# Méthodes locales de théorie des systèmes dynamiques en dimension infinie (éléments)

Gérard Iooss
INLN, UMR CNRS-UNSA 6618
1361 route des Lucioles, 06560 Valbonne
e-mail: gerard.iooss@inln.cnrs.fr

## 1 Situation hyperbolique en dimension finie

Considérons un champ de vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ de classe $C^k$ au voisinage de 0, $k \geq 2$ , tel que 0 soit point stationnaire

$$\frac{dZ}{dt} = F(Z), \quad F(0) = 0 \tag{1}$$

et notons

$$L = DF(0).$$

On dit qu'on a une *situation hyperbolique* si l'axe des imaginaires est à une distance positive du spectre de $L$. Plus précisément, soit $\sigma$ le spectre de $L$, i.e. l'ensemble de ses valeurs propres (on est en dimension finie pour l'instant) dans $\mathbb{C}$. On sait déjà que si $\lambda \in \sigma$, alors $\overline{\lambda} \in \sigma$, i.e. $\sigma$ est symétrique par rapport à l'axe réel. Nous faisons maintenant l'hypothèse d'hyperbolicité:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma^+ \cup \sigma^-, \\ \sigma^+ &= \{\lambda \in \sigma; \operatorname{Re}\lambda > 0\}, \\ \sigma^- &= \{\lambda \in \sigma; \operatorname{Re}\lambda < 0\}, \end{aligned}$$

il en résulte qu'aucune valeur propre de $L$ n'est située dans la bande $|\operatorname{Re}\lambda| \leq \gamma$ pour un certain $\gamma > 0$.

On considère alors la décomposition de l'espace $\mathbb{R}^n$, associée à la séparation du spectre de $L$ :

$$\mathbb{R}^n = E_+ \oplus E_-$$

avec resp. les projections $P_+$, (resp. $P_-$) sur $E_+$ (resp. $E_-$) parallèlement à $E_-$ (resp. $E_+$). Ces projections peuvent se construire à l'aide de la décomposition en blocs de Jordan pour chaque valeur propre de $L$, ou plus généralement avec la formule suivante (Dunford)

$$P_+ = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma (z\mathbb{I} - L)^{-1} dz \tag{2}$$

où $\Gamma$ est une courbe simple de Jordan entourant une fois $\sigma_+$ et dont tous les points $z$ sont tels que $\operatorname{Re} z \geq \gamma$. On a une formule analogue pour $P_-$. On vérifie les propriétés

$$\begin{array}{rcl}
P_+^2 & = & P_+, \quad P_+L = LP_+, \\
P_- & = & \mathbb{I} - P_+, \; P_-^2 = P_-, \quad P_-L = LP_-, \\
\text{Image}(P_+) & = & E_+, \; \ker P_+ = E_-, \\
\text{Image}(P_-) & = & E_-, \; \ker P_- = E_+.
\end{array}$$

On peut alors définir les restrictions $L_+$ et $L_-$ de $L$ à $E_+$ et $E_-$ et il existe une constante $k > 0$, telle que

$$\begin{array}{rcl}
||e^{L_+t}X|| & \leq & ke^{\gamma t}||X||, \quad t \leq 0, \quad X \in E_+, \\
||e^{L_-t}Y|| & \leq & ke^{-\gamma t}||Y||, \quad t \geq 0, \quad Y \in E_-.
\end{array}$$

Le but est de construire deux variétés *invariantes par le flot de* (1), qui correspondraient aux sous-espaces invariants $E^{\pm}$, si le champ de vecteurs était linéaire. Plus précisément, on définit les ensembles suivants

$\mathcal{V}_I = \{Z(0) \in$ voisinage de 0 de $\mathbb{R}^n$; la solution $Z(t)$ de (1) reste au voisinage de 0, pour $t \in ]-\infty, 0]\}$

$\mathcal{V}_S = \{Z(0) \in$ voisinage de 0 de $\mathbb{R}^n$; la solution $Z(t)$ de (1) reste au voisinage de 0, pour $t \in [0, +\infty[\}$. On montre ci-dessous que $\mathcal{V}_I$ et $\mathcal{V}_S$ sont des *variétés ($\mathcal{V}_I$ : variété instable* et $\mathcal{V}_S$ *: variété stable).*

On montre le théorème suivant:

**Théorème des variétés stable et instable.** *Le champ de vecteurs hyperbolique* (1) *admet une variété instable invariante $\mathcal{V}_I$ locale* (dim $\mathcal{V}_I = \dim E_+$) *et une variété stable invariante locale $\mathcal{V}_S$* (dim $\mathcal{V}_S = \dim E_-$). *Elles sont de classe $C^k$, et passent par 0, où $\mathcal{V}_I$ est tangente à $E_+$ et $\mathcal{V}_S$ est tangente à $E_-$.*

Pour construire $\mathcal{V}_I$ et $\mathcal{V}_S$ on utilise le théorème des fonctions implicites dans un espace convenable. Soit

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{E}^0 & = & \{t \mapsto Z(t) \text{ continue, bornée:} (-\infty, 0) \to \mathbb{R}^n\}, \\
\mathcal{E}^1 & = & \{Z \in \mathcal{E}^0; \dot{Z} \in \mathcal{E}^0\},
\end{array}$$

alors l'application $\mathcal{A}$ définie par

$$Z \in \mathcal{E}^1 \mapsto \frac{dZ}{dt} - LZ \in \mathcal{E}^0$$

est un opérateur linéaire borné de $\mathcal{E}^1$ dans $\mathcal{E}^0$. On va calculer son inverse sur un supplémentaire de son noyau. En effet, le noyau est donné par

$$\ker \mathcal{A} = \{g \in \mathcal{E}^1; g(t) = e^{Lt}g_0, \quad t \leq 0, \quad g_0 \in E_+\}$$

et on montre que $\mathcal{A}$ est surjectif sur $\mathcal{E}^0$ : l'équation

$$\frac{dZ}{dt} - LZ = f \in \mathcal{E}^0$$

donne

$$Z(t) = \widetilde{\mathcal{A}}^{-1}f + e^{L_+t}X, \quad X \in E_+,$$

où $\widetilde{\mathcal{A}}^{-1}f$ est une solution particulière donnée par

$$\left(\widetilde{\mathcal{A}}^{-1}f\right)(t) = \int_0^t e^{L_+(t-s)}P_+f(s)ds + \int_{-\infty}^t e^{L_-(t-s)}P_-f(s)ds$$

où $t \leq 0$, et où on note que $t-s<0$ dans la première intégrale et $t-s>0$ dans la deuxième. La composante dans $E_-$ s'obtient facilement avec la condition d'être bornée quand $t \to -\infty$. On voit alors que

$$\widetilde{\mathcal{A}}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{E}^0, \mathcal{E}^1),$$

i.e. le pseudo-inverse $\widetilde{\mathcal{A}}^{-1}$est un opérateur linéaire borné de $\mathcal{E}^0$ dans $\mathcal{E}^1$.

