$\mathbf{Y}^{(n)} = f(t, Y, \dots, Y^{(n-1)}) + g(t, Y, \dots, Y^{(n-1)})\xi$$

s'écrit sous la forme précédente à l'aide du "changement de variables"

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} Y(t) \\ \dot{Y}(t) \\ \vdots \\ Y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ \vdots \\ X_n(t) \end{pmatrix}$$

Définition

On a alors

$$d\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_2(t) \\ X_3(t) \\ \vdots \\ f(t, \mathbf{X}) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ g(t, \mathbf{X}) \end{pmatrix} d\mathbf{W}$$

Exemple 1 : $dX = gX dW$

On prend $m = n = 1$. Une solution de

$$\begin{cases} dX &= gX dW \\ X(0) &= 1 \end{cases}$$

est $X(t) = e^{-\frac{1}{2} \int_0^t g^2 ds + \int_0^t g dW}$ comme on le vérifie à l'aide de la formule d'Itô.

On vérifie de même qu'une solution de

$$\begin{cases} dX &= fX dt + gX dW \\ X(0) &= 1 \end{cases}$$

est $X(t) = e^{\int_0^t f - \frac{1}{2} g^2 ds + \int_0^t g dW}$.

Equation de Langevin

Si on rajoute de la friction au mouvement brownien $\dot{X} = \sigma\xi$, on obtient

$$\begin{cases} dX &= -bX dt + \sigma dW \\ X(0) &= X_0 \end{cases}$$

pour une distribution initiale X_0 indépendante du brownien. C'est l'équation de Langevin dont la solution est

$$X(t) = e^{-bt} X_0 + \sigma \int_0^t e^{-b(t-s)} dW \quad t \geq 0$$

Equation de Langevin

On vérifie que $\mathbb{E}[X(t)] = e^{-bt}\mathbb{E}[X_0]$ et que

$$\mathbb{E}[X^2(t)] = e^{-2bt}\mathbb{E}[X_0^2] + \frac{\sigma^2}{2b}(1 - e^{-2bt}).$$

Donc

$$V(X(t)) = \mathbb{E}[X^2(t)] - \mathbb{E}^2[X(t)] = e^{-bt}V(X_0) + \frac{\sigma^2}{2b}(1 - e^{-2bt})$$

et si $V(X_0) < \infty$

$$\begin{cases} \mathbb{E}[X(t)] \rightarrow 0 \\ V(X(t)) \rightarrow \frac{\sigma^2}{2b} \end{cases} \quad t \rightarrow \infty$$

La solution tend vers une variable aléatoire Gaussienne $\mathcal{N}(0, \frac{\sigma}{\sqrt{2b}})$ quelle que soit la condition initiale.

Processus d'Ornstein-Uhlenbeck

C'est le processus dont la dérivée satisfait l'équation de Langevin :

$$\begin{cases} \ddot{Y} &= -b\dot{Y} + \sigma \xi \\ Y(0) &= Y_0, \dot{Y}(0) = Y_1 \end{cases}$$

La vitesse $X = \dot{Y}$ est donnée par

$$X(t) = e^{-bt} Y_1 + \sigma \int_0^t e^{-b(t-s)} dW \quad t \geq 0$$

et la position par

$$Y(t) = Y_0 + \int_0^t X ds$$

Processus d'Ornstein-Uhlenbeck

On trouve

$$\mathbb{E}[Y(t)] = \mathbb{E}[Y_0] + \left(\frac{1 - e^{-bt}}{b}\right) \mathbb{E}[Y_1]$$

et

$$V(Y(t)) = V(Y_0) + \frac{\sigma^2}{b^2}t + \frac{\sigma^2}{2b^3}(-3 + 4e^{-bt} - e^{-2bt})$$

Oscillateur harmonique aléatoire

$$\begin{cases} \ddot{X} &= -\lambda^2 X - b\dot{X} + \sigma \xi \\ X(0) &= X_0, \dot{X}(0) = X_1 \end{cases}$$

On montre à l'aide des techniques exposées plus loin que la solution est

$$X(t) = X_0 \cos(\lambda t) + \frac{1}{\lambda} \int_0^t \sin(\lambda(t-s)) dW$$

dans le cas $X_1 = 0, b = 0, \sigma = 1$.

