Mouvement brownien et bruit blanc

Olivier FAUGERAS

Plan

Motivations et définitions

Construction du mouvement brownien

Propriété des trajectoires

Propriété de Markov

Plan

Motivations et définitions

Construction du mouvement brownien

Propriété des trajectoires

Propriété de Markov

Plan

Motivations et définitions

Construction du mouvement brownien

Propriété des trajectoires

Propriété de Markov

Plan

Motivations et définitions

Construction du mouvement brownien

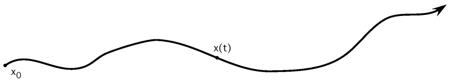
Propriété des trajectoires

Propriété de Markov

Motivations

- Nous avons considéré jusqu'à présent des EDO de la forme
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) & = & \mathbf{b}(\mathbf{x}(t)) \quad t > 0 \\ \mathbf{x}(0) & = & x_0 \end{cases}$$
où $\mathbf{b} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un champ de vecteur régulier.

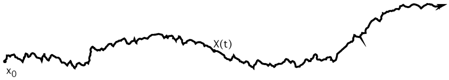
Les trajectoires des solutions sont régulières :



Trajectory of the differential equation

Motivations

Dans de nombreuses applications, les trajectoires mesurées ressemblent plutôt à :



SAMPLE PATH OF THE STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATION

On peut être tenté de perturber le système initial avec de l'aléatoire. De manière formelle :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}(t) & = & \mathbf{b}(\mathbf{X}(t)) + \mathbf{B}(\mathbf{X}(t))\xi(t) \quad t > 0 \\ \mathbf{X}(0) & = & X_0 \end{cases}$$

où $\mathbf{B} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{M}^{n \times m}$, l'ensemble des matrices $n \times m$, et ξ est un "bruit-blanc" de dimension m. C'est une équation différentielle stochastique (EDS).

Motivations

Ceci pose les problèmes mathématiques suivants

- Définir le bruit blanc.
- Définir les solutions d'une EDS.
- Etudier l'existence, l'unicité des solutions de l'EDS, leur dépendance par rapport aux paramètres, aux conditions initiales.

Une heuristique

Dans le cas $m = n$, $X_0 = 0$, $\mathbf{b} = 0$, $\mathbf{B} = Id$, la solution est ce qu'on appelle le mouvement brownien ou le processus de Wiener de dimension n, ce qu'on écrit (symboliquement) :

$$\dot{\mathbf{W}}(\cdot) = \xi(\cdot)$$

"Le bruit blanc est la dérivée du processus de Wiener".

Marches aléatoires

- On considère la grille 2D $\{(m\Delta x,\, n\Delta t) \,|\, m \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N}\}$
- Une particule se trouve en $x = 0$ à $t = 0$.
- A chaque instant $n\Delta t$ elle avance ou elle recule avec la probabilité $1/2$.
- Soit $p(m, n)$ la probabilité de trouver la particule en $m\Delta x$ à l'instant $n\Delta t$.
- On a la relation

$$p(m, 0) = \begin{cases} 0 & m \neq 0 \\ 1 & m = 0 \end{cases}$$

Marches aléatoires

- Et aussi

$$p(m, n+1) = \frac{1}{2}p(m-1, n) + \frac{1}{2}p(m+1, n),$$

- Donc

$$p(m, n+1) - p(m, n) = \frac{1}{2}(p(m-1, n) - 2p(m, n) + p(m+1, n))$$

Marches aléatoires

- Si $\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = D$, constante,

$$\frac{p(m, n+1) - p(m, n)}{\Delta t} = \frac{D}{2}\left(\frac{p(m-1, n) - 2p(m, n) + p(m+1, n)}{(\Delta x)^2}\right)$$

- Si maintenant $\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$, $m\Delta x \to x$, $n\Delta t \to t$ avec $\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = D$, alors, sans doute, $p(m, n) \to f(x, t)$ qui satisfait

$$f_t = \frac{D}{2} f_{xx}$$

- C'est une équation de diffusion ou équation de la chaleur.

