

Rappels sur les systèmes dynamiques

Grégory Faye and Olivier Faugeras

NeuroMathComp Laboratory, INRIA, Sophia Antipolis, CNRS, ENS Paris, France



M2 MVA / M2 Maths-Bio

28 September, 2011

<http://www-sop.inria.fr/members/Olivier.Faugeras/MVA/MMN11>

gregory.faye@inria.fr

Outline

- 1 Définitions et stabilité
- 2 Equivalence topologique

Opérateur d'évolution

- Soit $\dot{x} = f(x)$, f est \mathcal{C}^1 une EDO autonome.
- On ne considère que des temps continus : $t \in \mathbf{R}$.
- $\varphi^t : X \rightarrow X$ est tel que $x_t = \varphi^t x_0$, x_0 état initial, X espace d'état.
- φ^t peut ne pas être défini pour tout $(t, x) \in \mathbf{R} \times X$.
- Si φ^t est défini pour tout $t \in \mathbf{R}$, l'opérateur est dit inversible.
- $\varphi^t x_0$ peut n'être défini que localement en temps: $0 \leq t \leq t_0$ (explosion en temps fini).
- Deux hypothèses:
 - ① $\varphi^0 = Id$
 - ② $\varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s$.

Définition (Système dynamique)

Un triplet $\{\mathbf{R}, X, \varphi^t\}$, X espace d'état, et φ^t est une famille d'opérateurs d'évolution paramétrée par t et satisfaisant les deux conditions précédents s'appelle un **système dynamique**.

Définitions

Définition (Orbite)

Une *orbite* partant de x_0 est l'ensemble

$$x \in X : x = \varphi^t x_0, \forall t \in \mathbf{R}, \varphi^t x_0 \text{ est défini}$$

Définition (Equilibre)

x^0 est un *équilibre* (point fixe) si $\varphi^t x^0 = x^0$ pour tout t .

Définition (Cycle)

Un *cycle* est une orbite périodique L_0 telle que pour tout $x_0 \in L_0$, $\varphi^{t+T_0} x_0 = \varphi^t x_0$ pour un $T_0 > 0$, pour tout $t \in \mathbf{R}$.

Définition (Portrait de phase)

Le *portrait de phase* d'un système dynamique est une partition de l'espace d'état en orbites.

Ensembles invariants

Définition (Ensemble invariant)

Un ensemble *ensemble invariant* d'un système dynamique $\{\mathbf{R}, X, \varphi^t\}$ est un sous-ensemble $S \subset X$ tel que si $x_0 \in S$ alors $\varphi^t \in S$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

Définition (Stabilité des ensembles invariants: Lyapunov)

Un ensemble invariant S est dit *Lyapunov stable* si pour tout voisinage U de S suffisamment petit il existe un voisinage V de S tel que $\varphi^t x \in U$ pour tout $x \in V$ et $t > 0$. (X est un Banach)

Définition (Stabilité des ensembles invariants: asymptotique)

Un ensemble invariant S est dit *asymptotiquement stable* si il existe un voisinage U_0 de S tel $\varphi^t x \rightarrow S$ pour tout $x \in U_0$ quand $t \rightarrow +\infty$.

Remarque

L'asymptotique stabilité n'implique pas la stabilité au sens de Lyapunov.

Théorème de stabilité

Théorème

Soit $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, f est \mathcal{C}^1 , un système dynamique continu. Si x_0 est un point fixe ($f(x_0) = 0$), alors si les valeurs propres de $Df(x_0)$ sont de partie réelle négative, x_0 est asymptotiquement stable.

Preuve: exercice classique de prépa?

Outline

- 1 Définitions et stabilité
- 2 Equivalence topologique

Définitions

Définition

Un système dynamique $\{\mathbf{R}, \mathbb{R}^n, \varphi^t\}$ est dit *topologiquement équivalent* au système $\{\mathbf{R}, \mathbb{R}^n, \psi^t\}$ s'il existe un homéomorphisme $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ transformant les orbites du premier système en les orbites du second tout en préservant la direction du temps.

Définition (Définition locale)

Un système dynamique $\{\mathbf{R}, \mathbb{R}^n, \varphi^t\}$ est dit *localement topologiquement équivalent* au voisinage de l'équilibre x_0 au système $\{\mathbf{R}, \mathbb{R}^n, \psi^t\}$ au voisinage de l'équilibre y_0 s'il existe un homéomorphisme $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

- défini dans un petit voisinage $U \subset \mathbb{R}^n$ de x_0 ,
- qui satisfait $y_0 = h(x_0)$,
- qui transforme les orbites du premier système dans U en les orbites du second dans $V = h(U)$ tout en préservant la direction du temps.