Définissons une projection $\Pi$ dans $\mathcal{E}^0$ (et $\mathcal{E}^1$) sur $\ker \mathcal{A}$ par

$$(\Pi Z)(t) = e^{L_+t}P_+Z(0)$$

où on vérifie

$$\begin{aligned} \Pi^2 &= \Pi,\ \Pi \in \mathcal{L}(\mathcal{E}^0, \mathcal{E}^1), \\ \Pi\widetilde{\mathcal{A}}^{-1}f &= 0. \end{aligned}$$

On peut alors chercher $Z \in \mathcal{E}^1$ solution de

$$\frac{dZ}{dt} = F(Z),$$

qui s'écrit

$$\mathcal{A}Z = R(Z), \tag{3}$$

où

$$R(Z) \stackrel{def}{=} F(Z) - LZ = O(||Z||^2).$$

On décompose $Z = U + V$ avec $U = \Pi Z,\ \ V = (\mathbb{I} - \Pi)Z$, ainsi (3) s'écrit

$$\widetilde{\mathcal{A}}V = R(U+V))$$

et peut être résolu par rapport à $V$, par le théorème des fonctions implicites, au voisinage de 0. On a ainsi dans $\mathcal{E}^1$ au voisinage de 0

$$V = \Phi(U) = O(||U||^2).$$

En notant que $U$ est de la forme $e^{L_+t}X$, $X \in E_+$, et en prenant la valeur de $V$ en $t=0$, on a enfin

$$Z(0) = X + \Psi^+(X),\ \ X \in E_+ \tag{4}$$

où $\Psi^+$ est de classe $C^k$ au voisinage de 0, défini dans $E_+$, et à valeurs dans $E_-$. C'est l'équation de la variété instable (locale) $\mathcal{V}_I$. On note que (3) s'écrit aussi

$$Z(t) = e^{L_+t}X + \int_0^t e^{L_+(t-s)}P_+R[Z(s)]ds + \int_{-\infty}^t e^{L_-(t-s)}P_-R[Z(s)]ds \tag{5}$$

ce qui fournit immédiatement le développement en série de Taylor de $\mathcal{V}_I$ par identification des puissances de $X$.

L'invariance de $\mathcal{V}_I$ par le flot de (1) résulte immédiatement de l'autonomie du champ de vecteurs (faire $t = \tau + t', Z(t) = \widetilde{Z}(t')$ dans l'équation ci-dessus, et vérifier que $\widetilde{Z}(0)$ est de la forme (4)).

On peut procéder de même pour obtenir la variété stable $\mathcal{V}_S$, et résoudre en $Z$ (borné (ainsi que $\dot{Z}$) pour $t \geq 0$), la nouvelle équation

$$Z(t) = e^{L_- t}Y + \int_0^t e^{L_-(t-s)}P_-R[Z(s)]ds - \int_t^\infty e^{L_+(t-s)}P_+R[Z(s)]ds \qquad (6)$$

qui, pour $t = 0$, fournit

$$\begin{aligned} Z(0) &= Y + \Psi^-(Y), \quad Y \in E_-, \qquad (7)\\ \Psi^-(Y) &\in E_+, \quad \Psi^-(Y) = O(||Y||^2). \end{aligned}$$

Par construction, si $Z(0) \notin \mathcal{V}_S$ alors il existe $t_0 > 0$ fini tel que la solution $Z(t)$ de (1) sort du voisinage de 0 pour $t > t_0$. La dynamique au voisinage de 0 est donc claire.

**Remarque 1:** Le théorème de Grobman-Hartman (1959-1960) montre en fait que le champ de vecteurs (1) est au voisinage de 0, *topologiquement conjugué au champ de vecteurs linéarisé*.

**Remarque 2:** Si l'on a une *solution périodique* de (1), on peut suivre la même méthode pour obtenir les *variétés stables et instables de cette orbite* (dans le cas hyperbolique). Néanmoins, il faut introduire les exposants de Floquet (remplacent les valeurs propres de $L$), et construire les projections adaptées (périodiques de $t$). De plus, la direction tangente à l'orbite périodique est "neutre" pour la dynamique (exposant de Floquet =0), et on est amené à adapter les coordonnées de $\mathbb{R}^n$ au voisinage de l'orbite périodique, en découplant la phase le long de cette orbite, de la dynamique transverse à l'orbite.

Plus généralement, on peut construire des variétés stables et instables d'objets de dimensions plus élevées, notamment en présence de groupe de symétrie pour lequel le système est invariant.

# 2 Variété centrale en dimension finie

Considérons encore (1), où on suppose maintenant que le spectre de $L$ vérifie

$$\sigma = \sigma^+ \cup \sigma^0 \cup \sigma^-$$

où $\sigma^\pm$ sont définis comme à la section précédente, et

$$\sigma^0 = \{\lambda \in \sigma ; \operatorname{Re} \lambda = 0\}.$$

On définit comme précédemment les sous-espaces invariants $E_+$, $E_-$, $E_0$, $E_h$ et les projections associées, qui commutent avec $L$, tels que

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &= E_h \oplus E_0, \quad E_h = E_+ \oplus E_- \\ P_0 L &= LP_0, \quad \ker P_0 = E_h, \ \text{Image}(P_0) = E_0, \\ P_h L &= LP_h, \quad \ker P_h = E_0, \ \text{Image}(P_h) = E_h, \end{aligned}$$

et les restrictions de $L$ à ces sous-espaces: $L_+$ dont le spectre est $\sigma^+$, $L_-$ dont le spectre est $\sigma$-, $L_0$ dont le spectre est $\sigma^0$, $L_h$ dont le spectre est $\sigma^+ \cup \sigma^-$.

**Théorème de la variété centrale (Pliss 1964, Kelley 1967)**. *Il existe* $\Psi \in C^k(E_0, E_h)$, $\Psi(0) = 0$, $D\Psi(0) = 0$, et *un voisinage* $\mathcal{O}$ *de 0 dans* $\mathbb{R}^n$ *tel que la variété*

$$\mathcal{V}_0 = \{X + \Psi(X); X \in E_0\}$$

*a les propriétés suivantes*

*i)* Invariance locale *de* $\mathcal{V}_0$ : *Si* $Z(0) \in \mathcal{V}_0 \cap \mathcal{O}$ *et la solution* $Z(\tau) \in \mathcal{O}$ *pour* $\tau \in [0, t]$, *alors* $Z(\tau) \in \mathcal{V}_0$ *pour* $\tau \in [0, t]$.

*ii) Si* $\sigma^+$ *et* $\sigma^-$ *sont non vides, alors* $\mathcal{V}_0$ *contient toutes les solutions de* (1) *qui restent dans* $\mathcal{O}$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$ : *si* $Z(0) \in \mathcal{O}$ *et la solution* $Z(t) \in \mathcal{O}$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$, *alors* $Z(0) \in \mathcal{V}_0$.

*iii) Si* $\sigma^+$ *est vide, on a de plus l'*attractivité locale *de* $\mathcal{V}_0$ : *toutes les solutions de (1) qui restent dans* $\mathcal{O}$ *pour* $t > 0$, *tendent exponentiellement vers une solution de (1) sur* $\mathcal{V}_0$. *Plus précisément, si* $Z(0) \in \mathcal{O}$ *et la solution* $Z(t) \in \mathcal{O}$ *pour* $t > 0$, *alors il existe* $\widetilde{t} \in \mathbb{R}$, $\widetilde{Z} \in \mathcal{V}_0 \cap \mathcal{O}$ *et* $\gamma > 0$ *tel que*

$$Z[t, Z(0)] = Z(t - \widetilde{t}, \widetilde{Z}) + O(e^{-\gamma t}) \quad t \to \infty,$$

*où on a noté* $Z(t, Z_0)$ *la solution de (1) telle que* $Z(0) = Z_0$.

On note que la variété $\mathcal{V}_0$ a la dimension de $E_0$, et qu'elle est tangente à $E_0$ en 0. C'est une *variété centrale de (1) pour 0.* Nous allons donner des éléments de la démonstration (technique) de ce théorème, dont l'importance est fondamentale pour l'étude locale des systèmes dynamiques au voisinage de situations "critiques".