Exemple en une dimension

On suppose $b \in C^1$ avec $|b'| \leq L$. On considère

$$\begin{cases} dX &= b(X) dt + dW \\ X(0) &= x \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}$$

On réécrit

$$X(t) = x + \int_0^t b(X) ds + W(t)$$

On définit la suite de processus, $X^0(t) = x$ et

$$X^{n+1}(t) = x + \int_0^t b(X^n) ds + W(t) \quad t \geq 0$$

Exemple en une dimension

On note $D^n(t) = \max_{0 \leq s \leq t} |X^{n+1}(s) - X^n(s)|$, $n = 0, \dots$

On remarque que $D^0(t) = \max_{0 \leq s \leq t} \left| \int_0^s b(x) dr + W(s) \right| \leq C(\omega)$

pour $0 \leq t \leq T$

et on montre que $D^n(t) \leq C \frac{L^n}{n!} t^n$ pour tout $n \geq 0$ et tout t dans $[0, T]$.

On en conclut que la suite $X^n(\cdot)$ est p.s. uniformément de Cauchy pour tout t dans $[0, T]$.

Elle converge donc uniformément p.s. vers un processus $X(\cdot)$ qui est solution.

Changement de variable

On part de

$$\begin{cases} dX &= b(X) dt + \sigma(X) dW \\ X(0) &= x \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}$$

et on essaye de se ramener au cas précédent :

$$\begin{cases} dY &= f(Y) dt + dW \\ Y(0) &= y \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}$$

en posant $Y = u(X)$ et en utilisant la formule d'Itô.

Changement de variable

On montre que cela revient, sous certaines conditions, à résoudre l'EDO

$$\begin{cases} u'(z) = \sigma(u(z)) \\ u(y) = x \end{cases} \quad x \in \mathbb{R},$$

puis prendre $f(z) = \frac{1}{\sigma(u(z))} \left[b(u(z)) - \frac{1}{2} u''(z) \right]$.

Préliminaire : le lemme de Gronwall

Lemme

Soient Φ et f deux fonctions continues sur $[0, T]$ non-négatives, C_0 une constante positive. Si

$$\Phi(t) \leq C_0 + \int_0^t f\Phi \, ds \quad 0 \leq t \leq T,$$

alors

$$\Phi(t) \leq C_0 e^{\int_0^t f \, ds}$$

Existence et unicité

Théorème

On se donne $\mathbf{b} : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{B} : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{M}^{n \times m}$, continues et telles que

$$\begin{cases} |\mathbf{b}(x, t) - \mathbf{b}(\hat{x}, t)| \leq L|x - \hat{x}| \\ |\mathbf{B}(x, t) - \mathbf{B}(\hat{x}, t)| \leq L|x - \hat{x}| \end{cases} \quad \forall t \in [0, T] \forall x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n$$

Soit X_0 une v.a. à valeurs dans \mathbb{R}^n , $\mathbb{E}[|X_0|^2] < \infty$ et indépendante de $\mathcal{W}^+(0)$, $\mathbf{W}(\cdot)$ est un processus brownien m -dimensionnel. Il existe une unique solution $\mathbf{X} \in \mathbb{L}_n^2(0, T)$ de l'EDS

$$\begin{cases} d\mathbf{X} &= \mathbf{b}(\mathbf{X}, t) dt + \mathbf{B}(\mathbf{X}, t) d\mathbf{W} \\ \mathbf{X}(0) &= \mathbf{X}_0 \end{cases}$$

Existence et unicité

Schéma de preuve : unicité

On utilise l'hypothèse de continuité Lipschitz uniforme et le lemme de Gronwall pour montrer que

$$\mathbb{E} \left[|\mathbf{X}(t) - \hat{\mathbf{X}}(t)|^2 \right] = 0 \forall t \in [0, T]$$

et donc que $\mathbf{X}(t) = \hat{\mathbf{X}}(t)$ p.s. pour tout $t \in [0, T]$.

Existence et unicité

Schéma de preuve : Existence

On introduit le même schéma itératif que dans l'exemple précédent

$$\begin{cases} \mathbf{X}^0(t) &= \mathbf{X}_0 \\ \mathbf{X}^{n+1}(t) &= \mathbf{X}_0 + \int_0^t \mathbf{b}(\mathbf{X}^n(s), s) ds + \int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X}^n(s), s) dW \end{cases}$$

$n \in \mathbb{N}$, $t \in [0, T]$.