Marches aléatoires

- Avec la condition initiale $f(x,0) = \delta(x)$ on trouve la solution

$$f(x,t) = \frac{1}{(2\pi Dt)^{1/2}}\, e^{-\frac{x^2}{2Dt}}$$

- La densité de probabilité est $\mathcal{N}(0, Dt)$.

Justification mathématique

- On utilise le théorème de Laplace-De Moivre.
- Soient X_i, $i = 1, \cdots$ des variables aléatoires à valeurs dans $\{0, 1\}$ indépendantes et identiquement uniformément distribuées (donc $V(X_i) = 1/4$).
- On définit la v.a.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

C'est le nombre de mouvements en avant jusqu'au temps $n\Delta t$.
- Soit $X(t)$ la position de la particule à l'instant $n\Delta t$:

$$X(t) = S_n\Delta x + (n - S_n)(-\Delta x) = (2S_n - n)\Delta x$$

Justification mathématique

- On vérifie que

$$V(X(t)) = (\Delta x)^2 n = \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} t = Dt$$

- Puis,

$$X(t) = \left(\frac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} \right) \sqrt{n} \Delta x = \left(\frac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} \right) \sqrt{tD}$$

- Le théorème de Laplace-De Moivre implique que

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ t = n\Delta t,\ \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = D}} P(a \leq X(t) \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2Dt}}\, dx$$

Justification mathématique

On est conduit à la définition

Définition

Un processus aléatoire réel $W(\cdot)$ est dit processus de Wiener ou mouvement brownien si

- $W(0) = 0$ *p.s.,*
- $W(t) - W(s)$ *a pour loi* $\mathcal{N}(0, t-s)$ *pour tout* $t \geq s \geq 0$*,*
- *Quels que soient les instants* $0 < t_1 < \cdots < t_n$ *les v.a.* $W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \ldots, W(t_n) - W(t_{n-1})$ *sont indépendantes (indépendance des acroissements).*

Noter que $\mathbb{E}[W(t)] = 0$ et $\mathbb{E}[W^2(t)] = t$.

Calcul des lois jointes

- On sait que

$$P(a_1 \leq W(t_1) \leq b_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t_1}} \int_{a_1}^{b_1} e^{-\frac{x_1^2}{2t_1}} \, dx_1$$

- Sachant que $W(t_1) = x_1$ avec $a_1 \leq x_1 \leq b_1$ on peut parier que $W(t_2)$ est $\mathcal{N}(x_1, t_2 - t_1)$ sur l'intervalle $[t_1, t_2]$.

Calcul des lois jointes

- En posant
$$g(x,\, t\,|\, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}},$$
- on s'attend à ce que

$$P(a_1 \le W(t_1) \le b_1, \cdots, a_n \le W(t_n) \le b_n) = \\ \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} g(x_1,\, t_1\,|\, 0) g(x_2,\, t_2 - t_1\,|\, x_1) \cdots \\ g(x_n,\, t_n - t_{n-1}\,|\, x_{n-1})\, dx_n \cdots dx_1$$

Calcul des lois jointes

Théorème

Soit $W(\cdot)$ un processus de Wiener de dimension 1. Pour tout entier positif n et pour tous les choix d'instants $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ et pour toutes les fonctions mesurables $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on a

$$\mathbb{E}[f(W(t_1), \cdots, W(t_n))] = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \cdots, x_n)\, g(x_1, t_1 \,|\, 0)\, g(x_2, t_2 - t_1 \,|\, x_1) \cdots g(x_n, t_n - t_{n-1} \,|\, x_{n-1})\, dx_n \cdots dx_1$$

Calcul des lois jointes

Preuve :
On pose $X_i = W(t_i)$, $Y_i = X_i - X_{i-1}$ pour $i = 1, \cdots, n$, on définit $h(y_1, y_2, \cdots, y_n) = f(y_1, y_1 + y_2, \cdots, y_1 + y_2 + \cdots + y_n)$. Le résultat provient de l'indépendance des Y_i.