Si l'on considère les équations vérifiées par $Z(t)$ pour les variétés instable (5) et stable (6) dans le cas hyperlobique, on est amené ici à écrire pour $Z$ l'équation

$$\begin{aligned} Z(t) \quad &= \quad e^{L_0 t}X + \int_0^t e^{L_0(t-s)}P_0 R[Z(s)]ds - \int_t^{\infty} e^{L_+(t-s)}P_+ R[Z(s)]ds + \qquad (8) \\ &\quad + \int_{-\infty}^t e^{L_-(t-s)}P_- R[Z(s)]ds \end{aligned}$$

dont on vérifie que $Z(t)$ est alors solution de (1), et dont les intégrales donnant les composantes sur $E_+$ et $E_-$ sont bornées dès que $Z(t)$ est borné. On peut voir que réciproquement, les solutions de (1) dont la composante sur $E_h$ est bornée, vérifient (8). On note toutefois que la première intégrale, donnant une partie de la composante de $Z(t)$ sur $E_0$, n'est pas bornée en général puisque même si $R[Z(s)]$ est borné, l'intégrale $\int_0^t$ peut croître polynomialement. C'est ici la cause principale de la technicité de la démonstration du théorème, car cela impose de choisir un espace de fonctions pouvant croître avec une petite exponentielle. Mais alors, pour ne pas sortir du domaine local de définition du champ de vecteurs (1), et pour s'assurer d'avoir une constante de Lipschitz uniforme dans le nouvel espace, on est amené à modifier le terme non linéaire afin qu'il devienne linéaire en dehors d'un voisinage de 0, ce qui ne modifie pas la dynamique au voisinage de 0, mais fait perdre l'unicité dans le résultat du théorème.

**1ère étape.**

On introduit donc une fonction cut-off: $\chi$ de classe $C^\infty$ telle que $\chi(Z) \in [0, 1]$ et

$$\chi(Z) = \begin{cases} 1 & \text{si } ||Z|| \leq 1 \\ 0 & \text{si } ||Z|| \geq 2. \end{cases}$$

Le système modifié s'écrit alors

$$\frac{dZ}{dt} = LZ + M_\rho(Z), \tag{9}$$

avec

$$M_\rho(Z) = \chi(\rho^{-1}Z)R(Z),$$

et on peut considérer l'équation (8) où $R$ est remplacé par $M_\rho$. On a alors la propriété que $M_\rho \in C_b^k(\mathbb{R}^n)$ (i.e. continue, bornée ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre k), et même

$$||D_Z M_\rho(Z)||_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)} \leq c\rho$$

puisque $R(Z) = O(||Z||^2)$. Pour contrôler la petite croissance éventuelle de la composante sur $E_0$, on note d'abord que pour tout $\delta > 0$ on a

$$||e^{L_0 t}||_{\mathcal{L}(E_0)} \leq k_\delta e^{\delta|t|}, \; t \in \mathbb{R},$$

et on définit pour tout Banach $E$, et $\eta > 0$, l'espace

$$BC_\eta(E) = \{Z \in C^0(\mathbb{R}, E); ||Z||_\eta = \sup\left(e^{-\eta|t|}||Z(t)||_E\right) < \infty\}.$$

On note que l'on a ainsi une échelle d'espaces de Banach avec injections continues, tels que

$$BC_\zeta(E) \hookrightarrow BC_\eta(E), \quad \text{si } 0 < \zeta < \eta.$$

Alors,

i) l'opérateur linéaire $S$ défini pour $X \in E_0$ par

$$(SX)(t) = e^{L_0 t}X$$

est dans $\mathcal{L}(E_0, BC_\eta)$ pour tout $\eta > 0$ (il suffit de choisir $\delta < \eta$).

ii) L'opérateur linéaire $K$ défini par

$$(KZ)(t) = \int_0^t e^{L_0(t-s)}P_0 Z(s)ds - \int_t^\infty e^{L_+(t-s)}P_+ Z(s)ds + \int_{-\infty}^t e^{L_-(t-s)}P_- Z(s)ds$$

est linéaire borné dans $BC_\eta(\mathbb{R}^n)$, pourvu que $0 < \eta < \gamma$, où $\gamma$ est celui qui intervient dans les bornes de $\sigma^+$ et $\sigma^-$.

iii) L'opérateur non linéaire $\mathcal{M}_\rho$ (opérateur de Nemitsky) défini par

$$[\mathcal{M}_\rho(Z)](t) = M_\rho[Z(t)]$$

envoit $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ dans $C_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, et en particulier envoie $BC_\eta(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même pour tout $\eta \geq 0$. De plus

$$\begin{aligned} ||\mathcal{M}_\rho(Z_1) - \mathcal{M}_\rho(Z_2)||_\eta &= \sup e^{-\eta|t|}||M_\rho[Z_1(t)] - M_\rho[Z_2(t)]|| \\ &\leq c\rho \sup e^{-\eta|t|}||Z_1(t) - Z_2(t)|| \\ &\leq c\rho||Z_1 - Z_2||_\eta. \end{aligned}$$

L'équation (8) où $R$ est remplacé par $M_\rho$ s'écrit maintenant dans $BC_\eta(\mathbb{R}^n)$

$$Z = SX + K\mathcal{M}_\rho(Z). \tag{10}$$

Il est alors clair qu'on peut résoudre (10) par rapport à $Z$ dès que la constante de Lipschitz de $K\mathcal{M}_\rho$ vérifie

$$c\rho ||K||_{\mathcal{L}[BC_\eta(\mathbb{R}^n)]} < 1 \tag{11}$$

ce qui est réalisé quel que soit $\eta \in (0,\gamma)$ fixé, pour$\rho$ assez petit. On en déduit ainsi l'existence d'un point fixe de (10) $Z = \Phi(X)$ dans $BC_\eta(\mathbb{R}^n)$, puis l'*existence d'une variété centrale lipschitzienne globale unique $\mathcal{V}_0$ pour le système modifié*:

$$Z(0) = X + \Psi(X),$$

où $\Psi(0) = 0$ et la constante de Lipschitz de $\Psi$ est $O(\rho)$. L'invariance de cette variété résulte du même argument que dans le cas hyperbolique.

**2ème étape:** régularité de la variété.

La difficulté ici vient du fait que l'opérateur de Nemitsky $\mathcal{M}_\rho$ *n'est pas continument dérivable* dans $BC_\eta(\mathbb{R}^n)$. Dans le cas contraire, un argument de fonction implicite aurait suffit. Cette non-dérivabilité vient de la croissance autorisée pour $Z(t)$. En fait on peut montrer les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\rho \text{ est continu} &: \quad BC_\eta \to BC_\zeta,\ \eta \geq 0,\ \zeta > 0, \\ \mathcal{M}_\rho \text{ est } C^k &: \quad BC_\eta \to BC_\zeta,\ 0 \leq \eta < \zeta/k \end{aligned}$$

avec

$$[D\mathcal{M}_\rho(Z)\cdot H](t) = DM_\rho[Z(t)]\cdot H(t).$$

On doit utiliser que le point fixe de (10) $Z \in BC_\eta(\mathbb{R}^n)$ pour tout $\eta \in [\widetilde{\eta}, \overline{\eta}]$, dès qu'on a choisi $\overline{\eta} \in (0,\gamma)$, et $\widetilde{\eta}$ tel que $0 < \widetilde{\eta} < \overline{\eta}/k$ et que $\rho$ est choisi tel que (11) soit vrai pour tout $\eta \in [\widetilde{\eta}, \overline{\eta}]$. Alors, on peut montrer que pour $\eta \in ]p\widetilde{\eta}, \overline{\eta}]$, la fonction $\Phi : E_0 \to BC_\eta(\mathbb{R}^n)$ est de classe $C^p$, avec

$$D^p\Phi(X) \in \mathcal{L}^p\{E_0, BC_{p\widetilde{\eta}}(\mathbb{R}^n)\}.$$

Pour montrer la différentiabilité de $\Phi$ on peut utiliser le lemme abstrait ci-dessous.