On définit $d^n(t) = \mathbb{E} [|\mathbf{X}^{n+1}(t) - \mathbf{X}^n(t)|^2]$. On montre par récurrence que si $M \geq 2L^2(1 + T)$ alors

$$d^n(t) \leq \frac{(Mt)^{n+1}}{(n+1)!} \quad n \in \mathbb{N} \quad t \in [0, T]$$

Existence et unicité

On montre alors grâce à l'inégalité de martingale que

$$\mathbb{E} \left[\max_{0 \leq t \leq T} |\mathbf{X}^{n+1}(t) - \mathbf{X}^n(t)|^2 \right] \leq C \frac{(MT)^n}{n!}$$

L'application du lemme de Borel-Cantelli nous donne

$$P \left(\max_{0 \leq t \leq T} |\mathbf{X}^{n+1}(t) - \mathbf{X}^n(t)|^2 > \frac{1}{2^n} \text{ i.s.} \right) = 0$$

et donc la convergence uniforme sur $[0, T]$ p.s. de

$$\mathbf{X}^n = \mathbf{X}^0 + \sum_{j=0}^{n-1} (\mathbf{X}^{j+1} - \mathbf{X}^j)$$

vers un processus $\mathbf{X}(\cdot)$ solution de l'EDS.

On montre enfin que $\mathbf{X}^n(\cdot)$ est dans $\mathbb{L}^2(0, T)$ et aussi sa limite $\mathbf{X}(\cdot)$.

Estimation des moments des solutions

Théorème

Sous les hypothèses du théorème d'existence et d'unicité, si $\mathbb{E} [|\mathbf{X}_0|^{2p}] < \infty$ la solution $\mathbf{X}(\cdot)$ satisfait

$$\mathbb{E} [|\mathbf{X}(t)|^{2p}] \leq C_2(1 + \mathbb{E} [|\mathbf{X}_0|^{2p}])e^{C_1 t}$$

et

$$\mathbb{E} [|\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}(s)|^{2p}] \leq C_2(1 + \mathbb{E} [|\mathbf{X}_0|^{2p}])|t-s|^p e^{C_2 t} \quad \forall s, t \in [0, T]$$

C_1 et C_2 ne dépendent que de L , T , m et n .

Schéma de preuve

On montre que la condition de croissance linéaire sur \mathbf{b} et \mathbf{B} implique la condition:

$$\exists \alpha > 0, \mathbf{x}^T \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) + \frac{2p-1}{2} |\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)|^2 \leq \alpha(1 + |\mathbf{x}|^2) \\ \forall (t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$$

Cette majoration, la formule de Itô appliquée à la fonction $u(\mathbf{x}, t) = (1 + |\mathbf{x}|^2)^p$, et l'inégalité $(|a| + |b|)^q \leq 2^{q-1}(|a|^q + |b|^q)$ permettent de conclure pour la première inégalité.

Schéma de preuve

La même inégalité, $(|a| + |b|)^q \leq 2^{q-1}(|a|^q + |b|^q)$, l'inégalité de Hölder, et l'hypothèse de croissance au plus linéaire permettent d'obtenir la seconde inégalité.

Application : régularité des trajectoires

Les propriétés précédentes montrent que l'application $t \rightarrow \mathbf{X}(t, \omega)$ est p.s. Hölder continue pour tous les exposants plus petits que $\frac{1}{2}$ si $\mathbb{E} [|\mathbf{X}_0|^{2p}] < \infty$ pour tous les entiers $p \geq 1$ (Théorème de Kolmogorov).