Construction d'un processus de Wiener monodimensionnel

Lemme

Soit $W(\cdot)$ un processus de Wiener de dimension 1. Alors

$$\mathbb{E}[W(t)W(s)] = t \wedge s = \min\{t, s\} \quad t, s \geq 0$$

La preuve utilise l'indépendance des acroissements.
La fonction $r(s, t) = \mathbb{E}[W(t)W(s)]$ s'appelle la fonction d'autocorrélation du processus $W(\cdot)$ (en fait, puisque $\mathbb{E}[W(t)] = 0$, c'est la fonction d'autocovariance).

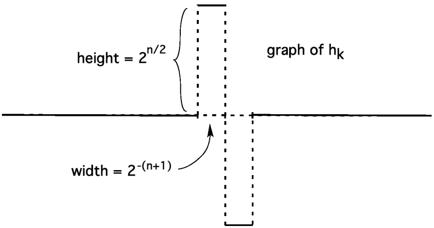
Construction de Lévy-Ciesilsky

Lemme

Les fonctions de Haar $\{h_k(\cdot)\}_{k=0}^{\infty}$ *définies sur* $[0, 1]$ *forment une base complète orthonormale de* $L^2(0, 1)$

Preuve :

On montre que si $f \in L^2(0, 1)$ est telle que $\int_0^1 f(t)h_k(t)\,dt$ pour tout $k \geq 0$ alors $f = 0$ p.p.



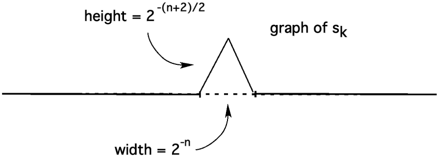
GRAPH OF A HAAR FUNCTION

Construction de Lévy-Ciesilsky

Définition

$$s_k(t) = \int_0^t h_k(s)\, ds \quad 0 \leq t \leq 1 \quad k = 0, 1, \cdots$$

est la kième fonction de Schauder.



GRAPH OF A SCHAUDER FUNCTION

Construction de Lévy-Ciesilsky

On définit (formellement) $W(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k s_k(t)$, $0 \leq t \leq 1$, où les coefficients A_k sont des v.a. i.i.d $\mathcal{N}(0, 1)$.

Lemme

Soit $\{a_k\}_{k \geq 0}$ une suite de réels tels que

$$|a_k| = O(k^\delta) \quad k \to \infty, \quad 0 \leq \delta < 1/2,$$

alors la série $\sum_0^\infty a_k s_k(t)$ converge uniformément sur $[0,\ 1]$.

Preuve :
Il suffit de remarquer que $\max_{2^n \leq k < 2^{n+1}} |a_k| \leq C(2^{n+1})^\delta$.

Construction de Lévy-Ciesilsky

Lemme

Soit $\{A_k\}_{k\geq 0}$ *une suite de v.a. i.i.d.* $\mathcal{N}(0,1)$. *Alors on a p.s.* $|A_k(\omega)| = O(\sqrt{\log k})$ *quand* $k \to \infty$.

Preuve :

- On majore $P(|A_k| > x)$ par $Ce^{-\frac{x^2}{4}}$, $C > 0$.
- On en déduit pour $x = 4\sqrt{\log k}$, $P(|A_k| > 4\sqrt{\log k}) \leq C\frac{1}{k^4}$.
- L'application du lemme de Borel-Cantelli donne $P(|A_k| > 4\sqrt{\log k}\text{ i.s.}) = 0$, i.s.="infiniment souvent".
- Donc pour presque tout ω, $|A_k(\omega)| \leq 4\sqrt{\log k}$ dès que $k \geq K(\omega)$.

Construction de Lévy-Ciesilsky

Lemme

$\sum_{k=0}^{\infty} s_k(s)s_k(t) = t \wedge s$ *pour* $0 \leq s, t \leq 1$.

