Equations différentielles ordinaires

Olivier FAUGERAS

14 Octobre 2009

Plan

Le cadre

- E un espace de Banach, H un ouvert de E.
- I un ouvert de $\mathbb{R}$.
- $f \in C^1(I \times H, E)$.
- On considère (formellement) l'équation différentielle ordinaire (EDO)

$$x' = f(t, x) \tag{1}$$

Définition

Soit $J \in I$ un intervalle ouvert, une application $u \in C^1(J, H)$ est une solution de l'équation (1) si $\forall\ t \in J$

$$u'(t) = f(t, u(t)) \tag{2}$$

Equation intégrale

On se ramène à une équation intégrale grâce à la

Proposition

Pour que dans l'intervalle ouvert $J \in I$ de centre t_0 l'application u de J dans H soit une solution de (1) telle $u(t_0) = x_0 \in H$ il faut et il suffit que u soit continue dans J et telle que

$$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds \tag{3}$$

Théorème d'existence de Cauchy

Théorème (Cauchy)

Si f est continûment différentiable dans $I \times H$, alors, pour tout $t_0 \in I$ et tout $x_0 \in H$, il existe un intervalle ouvert $J \in I$ de centre t_0 tel que, dans J, il existe une solution u de (1) telle que $u(t_0) = x_0$.

Principe de la preuve : se ramener à un théorème de point fixe (approximation de Picard).

Théorème (Point fixe)

Soit F un espace de Banach et $V = B(y_0, \beta)$. Soit v une application de V dans F telle que $\|v(y_1) - v(y_2)\| \leq k\|y_1 - y_2\|$ pour tout couple de points $y_1, y_2 \in V$, où $0 \leq k < 1$. Alors si $\|v(y_0) - y_0\| < \beta(1 - k)$, il existe un point et un seul $z \in V$ tel que $v(z) = z$.

Schéma de preuve pour Cauchy

- $J_a = \overline{B}(t_0, a) \in I$. Il existe $B(x_0, b) \in H$ telle que
$$M = \sup_{(t,x)\in J_a\times B} \|f(t,x)\| \quad \text{et} \quad k = \sup_{(t,x)\in J_a\times B} \|D_2 f(t,x)\|$$
soient finis.
- Pour $r < a$, soit $J_r = \overline{B}(t_0, r)$, $F_r = C^0(J_r, B)$, c'est un Banach.
- Soit $V_r \subset F_r$ la boule $B(x_0, b)$ (x_0 est identifié à l'application constante). A chaque $y \in V_r$ on associe $g(y)$
$$g(y)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds$$
Par construction $g(y) : V_r \to F_r$.

Schéma de preuve pour Cauchy (suite)

- On démontre que si r est assez petit, g satisfait les conditions du théorème du point fixe.
- On utilise alors la proposition sur l'équation intégrale.

Remarque : Il suffit que f soit localement lipschitzienne :

$$\forall (t,x) \in I \times H \, \exists J = B(t, r_1) \in I \quad \text{et} \quad B = B(x, r_2) \in H,$$
$$f \text{ bornée dans } J \times B \quad \text{et}$$
$$\exists k \geq 0, \, \|f(s, y_1) - f(s, y_2)\| \leq k \|y_1 - y_2\|, \; s \in J, \; y_1, \; y_2 \in B$$

Comparaison des solutions d'EDOs

Definition

On dit qu'une application différentiable u d'une boule ouverte $J \in I$ dans H est une solution approchée à ε près de (1) si

$$\|u'(t) - f(t, u(t))\| \leq \varepsilon \quad \forall t \in J$$

Théorème

Supposons que $\|D_2 f(t, x)\| \leq k$ dans $I \times H$. Si u et v sont deux solutions approchées de (1) dans $J = B(t_0, r)$ à ε_1 et ε_2 près respectivement, alors, pour tout $t \in J$ on a

$$\|u(t) - v(t)\| \leq \|u(t_0) - v(t_0)\| e^{k|t-t_0|} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{e^{k|t-t_0|} - 1}{k}$$

Comparaison des solutions d'EDOs : schéma de preuve

- On se ramène au cas $t_0 = 0$.
- De $\|u'(t) - f(t, u(t))\| \leq \varepsilon_1$ pour $0 \leq s \leq t$ on déduit (théorème de la moyenne):

$$\|u(t) - u(0) - \int_0^t f(s, u(s))\, ds\| \leq t\varepsilon_1$$

- D'où

$$\|u(t) - v(t)\| \leq \|u(0) - v(0)\| + \left\| \int_0^t (f(s, u(s)) - f(s, v(s)))\, ds \right\| + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)t$$

Comparaison des solutions d'EDOs : schéma de preuve, suite

- et on conclut à l'aide du lemme de Gronwall :

Lemme

Si dans un intervalle $[0, c]$ φ *et* ψ *sont deux fonctions continues* ≥ 0*, alors pour toute fonction continue* $w \geq 0$ *dans* $[0, c]$ *satisfaisant*

$$w(t) \leq \varphi(t) + \int_0^t \psi(s) w(s)\, ds$$

on a, dans $[0, c]$

$$w(t) \leq \varphi(t) + \int_0^t \varphi(s)\psi(s) exp\left(\int_s^t \psi(\xi)\, d\xi\right) ds$$

Théorème d'unicité

Théorème

On suppose f continûment différentiable dans $I \times H$. Si u et v sont deux solutions de (1) définies dans un intervalle ouvert J de centre t_0 et telles que $u(t_0) = v(t_0)$, alors $u = v$ dans J.

Dépendance des paramètres

Théorème

Soit P un espace métrique et $f : I \times H \times P \to E$. On fait les hypothèses

1. *$\forall z \in P$, $(t, x) \to f(t, x, z)$ est continûment différentiable de $I \times H$ dans E.*
2. *f et $D_2 f$ sont sont continues dans $I \times H \times P$.*

Alors $\forall (t_0, x_0, z_0) \in I \times H \times P \, \exists J(t_0) \in I$, $B(z_0) \in P$ tels que pour tout $z \in B(z_0)$ il existe dans J une solution unique $t \to u(t, z)$ de l'équation $x' = f(t, x, z)$ telle que $u(t_0, z) = x_0$. L'application $(t, z) \to u(t, z)$ est bornée et continue dans $J \times B(z_0)$.

La preuve ressemble beaucoup à celle du théorème de Cauchy.

Dépendance des conditions initiales

Théorème

On suppose f localement lipschitzienne dans $I \times H$*. Pour tout* $(a, b) \in I \times H$ *:*

- *Il existe un intervalle ouvert* $J \in I$ *de centre a et une boule ouverte* $V \in H$ *de centre b telles que pour tout* $(t_0,\ x_0) \in J \times V$*, il existe une solution unique* $t \to u(t, t_0, x_0)$ *de (1), définie dans J, prenant ses valeurs dans H et telle que* $u(t_0, t_0, x_0) = x_0$*.*
- *L'application* $(t, t_0, x_0) \to u(t, t_0, x_0)$ *est uniformément continue dans* $J \times J \times V$*.*

Pour la preuve voir Dieudonné, Tome 1.