**Lemme technique** (Vanderbauwhede, Van Gils [1]). *Soient $Y_0, Y, Y_1$ et $\Lambda$ des espaces de Banach tels que les injections suivantes soient continues*

$$Y_0 \overset{J_0}{\hookrightarrow} Y \overset{J}{\hookrightarrow} Y_1.$$

*On considère l'équation suivante*

$$y = f(y,\lambda) \tag{12}$$

*où $f : Y \times \Lambda \to Y$ vérifie les propriétés suivantes*

$H_1$ : *$Jf : Y \times \Lambda \to Y_1$ a une dérivée partielle continue $D_y(Jf) : Y \times \Lambda \to \mathcal{L}(Y, Y_1)$, avec*

$$D_y(Jf)(y,\lambda) = Jf^{(1)}(y,\lambda) = f_1^{(1)}(y,\lambda)J, \quad \forall (y,\lambda) \in Y \times \Lambda$$

*pour certains $f^{(1)} : Y \times \Lambda \to \mathcal{L}(Y)$* et *$f_1^{(1)} : Y \times \Lambda \to \mathcal{L}(Y_1)$.*

$H_2$ : *$f_0 : Y_0 \times \Lambda \to Y$, $f_0(y_0,\lambda) \overset{def}{=} f(J_0 y_0, \lambda)$, a une derivée partielle continue*

$$D_\lambda f_0 : Y_0 \times \Lambda \to \mathcal{L}(\Lambda, Y).$$

*$H_3 : \exists \kappa \in [0,1[$ tel que*

$$\begin{array}{rcl} ||f(y,\lambda) - f(y',\lambda)||_Y & \leq & \kappa ||y-y'||_Y, \\ ||f^{(1)}(y,\lambda)||_{\mathcal{L}(Y)} & \leq & \kappa, \ \ ||f_1^{(1)}(y,\lambda)||_{\mathcal{L}(Y_1)} \leq \kappa. \end{array}$$

*On note alors $\widetilde{y}(\lambda) \in Y$ la solution unique de (12), et on suppose de plus que*

*$H_4 : \widetilde{y}(\lambda) = J_0 \widetilde{y}_0(\lambda)$ pour un certain $\widetilde{y}_0$ continu $\Lambda \to Y_0$.*

*Alors, $\widetilde{y}$ est Lipschitzienne $\Lambda \to Y$, et $\widetilde{y}_1 = J\widetilde{y}$ est de classe $C^1 : \Lambda \to Y_1$ avec*

$$D\widetilde{y}_1(\lambda) = J\widetilde{A}(\lambda), \quad \lambda \in \Lambda,$$

*où $\widetilde{A}(\lambda)$ est la solution unique de l'équation suivante dans $\mathcal{L}(\Lambda, Y)$*

$$A = f^{(1)}(\widetilde{y}(\lambda), \lambda)A + D_\lambda f_0(\widetilde{y}_0(\lambda), \lambda).$$

**3ème étape:** La restriction de la variété précédente au voisinage de 0, fournit une variété invariante par le flot du champ de vecteurs (1). Du résultat de l'étape 2 découle l'énoncé des parties i) et ii) du théorème de la variété centrale. Il faut noter que l'on a perdu l'unicité de la variété en introduisant le cut-off, et que plus on veut de régularité pour $\mathcal{V}_0$, plus on diminue la taille du voisinage de 0 où $\mathcal{V}_0$ existe.

Pour montrer la partie iii) du théorème, qui concerne le cas où $\sigma^+$ est vide, on peut caractériser la variété centrale globale pour le système modifié par le cut-off (9), par

$$\mathcal{V}_0 = \{Z(0) \in \text{ voisinage de 0 dans } \mathbb{R}^n, \text{ tels que } \sup_{t \leq 0} e^{\eta t} ||P_- Z(t)|| < \infty\},$$

où $0 \leq \eta < \gamma$. Notons $Z(t; Z_0)$ la solution de (9) telle que $Z(0) = Z_0$, et définissons

$$\overline{Z}(t; Z_0) = \begin{cases} Z(t; Z_0) & \text{pour } t \geq 0, \\ \widetilde{Z}(t; Z_0) & \text{pour } t \leq 0 \end{cases}$$

où $\widetilde{Z}(t; Z_0)$ est la solution du système

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{dZ}{dt} & = & LP_0 Z + P_0 M_\rho(Z), \\ Z(0) & = & Z_0. \end{array}$$

On voit que $\sup_{t \leq 0} e^{\eta t} ||\overline{Z}(t; Z_0)|| < \infty$, et on a $\forall t, t_0 \in \mathbb{R}$

$$P_0 \overline{Z}(t; Z_0) = e^{L_0(t-t_0)} P_0 \overline{Z}(t_0; Z_0) + \int_{t_0}^t e^{L_0(t-\tau)} P_0 M_\rho [\overline{Z}(\tau; Z_0)] d\tau.$$

Si on cherche une solution $Z(t)$ de (9) de la forme

$$Z(t) = \overline{Z}(t; Z_0) + Y(t)$$

où $Y(t) \to 0$ exponentiellement quand $t \to +\infty$, on peut alors écrire $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl} Y(t) & = & -P_0 \overline{Z}(t; Z_0) + \displaystyle\int_{-\infty}^t e^{L_-(t-\tau)} P_- M_\rho [\overline{Z}(\tau; Z_0)] d\tau + \\ & & - \displaystyle\int_t^\infty e^{L_0(t-\tau)} P_0 \left\{ M_\rho [\overline{Z}(\tau; Z_0) + Y(\tau)] - M_\rho [\overline{Z}(\tau; Z_0)] \right\} d\tau. \end{array}$$

On peut alors résoudre cette équation par rapport à $Y$ (thm. du point fixe) dans l'espace des fonctions continues telles que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} e^{\eta t}||Y(t)|| < \infty.$$

Il en résulte que $Z_0 + Y(0) \in \mathcal{V}_0$ (selon la caractérisation de $\mathcal{V}_0$ quand $\sigma^+$ est vide), et l'on a bien trouvé une solution restant dans $\mathcal{V}_0$ et asymptote à $Z(t; Z_0)$ quand $t \to \infty$. C'est le résultat attendu sur l'attractivité exponentielle pour cette variété centrale globale. On en déduit ensuite l'attractivité locale de $\mathcal{V}$ pour le champ (1). Une démonstration très détaillée du théorème de la variété centrale se trouve dans [2].

# 3 Variété centrale en présence de paramètre

On considère maintenant une famille de champs de vecteurs de classe $C^k$ dans $\mathbb{R}^n$ pour $(Z, \mu)$ est voisin de 0 dans $\mathbb{R}^{n+m}$ :

$$\frac{dZ}{dt} = F(Z, \mu) \tag{13}$$

où $\mu \in \mathbb{R}^m$ est un paramètre voisin de 0. On suppose encore que

$$F(0, 0) = 0,$$

et on note

$$L = D_Z F(0, 0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$$

où on suppose que $L$ vérifie les mêmes propriétés qu'à la section précédente. Si 0 n'est pas valeur propre de $L$, on a alors une famille de solutions stationnaires $Z = Z(\mu)$ pour $\mu$ voisin de 0 (thm. des fonctions implicites). En revanche, si 0 est valeur propre de $L$ alors le point fixe qui est en 0 pour $\mu = 0$ peut ne pas persister pour certaines valeurs de $\mu$ voisines de 0. On peut en fait considérer (13) comme un cas particulier du cas étudié à la section précédente en introduisant

$$\widetilde{Z} = (Z, \mu) \in \mathbb{R}^{n+m}$$

et le système

$$\frac{d\widetilde{Z}}{dt} = \widetilde{F}(\widetilde{Z})$$

où

$$\widetilde{F}(\widetilde{Z}) = (F(Z, \mu), 0).$$

Il en résulte que

$$\widetilde{L} = D\widetilde{F}(0) = \begin{pmatrix} L & D_\mu F(0,0) \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

est tel que

$$\begin{aligned} \widetilde{\sigma}^+ &= \sigma^+, \ \ \widetilde{\sigma}^- = \sigma^-, \\ \widetilde{\sigma}_0 &= \sigma_0 \cup \{0\} \end{aligned}$$

avec les sous-espaces invariants associés

$$\begin{aligned}\widetilde{E}_\pm &= \{(Z,0); Z \in E^\pm\},\\ \widetilde{E}_0 &= \{(X - L_h^{-1}D_\mu F_h(0,0)\mu, \mu); X \in E_0, \mu \in \mathbb{R}^m\},\end{aligned}$$

où $F_h = P_h F$. On peut ainsi appliquer le théorème de la variété centrale pour le champ de vecteurs dans $\mathbb{R}^{n+m}$ :