Preuve :

- Soit $\Phi_s(\tau) = 1$ si $0 \leq \tau \leq s$ et 0 sinon.
- D'après le lemme sur les fonctions de Haar on a, si $s \leq t$

$$s = \int_0^1 \Phi_t \Phi_s \, d\tau = \sum_{k \geq 0} a_k b_k,$$

- avec

$$a_k = \int_0^1 \Phi_t h_k \, d\tau = \int_0^t h_k \, d\tau = s_k(t)$$

et pour la même raison $b_k = s_k(s)$.

Construction de Lévy-Ciesilsky

Théorème

Soit $\{A_k\}_{k\geq 0}$ une suite de v.a. i.i.d. $\mathcal{N}(0, 1)$ définies sur le même espace de probabilité. La somme

$$W(t, \omega) = \sum_{k\geq 0} A_k(\omega)s_k(t) \quad 0 \leq t \leq 1$$

converge uniformément en t p.s. De plus

1. *$W(\cdot)$ est un mouvement brownien pour $0 \leq t \leq 1$.*
2. *Les trajectoires $t \to W(t, \omega)$ sont continues p.s.*

Construction de Lévy-Ciesilsky

Schéma de preuve :

- La convergence uniforme est une conséquence des lemmes précédents et implique (ii) et $W(0) = 0$ p.s..
- On montre que $W(t) - W(s)$ est $\mathcal{N}(0, t-s)$ en calculant la fonction caractéristique et en utilisant l'indépendance des A_k et le lemme précédent.
- On démontre ensuite, pour $m = 1, 2, \cdots$ et pour tout $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m \leq 1$ que la fonction de répartition $F_{W(t_1), W(t_2)-W(t_1), \cdots, W(t_m)-W(t_{m-1})}(x_1, \cdots, x_m)$ est égale à $F_{W(t_1)}(x_1)\, F_{W(t_2)-W(t_1)}(x_2) \cdots F_{W(t_m)-W(t_{m-1})}(x_m)$ en utilisant la fonction caractéristique :

$$\mathbb{E}\left[e^{i\sum_{j=1}^m \lambda_j (W(t_j)-W(t_{j-1}))}\right] = \Pi_{j=1}^m e^{-\frac{\lambda_j^2}{2}(t_j - t_{j-1})}$$

Construction de Lévy-Ciesilsky

Théorème

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace de probabilité sur lequel il existe une famille dénombrable de v.a. i.i.d.* $\mathcal{N}(0, 1)$*. Alors il existe un mouvement brownien* $W(.)$ *défini pour* $\omega \in \Omega$ *et* $t \geq 0$*.*

Preuve :

On construit une famille dénombrable de mouvements browniens $W^n(t)$, $n \geq 0$ sur $[0, 1]$ puis W par induction :

$$W(t) = W(n-1) + W^n(t-(n-1)) \quad n-1 \leq t \leq n$$

Mouvement brownien dans R^n

Définition

Un processus stochastique $\mathbf{W}(\cdot) = (W^1(\cdot), \cdots, W^n(\cdot))$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$ *est un processus de Wiener (ou un mouvement brownien) n-dimensionnel si*

1. *Pour chaque* $k = 1, \cdots, n$, $W^k(\cdot)$ *est un processus de Wiener monodimensionnel.*
2. *Les* σ*-algèbres* $\mathcal{W}^k = \mathcal{A}(W^k(t) \,|\, t \geq 0)$ *sont indépendantes pour* $k = 1, \cdots, n$.

En utilisant les résultats précédents on sait construire un processus de Wiener n-dimensionnel.

Mouvement brownien dans R^n

Lemme

Si $\mathbf{W}(\cdot)$ *est un processus de Wiener n-dimensionnel alors*

1. $\mathbb{E}\left[W^k(t)W^l(s)\right] = (t \wedge s)\delta_{kl} \quad k, l = 1, \cdots, n$
2. $\mathbb{E}\left[(W^k(t) - W^k(s))(W^l(t) - W^l(s))\right] = (t - s)\delta_{kl} \quad k, l = 1, \cdots, n \quad t \geq s \geq 0$