Equilibres hyperboliques

Soit $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, f régulière, x_0 un point d'équilibre. Soit $Df(x_0)$ la matrice Jacobienne en x_0 et soient n_- , n_0 et n_+ le nombre de ses valeurs propres de partie réelle < 0 , $= 0$ et > 0 , en comptant leur multiplicité.

Définition

Un équilibre est dit *hyperbolique* si $n_0 = 0$, c'est un *col hyperbolique* si $n_- n_+ \neq 0$.

Question: Existe-t-il un lien entre les solutions de $\dot{x} = f(x)$ et de sa linéarisation $\dot{\xi} = Df(x_0)\xi$ au voisinage d'un équilibre?

Réponse: Oui si l'équilibre est hyperbolique.

Théorème (Théorème de Hartman-Grobman)

Au voisinage d'un équilibre hyperbolique x_0 , le système dynamique est localement topologiquement équivalent à sa linéarisation $\dot{\xi} = Df(x_0)\xi$.

Variété stable et instable

Définition

Soit x_0 un équilibre, son ensemble stable $W^s(x_0)$ est défini par:

$$W^s(x_0) = \{x : \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi^t x = x_0\}$$

son ensemble instable $W^i(x_0)$ est défini par:

$$W^i(x_0) = \{x : \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi^t x = x_0\}$$

Théorème (Variété stable locale)

Soit x_0 un équilibre hyperbolique. Les intersections de $W^s(x_0)$ et de $W^i(x_0)$ avec un voisinage suffisamment petit de x_0 contiennent des variétés régulières $W_{loc}^s(x_0)$ et $W_{loc}^i(x_0)$ de dimension n_- et n_+ respectivement. De plus, $W_{loc}^s(x_0)$ (resp. $W_{loc}^i(x_0)$) est tangent en x_0 au sous-espace vectoriel T^s (resp. T^i) correspondant à l'union des valeurs propres λ de $Df(x_0)$ telles que $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ (resp. $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$).

Variété centrale

On suppose $n_0 > 0$.

Notation

- Soit E_0 le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n correspondant aux valeurs propres de partie réelle nulle de la Jacobienne $Df(x_0)$.
- Toutes les solutions bornées de $\dot{\xi} = Df(x_0)\xi$ (équilibre et cycle) sont dans E_0 .

Si $n_0 > 0$, savoir si il y a localement équivalence topologique entre le système dynamique $\dot{x} = f(x)$ et sa linéarisation $\dot{\xi} = Df(x_0)\xi$ au voisinage de l'équilibre x_0 est un problème assez compliqué en général.

Question: Est-ce que le système dynamique $\dot{x} = f(x)$ possède une variété ayant des propriétés similaires à celles qu'a E_0 pour $\dot{\xi} = Df(x_0)\xi$?

Réponse: Oui! Pliss 1964, Kelley 1967, Hirsch et al. 1977.

Théorème de la variété centrale en dimension finie

Théorème (Théorème de la variété centrale)

Il existe une fonction $\Psi \in \mathcal{C}^k(E_0, T^s \oplus T^i)$, $\Psi(x_0) = D\Psi(x_0) = 0$ et un voisinage U de x_0 tel que la variété $W_{loc}^c = \{x + \Psi(x) \mid x \in E_0\}$ a les propriétés suivantes.

- Si $x \in W_{loc}^c \cap U$ et $\varphi^t x \in U$ pour $t \in I$, alors $\varphi^t x \in W_{loc}^c$ pour $t \in I$, où I est un intervalle contenant $t = 0$.
- Si $n_- n_+ > 0$, alors W_{loc}^c contient toutes les solutions de $\dot{x} = f(x)$ restant dans U pour tout $t \in \mathbf{R}$. C'est à dire, si $x \in U$ et $\varphi^t x \in U$ pour tout $t \in \mathbf{R}$ alors $x \in W_{loc}^c$.
- Si $n_+ = 0$, W_{loc}^c est localement attractive. Plus précisément, toutes solutions de $\dot{x} = f(x)$ restant dans U pour tout $t > 0$ tendent exponentiellement vers une solution de $\dot{x} = f(x)$ dans W_{loc}^c .
- La dimension de W_{loc}^c est n_0 .

Objectif du cours: définir une variété centrale pour des systèmes dynamiques en dimension infinie.