**Théorème de la variété centrale pour un champ perturbé** (cas $\sigma^+$ non vide).

*Il existe un voisinage de 0* $\mathcal{O}_Z \times \mathcal{O}_\mu$ *dans* $\mathbb{R}^{n+m}$ *et une application* $\Psi \in C^k(E_0 \times \mathbb{R}^m, E_h)$ *avec* $\Psi(0,0) = 0$ *et* $D_X\Psi(0,0) = 0$ *telle que pour* $\mu \in \mathcal{O}_\mu$*, les variétés*

$$\mathcal{V}_0(\mu) = \{Z = X + \Psi(X,\mu); \quad X \in E_0,\ Z \in \mathcal{O}_Z\}$$

*soient localement invariantes pour le flot de (13) et contiennent toutes les solutions qui restent dans* $\mathcal{O}_Z$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$.

On note qu'ici $D\Psi(0,0) \neq 0$ en général, puisqu'on a incorporé le terme $-L_h^{-1}D_\mu F_h(0,0)\mu$ dans $\Psi$.

Lorsqu'on cherche les solutions qui restent voisines de 0 pour tout $t$, il suffit donc d'étudier le système réduit

$$\frac{dX}{dt} = P_0 F(X + \Psi(X,\mu), \mu) \stackrel{def}{=} f(X,\mu)$$

où on observe que $f(0,0) = 0$, et la dérivée à l'origine $D_X f(0,0) = L_0$ a toutes ses valeurs propres sur l'axe imaginaire. L'étude locale systématique de tels systèmes est faite plus loin grâce à la *théorie des formes normales.*

# 4 Variétés invariantes en dimension infinie

On suppose maintenant que l'on a un triplet d'espaces de Banach avec injections continues, tels que

$$D \hookrightarrow K \hookrightarrow H,$$

et on considère maintenant un champ de vecteurs dans $H$, de la forme

$$\frac{dZ}{dt} = LZ + R(Z) \tag{14}$$

où on suppose que $L \in \mathcal{L}(D,H)$, et $R \in C^k(D,K)$ au voisinage de 0, $k \geq 2$. Une solution de (14) est une fonction $t \mapsto Z(t)$ continue dans $D$, telle que $dZ/dt$ vérifie l'équation (donc est continu dans $H$). Les résultats que nous allons mentionner peuvent s'étendre au cas où $K = H$, mais c'est plus technique.

## 4.1 Variétés stable et instable

On suppose que le spectre $\sigma$ de $L$ vérifie

**Hypothèse $\mathbf{H}_1$** :

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma^+ \cup \sigma^-,\\ \sigma^+ &= \{\lambda \in \sigma; \operatorname{Re}\lambda > 0\} \textit{borné dans } \mathbb{C},\\ \sigma^- &= \{\lambda \in \sigma; \operatorname{Re}\lambda < 0\},\end{aligned}$$

*avec* $\gamma > 0$ tel que

$$\min_{\lambda\in\sigma^+}(\mathrm{Re}\,\lambda) > \gamma, \quad \sup_{\lambda\in\sigma^-}(\mathrm{Re}\lambda) < -\gamma.$$

Il en résulte qu'on peut définir les projections $P_+$ (par l'intégrale de Dunford (2)) et $P_- = \mathbb{I} - P_+$ sur les sous-espaces invariants $E_+$ et $E_-$ et les restrictions de $L$ à ces sous-espaces, telles que le spectre de $L_+$ soit $\sigma^+$ et le spectre de $L_-$ soit $\sigma^-$. L'exponentielle $e^{L_+t}$ a alors les mêmes propriétés que dans le cas de la dimension finie (donc définie pour $t \leq 0$ et $t > 0$) sur le sous-espace $E_+$ (qui peut être de dimension infinie). Notamment on a $E_+ \subset D$ et

$$k_1 e^{\gamma t}||X||_{E_+} \geq ||e^{L_+t}X||_{E_+} \text{ pour } t \leq 0.$$

Pour définir l'exponentielle $e^{L_-t}$ pour $t > 0$, on doit faire des hypothèses supplémentaires. En fait on fait de plus l'hypothèse suivante

**Hypothèse $\mathbf{H}_2$** : *le problème linéaire*

$$\frac{dY}{dt} = L_-Y + f$$

*où* $f \in C^0(\mathbb{R}^+, P_-K)$, *vérifie*

$$\sup_{t>0} e^{\eta t}||f(t)||_K < \infty \text{ pour un certain } \eta \in [0, \gamma],$$

*admet une solution unique* $Y = \mathcal{K}f \in C^0(\mathbb{R}^+, P_-D)$, *et on a*

$$\sup_{t>0} e^{\eta t}||Y(t)||_D \leq c\left(\sup_{t>0} e^{\eta t}||f(t)||_K\right).$$

On remarque que les équations (5) et (6) ont un sens et permettent de trouver deux variétés invariantes $\mathcal{V}_I$ et $\mathcal{V}_S$ au voisinage de 0, comme en dimension finie. De plus, comme en dimension finie, si $Z(0) \notin \mathcal{V}_S$ (au vois. de 0), alors il existe $t_0 > 0$ fini tel que la solution $Z(t)$ de (14) sorte du voisinage de 0 pour $t > t_0$.

**Théorème:** *Avec les hypothèses $H_1$ et $H_2$ on a le même résultat qu'en dimension finie pour les variétés stable et instable.*

**Remarque:** Alors que dans la plupart des cas le système (14) n'a de solution du problème aux valeurs initiales, que pour $t \geq 0$, on note que si la condition initiale est sur la variété instable $\mathcal{V}_I$, alors on a une solution non seulement pour les valeurs de $t > 0$ jusqu'à ce que la solution $Z(t)$ quitte le voisinage de 0, mais aussi pour tout $t < 0$ ($Z(t) \to 0$ quand $t \to -\infty$).

## 4.2 Variété centrale

On suppose maintenant que le spectre de $L$ vérifie

**Hypothèse $\mathbf{H}_3$** :

$$\begin{aligned}
\sigma &= \sigma^+ \cup \sigma^0 \cup \sigma^- \\
\sigma^+ &= \{\lambda \in \sigma; \mathrm{Re}\,\lambda > 0\}, \\
\sigma^- &= \{\lambda \in \sigma; \mathrm{Re}\,\lambda < 0\}, \\
\sigma^0 &= \{\lambda \in \sigma; \mathrm{Re}\,\lambda = 0\},
\end{aligned}$$

*avec $\gamma > 0$ tel que*

$$\min_{\lambda\in\sigma^+}(\mathrm{Re}\,\lambda) > \gamma, \quad \sup_{\lambda\in\sigma^-}(\mathrm{Re}\lambda) < -\gamma.$$

*De plus, on suppose que $\sigma_0$ est composé d'un nombre fini de valeurs propres, de multiplicités finies.*