Mouvement brownien dans R^n

Théorème

1. *Si* $\mathbf{W}(\cdot)$ *est un processus de Wiener n-dimensionnel, alors* $\mathbf{W}(t) \sim \mathcal{N}(0,\, t\, Id)$ *pour* $t > 0$. *Id est la matrice identité de taille n.*
2. *Pour chaque fonction mesurable* $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \cdots \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *on a, si* $g(\mathbf{x},\, t \,|\, \mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{2t}}$ *:*

$$\mathbb{E}\left[f(\mathbf{W}(t_1), \cdots, \mathbf{W}(t_m)\right] =$$
$$\int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_m)\, g(\mathbf{x}_1,\, t_1 \,|\, 0)\, g(\mathbf{x}_2,\, t_2 - t_1 \,|\, \mathbf{x}_1) \cdots$$
$$g(\mathbf{x}_m,\, t_m - t_{m-1} \,|\, \mathbf{x}_{m-1})\, d\mathbf{x}_m \cdots d\mathbf{x}_1$$

Continuité

Définition

Soit $0 < \gamma \leq 1$. *Une fonction* $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ *est dite uniformément hölderienne d'exposant* γ *s'il existe une constante* K *telle que*

$$|f(t) - f(s)| \leq K\,|t - s|^{\gamma} \quad \forall t, s \in [0, T]$$

Continuité

On utilise le théorème suivant dû à Kolmogorov :

Théorème

Soit $\mathbf{X}(\cdot)$ *un processus stochastique à trajectoires continues p.s. et tel que*

$$\mathbb{E}\left[|\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}(s)|^{\beta}\right] \leq C\,|t-s|^{1+\alpha}, \quad \alpha,\, \beta > 0,\ C \geq 0 \quad \forall t,\ s \geq 0.$$

Alors pour tout $0 < \gamma < \frac{\alpha}{\beta}$, $T > 0$ *et pour presque tout* ω, *il existe une constante* $K(\omega,\, \gamma,\, T)$ *telle que*

$$|\,\mathbf{X}(t,\,\omega) - \mathbf{X}(s,\,\omega)\,| \leq K\,|\,t-s\,|^{\gamma} \quad \forall 0 \leq s,\ t \leq T$$

On a donc continuité hölderienne uniforme d'exposant γ sur $[0,\ T]$.

Continuité

Schéma de démonstration :

- On suppose pour simplifier que $T = 1$. Soit γ tel que $0 < \gamma < \frac{\alpha}{\beta}$. On considère les événements $A_n = \left\{\left|\mathbf{X}(\frac{i+1}{2^n}) - \mathbf{X}(\frac{i}{2^n})\right| > \frac{1}{2^{n\gamma}}\right\}$ pour un entier i tel que $0 \leq i < 2^n$ pour $n \geq 1$.
- Par l'inégalité de Chebyshev on majore $P(A_n)$ par $C\,2^{n(-\alpha+\beta\gamma)}$ et on en déduit que $\sum_{n\geq 1} P(A_n) < \infty$.
- Le lemme de Borel-Cantelli implique que $P(A_n i.s.) = 0$ et donc que pour presque tout ω il existe $m = m(\omega)$ tel que si $n \geq m$

$$\left|\mathbf{X}(\frac{i+1}{2^n}) - \mathbf{X}(\frac{i}{2^n})\right| \leq \frac{1}{2^{n\gamma}} \quad 0 \leq i \leq 2^n - 1$$

Continuité

- On peut donc trouver $K(\omega)$ tel que

$$\begin{cases} \left|\mathbf{X}(\frac{i+1}{2^n}) - \mathbf{X}(\frac{i}{2^n})\right| \leq K\frac{1}{2^{n\gamma}} \\ \forall n \geq 0 \end{cases}$$

- On montre alors que ceci implique la propriété hölderienne.