Dépendance des paramètres

Pour $k = 1, 2, \dots$, supposons que \mathbf{b}^k , \mathbf{B}^k et \mathbf{X}_0^k satisfassent les hypothèses du théorème d'existence et d'unicité et que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[|\mathbf{X}_0^k - \mathbf{X}_0|^2 \right] = 0,$$

pour tout $M > 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{0 \leq t \leq T} \max_{|x| \leq M} (|\mathbf{b}^k(x, t) - \mathbf{b}(x, t)| + |\mathbf{B}^k(x, t) - \mathbf{B}(x, t)|) = 0$$

Si $X^k(\cdot)$ est solution de

$$\begin{cases} d\mathbf{X}^k &= \mathbf{b}^k(\mathbf{X}^k, t) dt + \mathbf{B}^k(\mathbf{X}^k, t) dW \\ \mathbf{X}^k(0) &= \mathbf{X}_0^k \end{cases},$$

Dépendance des paramètres

alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\max_{0 \leq t \leq T} |\mathbf{X}^k(t) - \mathbf{X}(t)|^2 \right] = 0,$$

où $\mathbf{X}(\cdot)$ est solution de

$$\begin{cases} d\mathbf{X} &= \mathbf{b}(\mathbf{X}, t) dt + \mathbf{B}(\mathbf{X}, t) d\mathbf{W} \\ \mathbf{X}(0) &= \mathbf{X}_0 \end{cases},$$

Définition

L'EDS est dite linéaire si les coefficients \mathbf{b} et \mathbf{B} sont de la forme

$$\mathbf{b}(x, t) = \mathbf{c}(t) + \mathbf{D}(t)x$$

avec $\mathbf{C} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{D} : [0, T] \rightarrow \mathbb{M}^{n \times n}$ et

$$\mathbf{B}(x, t) = \mathbf{E}(t) + \mathbf{F}(t)x$$

avec $\mathbf{E} : [0, T] \rightarrow \mathbb{M}^{n \times m}$ et $\mathbf{F} : [0, T] \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{M}^{n \times m})$, l'ensemble des applications linéaires bornées de \mathbb{R}^n dans $\mathbb{M}^{n \times m}$.

Elle est dite homogène si $\mathbf{c} = \mathbf{E} = 0$ sur $[0, T]$.

Remarque :

Si $\sup_{0 \leq t \leq T} [|\mathbf{c}(t)| + |\mathbf{D}(t)| + |\mathbf{E}(t)| + |\mathbf{F}(t)|] < \infty$ \mathbf{b} et \mathbf{B} satisfont les hypothèses du théorème d'existence et d'unicité.

Cas particulier $\mathbf{F} = 0$

Si $\mathbf{D}(t) = D$, alors la solution de

$$\begin{cases} d\mathbf{X} &= (\mathbf{c}(t) + D\mathbf{X})dt + \mathbf{E}(t)dW \\ \mathbf{X}(0) &= \mathbf{X}_0 \end{cases}$$

s'écrit

$$\mathbf{X}(t) = e^{Dt}\mathbf{X}_0 + \int_0^t e^{D(t-s)}(\mathbf{c}(s)ds + \mathbf{E}(s)dW)$$

Cas particulier $\mathbf{F} = 0$

Plus généralement la solution de

$$\begin{cases} d\mathbf{X} &= (\mathbf{c}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{X})dt + \mathbf{E}(t)d\mathbf{W} \\ \mathbf{X}(0) &= \mathbf{X}_0 \end{cases}$$

s'écrit

$$\mathbf{X}(t) = \Phi(t) \left(\mathbf{X}_0 + \int_0^t \Phi(s)^{-1} (\mathbf{c}(s)ds + \mathbf{E}(s)dW) \right),$$

où $\Phi(\cdot)$ est la résolvante du système d'EDO

$$\frac{d\Phi}{dt} = \mathbf{D}(t)\Phi, \quad \Phi(0) = \text{Id}$$

Tout ceci s'obtient (formellement) à partir des formules standards de la théorie des EDO en écrivant $\mathbf{E}d\mathbf{W} = \mathbf{E}\xi dt$.

Cas général scalaire

La solution de

$$\begin{cases} dX &= (c(t) + d(t)X)dt + \sum_{l=1}^m (e^l(t) + f^l(t)X)dW^l \\ X(0) &= X_0 \end{cases}$$

s'écrit

$$X(t) = \Phi(t) \left(X_0 + \int_0^t \Phi(s)^{-1} \left(c(s) - \sum_{l=1}^m e^l(s) f^l(s) \right) ds + \int_0^t \sum_{l=1}^m \Phi(s)^{-1} e^l(s) dW^l \right)$$

avec

$$\Phi(t) = \exp \left(\int_0^t d - \sum_{l=1}^m \frac{(f^l)^2}{2} ds + \int_0^t \sum_{l=1}^m f^l dW^l \right)$$