Il en résulte qu'on peut définir une projection $P_0$ (par l'intégrale de Dunford (2)) sur le sous-espace invariant $E_0$ où la restriction $L_0$ de $L$ aura un spectre identique à $\sigma_0$. On ne peut pas définir a priori des projections $P_+$ et $P_-$ sans hypothèse supplémentaire, car $\sigma^+$ et $\sigma_-$ sont non bornés. On peut néanmoins définir la projection

$$P_h = \mathbb{I} - P_0$$

sur le sous-espace invariant $E_h$ parallèlement à $E_0$ et on a dans $H$ :

$$\begin{aligned} H &= E_0 \oplus E_h, \\ \mathrm{Image}(P_h) &= E_h, \;\; \ker P_h = E_0, \\ \mathrm{Image}(P_0) &= E_0, \;\; \ker P_0 = E_h. \end{aligned}$$

De plus, les vecteurs propres et vecteurs propres généralisés étant dans $D$, on a

$$\begin{aligned} E_0 &\subset D, \quad P_h D = D_h \subset D \\ D &= E_0 \oplus D_h \end{aligned}$$

et les projections vérifient

$$\begin{aligned} P_0 &\in \mathcal{L}(H,D), \quad P_h \in \mathcal{L}(D) \cap \mathcal{L}(H), \\ P_0 L &= L P_0 \;, \;\; P_h L = L P_h \;\; \text{dans } D, \end{aligned}$$

c'est à dire que notamment la projection $P_0$ est régularisante. On note $L_h = L|_{D_h}$, $L_0 = L|_{E_0}$, et on note $K_h = P_h K$. On fait maintenant l'hypothèse supplémentaire suivante:

**Hypothèse $\mathbf{H}_4$** : *pour tout $\eta \in [0,\gamma]$ et pour tout $f \in BC_\eta(\mathbb{R}, K_h)$ le problème linéaire*

$$\begin{aligned} \frac{dZ_h}{dt} &= L_h Z_h + f, \\ Z_h &\in BC_\eta(\mathbb{R}, D_h), \end{aligned}$$

*admet une solution unique $Z_h = \mathcal{K}_h f$, où $\mathcal{K}_h \in \mathcal{L}[BC_\eta(\mathbb{R},K_h), BC_\eta(\mathbb{R},D_h)]$ pour chaque $\eta \in [0,\gamma]$ avec $C(\eta)$ continue sur $[0,\gamma]$ telle que*

$$||\mathcal{K}_h||_\eta \leq C(\eta).$$

On peut alors refaire la même démonstration qu'en dimension finie, d'existence d'une variété centrale, en considérant l'équation

$$Z(t) = e^{L_0 t}X + \int_0^t e^{L_0(t-s)} P_0 M_\rho[Z(s)]ds + [\mathcal{K}_h P_h M_\rho(Z)]\,(t) \qquad (15)$$

dans $BC_\eta(\mathbb{R}, D)$. Ceci est possible tant qu'on peut trouver une fonction cut-off $\chi : D \to \mathbb{R}$ avec les propriétés souhaitées de différentiabilité. Ces fonctions existent dans les Hilbert, mais pas toujours dans les Banach. Pour que le résultat s'applique sans restriction sur les espaces, on modifie la formulation de la façon suivante. On considère deux fonctions cut-off, une $\chi_0 \in C_b^\infty(E_0, \mathbb{R})$, et $\widetilde{\chi} \in C_b^\infty(\mathbb{R})$, et on définit un nouveau cut-off sur $D$

$$\chi(Z) \stackrel{def}{=} \chi_0(P_0 Z)\widetilde{\chi}(||P_h Z||)$$

qui est ainsi dans $C_b^{0,1}(D, \mathbb{R})$. Alors

$$M_\rho(Z) = \chi(\rho^{-1}Z)R(Z) \in C_b^{0,1}(D, K),$$

avec la propriété que si $P_h Z \in V_\rho = \{Z \in D; ||P_h Z|| \leq \rho\}$ alors

$$M_\rho(Z) = \chi_0(\rho^{-1}P_0 Z)R(Z) \in C_b^k(V_\rho, K).$$

L'argument de point fixe sur l'équation (15) est alors le même qu'en dimension finie. Pour montrer la régularité, il faut remarquer que si $P_0 Z \in BC_\eta(\mathbb{R}, E_0)$ alors $P_h\Phi[P_0 Z(0)]$ vérifie

$$||P_h \Phi[P_0 Z(0)]||_{D_h} \leq ||\mathcal{K}_h||_0 \sup_{t \in \mathbb{R}} ||P_h M_\rho(Z)||_{K_h} = o(\rho)$$

ainsi le $Z(t)$ qui correspond à la variété centrale globale, reste dans $V_\rho$, ce qui permet d'utiliser à fond la régularité de $M_\rho$ dans $V_\rho$, et permet de procéder comme en dimension finie.

**Théorème:** *Avec les hypothèses $H_3$ et $H_4$ on a ainsi le même résultat qu'en dimension finie* (détails de la démonstration dans [3]).

*Remarque 1*: l'avantage est qu'en partant d'un problème en dimension infinie, on s'est ramené, pour l'étude des solutions qui restent voisines de 0, à un système réduit, de même dimension (finie) que $E_0$.

*Remarque 2:* des versions plus générales en dimension infinie se trouvent dans [6] et [7]. On y permet notamment au terme non linéaire $R(Z)$ de prendre ses valeurs dans $H$. Il faut alors prendre des espaces de fonctions où la dépendance en $t$ est (par exemple) Hölderienne.

*Remarque 3:* Il peut arriver qu'on arrive à construire une projection $P_0$ avec un sous-espace central $E_0$ de dimension infinie, et une propriété de groupe pour $e^{L_0 t}$ à croissance sous-exponentielle. Alors, si le cut-off régulier $\chi_0$ existe, on aura une variété centrale de dimension infinie, encore paramétrée par $E_0$.

Pour les systèmes dépendant de paramètres, on adapte la démonstration, comme en dimension finie, ce qui est notamment facile si la dépendance en $\mu$ intervient par une modification du champ de vecteurs, à valeurs dans l'espace $K$. Pour une dépendance plus "forte" en $\mu$, il faut faire preuve de plus de doigté.

### 4.3 Présence de symétries

Supposons qu'il existe un opérateur $T \in \mathcal{L}(H) \cap \mathcal{L}(D)$ qui commute avec le champ de vecteurs:

$$\begin{aligned} TLZ &= LTZ, \\ TR(Z) &= R(TZ). \end{aligned}$$

On en déduit que les sous-espaces $E_0$ et $E_h$ sont invariants par $T$. On note $T_0$ la restriction de $T$ à $E_0$. Si, les hypothèses $\mathrm{H}_3$ et $\mathrm{H}_4$ sont vérifiées, alors que peut-on dire des variétés centrales du système (14)? L'unicité de la variété centrale globale, pour le système modifié par la fonction cut-off $\chi$, implique que si l'équation (15) est équivariante par $T$, alors la variété est elle-même invariante par $T$. Pour assurer cette propriété, il est suffisant que $\chi$ vérifie

$$\chi(TZ) = \chi(Z).$$

D'après la forme choisie pour $\chi$, cette invariance du cut-off est possible notamment si $T_0$ *est une isométrie sur* $E_0$, car il est possible de construire $\chi_0$ invariant par les isométries de $E_0$ (dim finie), et que $T$ a un inverse borné dans $D$. En revenant au système au voisinage de 0, on a alors le résultat suivant

**Théorème de la variété centrale en présence de symétrie**. *Si les hypothèses $H_3$ et $H_4$ sont vérifiées, et que le système commute avec un opérateur linéaire $T \in \mathcal{L}(H) \cap \mathcal{L}(D)$, tel que la restriction $T_0$ de $T$ au sous-espace $E_0$ soit une isométrie, et que $T$ ait un inverse borné dans $D$, alors on a une variété centrale $\mathcal{V}_0$ invariante par $T$ :*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{V}_0 & : & Z = X + \Psi(X), \quad X \in E_0, \\ T\Psi(X) & = & \Psi(T_0 X). \end{array}$$

*De plus, l'équation réduite, qui régit la dynamique sur $\mathcal{V}_0$ :*

$$\frac{dX}{dt} = f(X)$$

*est telle que $T_0 f(X) = f(T_0 X)$.*

Cette propriété est très utile chaque fois que le système (14) est invariant par un goupe de symétries.