Continuité

Application au mouvement brownien :
On montre que

$$\mathbb{E}\left[|\mathbf{W}(t) - \mathbf{W}(s)|^{2m}\right] = C\,|t-s|^m$$

pour tout $m \geq 1$.
Les hypothèses du théorème de Kolmogorov sont satisfaites pour $\beta = 2m$ et $\alpha = m - 1$. $\mathbf{W}(\cdot)$ est donc hölderien pour tous les exposants γ tels que $0 < \gamma < \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2m}$

Différentiabilité

Théorème (Dvoretsky, Erdös, Kakutani)

1. *Pour tout* γ, $\frac{1}{2} < \gamma \leq 1$ *et pour presque tout* ω, $t \to \mathbf{W}(t, \omega)$ *n'est nulle part hölderien d'exposant* γ.
2. *En particulier, p.s., la trajectoire* $t \to \mathbf{W}(t, \omega)$ *n'est différentiable nulle part et de variation infinie sur chaque sous intervalle.*

Différentiabilité

Schéma de démonstration :
Il suffit de considérer un mouvement brownien de dimension 1 sur $[0, 1]$.

- On choisit N assez grand pour que $N\left(\gamma - \frac{1}{2}\right) > 1$.
- Supposons que $t \to W(t, \omega)$ soit Hölder d'exposant γ en s, $0 \leq s < 1$. Alors il existe K tel que

$$|W(t, \omega) - W(s, \omega)| \leq K|t - s|^{\gamma} \quad \forall t \in [0, 1]$$

Différentiabilité

- On choisit $n \gg 1$ et $i = [ns] + 1$, alors pour $j = i, i+1, \cdots, i+N-1$ on a

$$\left| W(\frac{j+1}{n}, \omega) - W(\frac{j}{n}, \omega) \right| \leq \left| W(s, \omega) - W(\frac{j}{n}, \omega) \right| + \left| W(s, \omega) - W(\frac{j+1}{n}, \omega) \right| \leq \frac{M}{n^\gamma}$$

pour une certaine constante M.
- Donc ω appartient à l'un des événements

$$A^i_{M,n} = \left\{ \left| W(\frac{j+1}{n}) - W(\frac{j}{n}) \right| \leq \frac{M}{n^\gamma} \quad j = i, \cdots, i+N-1 \right\}$$

pour certains i tels que $1 \leq i \leq n$, un $M \geq 1$ et tous les n assez grands.

Différentiabilité

- L'ensemble des ω tels que $W(\omega, \cdot)$ est Hölder de coefficient γ est inclus dans l'ensemble

$$\bigcup_{M=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{n} A^{i}_{M,n}$$

- On montre que cet événement est de probabilité nulle, d'où découle 1.
- Si $W(t, \omega)$ est différentiable en s il est Hölder de coefficient 1 en ce point, ce qu'il n'est pas p.s. Enfin, si $W(t, \omega)$ est de variation finie sur un sous-intervalle il est différentiable p.p. sur cet intervalle.

Bruit blanc

Définition

Soit $X(\cdot)$ *un processus à valeur réelles tel que* $\mathbb{E}[X^2(t)] < \infty$ *pour tout* $t \geq 0$. *On définit sa fonction d'autocorrélation*

$$r(t,s) = \mathbb{E}[X(t)X(s)],\ t,\ s\ \geq 0,$$

et sa fonction d'autocovariance

$$a(t,s) = \mathbb{E}[(X(t) - \mathbb{E}[X(t)])(X(s) - \mathbb{E}[X(s)])],\ t,\ s\ \geq 0,$$

Si $\mathbb{E}[X(t)] = \mathbb{E}[X(s]$ *pour tous* $s,\ t \geq 0$ *et* $r(t,s) = c(t-s)$, *pour une fonction* $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *on dit que le processus* $X(\cdot)$ *est stationnaire.*

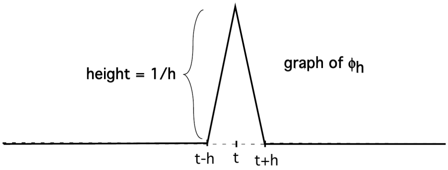
Bruit blanc

- Nous avons défini au début de la leçon le bruit blanc comme la "dérivée" d'un processus de Wiener dont nous savons maintenant que ses trajectoires sont p.s. nulle part dérivable.
- On peut néanmoins "définir" un bruit blanc comme un processus stationnaire à valeurs réelles de moyenne nulle et de fonction d'autorrélation $c(t) = \delta(t)$.
- On le voit en définissant la fonction

$$\Phi_h(s) = \mathbb{E}\left[\left(\frac{W(t+h) - W(t)}{h}\right)\left(\frac{W(s+h) - W(s)}{h}\right)\right],$$

  pour $h > 0$, $t > 0$ fixé, en utilisant les propriétés du mouvement brownien et en faisant tendre h vers 0 (voir figure).