**Cas des systèmes réversibles**. Les systèmes réversibles sont ceux où l'on a une symétrie $S$ vérifiant

$$\begin{array}{rcl} S^2 & = & \mathbb{I}, \;\; S \neq \mathbb{I}, \\ SL & = & -LS, \;\; SR(Z) = -R(SZ), \end{array}$$

i.e. $S$ anticommute avec le champ de vecteurs. Il en résulte que si $Z(t)$ est solution de (14), alors $SZ(-t)$ est aussi solution du système. De plus le spectre de $L$ est symétrique par rapport aux deux axes du plan complexe. Notamment, si $\lambda$ est valeur propre de $L$ avec un vecteur propre $\zeta$, alors $-\lambda$ est aussi valeur propre associée au vecteur propre $S\zeta$.

Si les hypothèses $H_3$ et $H_4$ sont vérifiées, alors comme on peut supposer que $S_0 = S|_{E_0}$ est une isométrie, l'argument développé ci-dessus permet d'assurer l'existence d'une variété centrale invariante par $S$ :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{V}_0 & : & Z = X + \Psi(X), \quad X \in E_0, \\ S\Psi(X) & = & \Psi(S_0 X). \end{array}$$

*De plus, l'équation réduite, qui régit la dynamique sur $\mathcal{V}_0$ :*

$$\frac{dX}{dt} = f(X)$$

*est encore un système réversible: $S_0 f(X) = -f(S_0 X)$.*

# 5 Exemples de base

## 5.1 Propriétés spectrales suffisantes

Donnons ici quelques hypothèses générales sur l'opérateur linéaire $L$, qui permettent d'entrer dans le cadre des théorèmes précédents.

On suppose que l'opérateur $L$ est fermé dans $H$, de domaine $D$ (qu'on munit de la norme du graphe de $L$) (cf [8]). Les injections suivantes sont supposées continues

$$D \hookrightarrow K \hookrightarrow H$$

avec les hypothèses suivantes

i) $\sigma_0$ consiste en un ensemble fini de valeurs propres isolées de multiplicités finies.

ii) Il existe $\omega_0 > 0$, $c > 0$, et $\alpha \in [0, 1[$ tels que pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, vérifiant $|\omega| \geq \omega_0$, on a $i\omega$ dans l'ensemble résolvant de $L$, et

$$\begin{aligned} ||(i\omega - L)^{-1}||_{\mathcal{L}(H)} &\leq \frac{c}{|\omega|}, \\ ||(i\omega - L)^{-1}||_{\mathcal{L}(K,D)} &\leq \frac{c}{|\omega|^{1-\alpha}}. \end{aligned} \tag{16}$$

On donne plus bas des exemples où ces hypothèses sont vérifiées. Il faut noter que le cas le "pire" est lorsque $K = H$, qui signifie une perte de régularité dans les termes non linéaires égale à celle des termes linéaires. Dans ce cas, $\alpha = 1$, et il est nécessaire d'utiliser un raffinement de la démonstration des théorèmes ci-dessus, notamment en considérant des fonctions Hölder-continues dans $D$, au lieu de simplement continues.

On déduit de l'hypothèse (16) qu'il existe $\delta > 0$ et $M > 0$ tels que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$$|\operatorname{Re} \lambda| \leq \delta(1 + |\operatorname{Im} \lambda|)$$

alors $\lambda$ est dans l'ensemble résolvant de $L_h$ et

$$\begin{aligned} ||(\lambda - L_h)^{-1}||_{\mathcal{L}(H_h)} &\leq \frac{M}{1 + |\lambda|}, \\ ||(\lambda - L_h)^{-1}||_{\mathcal{L}(K_h,H_h)} &\leq \frac{M}{(1 + |\lambda|)^{1-\alpha}}. \end{aligned} \tag{17}$$

En passant, on voit que l'hypothèse $\mathrm{H}_3$ de la section 4.2 précédente est vérifiée. On considère alors deux courbes $\Gamma_+$ et $\Gamma_-$ dans $\mathbb{C}$ définies par

$$\begin{aligned} \Gamma_+ &= \{-\delta|\omega| + i\omega; \ \ \omega \in \mathbb{R}\}, \\ \Gamma_- &= \{\delta|\omega| + i\omega; \ \ \omega \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

orientées de façon que $\omega$ croisse pour $\Gamma_+$, et que $\omega$ décroisse pour $\Gamma_-$ ($\Gamma_+$ et $\Gamma_-$ sont dans l'ensemble résolvant de $L_h$). On peut alors définir pour $t > 0$

$$S_+(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_+} e^{\lambda t} (\lambda - L_h)^{-1} d\lambda \in \mathcal{L}(H_h, D_h)$$

et on a

$$\frac{d^n S_+(t)}{dt^n} = (L_h)^n \, S_+(t), \text{ pour tout } n \geq 1.$$

De même, on peut définir pour $t < 0$

$$S_-(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_-} e^{\lambda t} (\lambda - L_h)^{-1} d\lambda \in \mathcal{L}(H_h, D_h)$$

avec

$$\frac{d^n S_-(t)}{dt^n} = (L_h)^n \, S_-(t), \text{ pour tout } n \geq 1.$$

On montre que

$$\begin{aligned} \text{dans } D_h \text{ on a } L_h S_+(t) &= S_+(t) L_h, \; t > 0, \\ \text{dans } D_h \text{ on a } L_h S_-(t) &= S_-(t) L_h, \; t < 0, \end{aligned}$$

et les limites suivantes existent

$$\begin{aligned} P_- &= \lim_{t \to 0^+} S_+(t)|_{K_h} \in \mathcal{L}(K_h, H_h) \\ P_+ &= \lim_{t \to 0^-} S_-(t)|_{K_h} \in \mathcal{L}(K_h, H_h) \end{aligned}$$

et

$$(P_+ + P_-) \, Z = Z, \text{ pour tout } Z \in K_h.$$

De plus, si $\alpha \in ]0, 1[$, on a les estimations (si $\alpha = 0$, on peut le remplacer par $\alpha > 0$ dans $(17)_2$)

$$\begin{aligned} ||S_+(t)||_{\mathcal{L}(K_h, D_h)} &\leq M(\alpha)(1 + t^{-\alpha}) e^{-\gamma t}, \quad t > 0, \\ ||S_-(t)||_{\mathcal{L}(K_h, D_h)} &\leq M(\alpha)(1 + |t|^{-\alpha}) e^{-\gamma |t|}, \quad t < 0. \end{aligned}$$

Grâce à ces estimations on peut alors montrer que le problème linéaire

$$\frac{dZ}{dt} = L_h Z + f(t)$$

où $f \in BC_\eta(\mathbb{R}, K_h)$ avec $\eta \in [0, \gamma]$ a une solution unique $Z_h \in BC_\eta(\mathbb{R}, D_h)$ donnée par

$$Z_h(t) = (\mathcal{K}_h f)(t) = \int_{-\infty}^{t} S_+(t - s) f(s) ds - \int_{t}^{\infty} S_-(t - s) f(s) ds,$$

et $\mathcal{K}_h \in \mathcal{L}(BC_\eta(\mathbb{R}, K_h), BC_\eta(\mathbb{R}, D_h))$. On a donc bien vérifié l'hypothèse $\mathrm{H}_4$ de la section 4.2 précédente (détails dans [3]).