Bruit blanc



Markov

Définition

Si Γ est une σ-algèbre, $\Gamma \subset \mathcal{A}$ alors, pour tout borélien A de $\mathcal{A}$ on définit la v.a. $P(A \mid \Gamma) = \mathbb{E}[\chi_A \mid \Gamma]$

$P(A \mid \Gamma)$ est la probabilité conditionnelle de A étant donné Γ.

Définition

Si $\mathbf{X}(\cdot)$ est un processus stochastique, la σ-algèbre

$$\mathcal{A}(s) = \mathcal{A}(\mathbf{X}(r) \mid 0 \leq r \leq s)$$

s'appelle l'historique du processus jusqu'au temps s.

Markov

Définition

Un processus $\mathbf{X}(\cdot)$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$ *est dit de Markov si*

$$P(\mathbf{X}(t) \in B \,|\, \mathcal{A}(s)) = P(\mathbf{X}(t) \in B \,|\, \mathbf{X}(s)) \; p.s.$$

pour tout s *tel que* $0 \leq s < t$ *et pour tout borélien* B *de* $\mathbb{R}^n$.

Markov

Théorème

Soit $\mathbf{W}(\cdot)$ *un processus de Wiener n-dimensionnel. Alors* $\mathbf{W}(\cdot)$ *est de Markov et p.s.*

$$P(\mathbf{W}(t) \in A \,|\, \mathbf{W}(s)) = \frac{1}{(2\pi(t-s))^{n/2}} \int_A e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{W}(s)|^2}{2(t-s)}}\, dx$$

pour tous s tels que $0 \leq s < t$ *et tous les boréliens A.*

Noter que les deux côtés de cette égalité sont des v.a.

Markov

Schéma de preuve de la deuxième partie :

- On définit
$$\Phi(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi(t-s))^{n/2}} \int_A e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{2(t-s)}}\, d\mathbf{x}$$
- On remarque que $\Phi(\mathbf{W}(s))$ est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{A}(\mathbf{W}(s))$.
- Il suffit donc de montrer que pour tout borélien C de $\mathcal{A}(\mathbf{W}(s))$
$$\int_C \chi_{\mathbf{W}(t)\in A}\, dP = \int_C \Phi(\mathbf{W}(s))\, dP$$
- Ceci résulte de ce que $C = \{\mathbf{W}(s) \in B\}$ pour un certain borélien $B \subset \mathbb{R}^n$ et des définitions.

Markov

- Par exemple

$$\begin{aligned}\int_C \chi_{\mathbf{W}(t)\in A}\, dP &= P(\mathbf{W}(s) \in B,\, \mathbf{W}(t) \in A) \\ &= \int_B \int_A g(\mathbf{y},\, s \,|\, 0)\, g(\mathbf{x},\, t-s \,|\, \mathbf{y})\, d\mathbf{x}\, d\mathbf{y} \\ &= \int_B g(\mathbf{y},\, s \,|\, 0) \Phi(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}\end{aligned}$$

- et

$$\begin{aligned}\int_C \Phi(\mathbf{W}(s))\, dP &= \int_\Omega \chi_B(\mathbf{W}(s))\, \Phi(\mathbf{W}(s))\, dP \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_B(\mathbf{y})\, \Phi(\mathbf{y})\, \frac{e^{-\frac{|\mathbf{y}|^2}{2s}}}{(2\pi s)^{n/2}}\, d\mathbf{y}\end{aligned}$$