## 5.2 Problèmes d'évolution

Dans de nombreux cas, l'équation (14) représente un système parabolique, et $L$ est le générateur d'un semi-groupe analytique. Cela correspond aux hypothèses suivantes:

L'opérateur linéaire $L$ dans $H$, est fermé, de domaine dense $D$ et tel que

i) $\sigma \cap i\mathbb{R}$ consiste en un nombre fini de valeurs propres isolées de multiplicités finies.

ii) Il existe $a \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $c > 0$ tels que si $\lambda \in \mathbb{C}$ vérifie

$$\operatorname{Re} \lambda \geq a - \delta |\operatorname{Im} \lambda|$$

alors $\lambda$ est dans l'ensemble résolvant de $L$ et

$$||(\lambda - L)^{-1}||_{\mathcal{L}(H)} \leq \frac{c}{1+|\lambda|}.$$

$L$ est alors le générateur d'un semi-groupe analytique (cf. [8]) $\{e^{Lt}; t \geq 0\}$ d'opérateurs linéaires bornés sur $H$. On note que $(17)_1$ est alors automatimement vérifiées. Pour vérifier $(17)_2$, on peut par exemple considérer un espace $K$ pour $R(Z)$, tel que

$$K = Domaine\left\{(a\mathbb{I} - L)^{1-\alpha}\right\}$$

où les puissances fractionnaires de $(a\mathbb{I} - L)$ (opérateur maximal-acrétif) sont définies par exemple dans [8]. Dans le cas du générateur de semi-groupe analytique, on peut effectivement définir la projection $P_- \in \mathcal{L}(H) \cap \mathcal{L}(D)$, et c'est précisemment le prolongement de $P_-$ défini à la section précédente.

Dans un tel cas, les hypothèses $H_2$ et $H_4$ peuvent être vérifiées, et les théorèmes précédents s'appliquent.

## 5.3 Exemples simples

### 5.3.1 Exemple 1

On considère le système parabolique

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u + g(u, \frac{\partial u}{\partial x}), \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, \quad (x,t) \in (0,\pi) \times \mathbb{R}, \end{aligned}$$

où $g \in C^k(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $k \geq 2$, et $g(u,v) = O(|u|^2 + |v|^2)$ pour $u$ et $v$ tendant vers 0. Dans cet exemple on peut prendre $H = L^2(0,\pi)$, $D = H^2(0,\pi) \cap H_0^1(0,\pi)$, $Z(t) = u(\cdot,t)$, et pour $u \in D$

$$Lu = \frac{d^2 u}{dx^2} + u \in H.$$

Comme $H^1(0,\pi) \subset C^0[0,\pi]$, on voit que si $u \in D$, alors $g(u, \frac{\partial u}{\partial x}) \in K \overset{def}{=} H^1(0,\pi)$ et l'application

$$u \mapsto g(u, \frac{\partial u}{\partial x}) \in C^{k-1}(D,K).$$

Le spectre de $L$ consiste en valeurs propres simples isolées $\{1 - n^2; n = 1,2,...\}$ : 0 est valeur propre et toutes les autres sont négatives. Dans cet exemple $L$ est générateur d'un semi-groupe analytique et on montre que (17) est vérifiées avec $\alpha = 3/4$. On peut donc appliquer les théorèmes ci-dessus, notamment ici la dynamique au voisinage de l'origine se réduit à celle d'une équation différentielle scalaire ($E_0$ de dimension 1).

### 5.3.2 Exemple 2

On considère le système elliptique suivant vu comme un système dynamique où le temps est $x$ (cf [5])

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu u + g(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}), \\ u(x,0) &= u(x,\pi) = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R} \times (0,\pi), \end{aligned}$$

où on suppose que $g \in C^k(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, avec $g(u,v,w) = O(|u|^2 + |v|^2 + |w|^2)$ quand $(u,v,w) \to 0$. Dans cet exemple on choisit

$$\begin{array}{rcl} H & = & H_0^1(0,\pi) \times L^2(0,\pi) \\ D & = & \left[H^2(0,\pi) \cap H_0^1(0,\pi)\right] \times H_0^1(0,\pi) \end{array}$$

et $Z(x) = (u_1, u_2)(x, \cdot)$ vérifie

$$\frac{dZ}{dx} = LZ + R(Z)$$

avec

$$LZ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{d^2}{dy^2} - \mu & 0 \end{pmatrix} Z,$$

$$Z \mapsto R(Z) = \begin{pmatrix} 0 \\ -g(u_1, u_2, \frac{du_1}{dy}) \end{pmatrix} \in C^{k-1}(D, K)$$

avec

$$K = \left[H^2(0,\pi) \cap H_0^1(0,\pi)\right] \times H^1(0,\pi).$$

Le spectre de $L$ est constitué de valeurs propres (simples si $\neq 0$) isolées, de la forme

$$\{\lambda_n^{\pm} = \pm\sqrt{n^2 - \mu}; n = 1, 2, ...\}.$$

Pour $\mu \neq p^2$ quelque soit $p$ entier, les valeurs propres sont simples, réelles sauf un nombre fini sur l'axe des imaginaires. Pour $\mu = p^2$ avec $p$ entier non nul, 0 est valeur propre double (non semi-simple), et pour $n < p$ les valeurs propres $\lambda_n^{\pm}$ sont imaginaires, tandis que pour $n > p$ elles sont réelles symétriques par rapport à l'axe imaginaire. Ici encore on montre que (17) est vérifié pour $\alpha = 1/2$. On peut donc appliquer le théorème de la variété centrale, qui réduit l'étude des solutions qui sont bornées ("petites") pour $x \in \mathbb{R}$ à l'étude d'une équation différentielle ordinaire de dimension égale à la dimension de $E_0$. Les cas particulièrement intéressants sont ceux où $\mu$ est voisin d'une valeur $\mu_0 = p^2$. Dans ces cas, c'est la version "perturbée" du théorème qui s'applique (voir section 3 adaptée au cas de la dimension infinie). On verra plus loin comment on peut résoudre ce type de problème (formes normales).

### 5.3.3 Exemple 3

On considère le système hyperbolique suivant

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} & = & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\delta \dfrac{\partial u}{\partial t} + (1+\mu)u + g(u), \\ u(0,t) & = & u(\pi,t) = 0, \quad (x,t) \in (0,\pi) \times \mathbb{R}^+, \end{array}$$

où $0 < \delta < \sqrt{3}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $g$ de classe $C^k$, $k \geq 2$, $g(u) = O(|u|^2)$ quand $u \to 0$. On peut réécrire ce système sous la forme

$$\frac{dZ}{dt} = LZ + R(Z, \mu)$$

avec $Z(t) = (u_1, u_2)(\cdot, t)$ et

$$LZ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{d^2}{dx^2} + 1 & -2\delta \end{pmatrix} Z,$$

$$R(Z,\mu) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu u_1 + f(u_1) \end{pmatrix}.$$

Ici on peut prendre

$$\begin{aligned} H &= H_0^1(0,\pi) \times L^2(0,\pi), \\ D &= \left[H^2(0,\pi) \cap H_0^1(0,\pi)\right] \times H_0^1(0,\pi) \end{aligned}$$

et $Z \mapsto R(Z,\mu)$ est de classe $C^{k-1}$ de $D$ dans lui-même! Le spectre de $L$ est composé de valeurs propres simples isolées telles que

$$\{\lambda_0 = 0, \lambda_1 = -2\delta\} \cup \{\lambda_n, \overline{\lambda}_n; n \geq 2\}$$

avec $\lambda_n = -\delta + i(n^2 - 1 - \delta^2)^{1/2}$. A part 0, les valeurs valeurs propres vérifient $\mathrm{Re}\,\lambda \leq -\delta$, et on peut montrer (cf. [3]) que la restriction $L_-$ de $L$ au sous-espace $E_-$ (engendré par les vecteurs propres relatifs aux valeurs propres de Re $< 0$) est le générateur d'un *semi-groupe fortement continu* $e^{L_- t}$ vérifiant

$$||e^{L_- t}||_{\mathcal{L}(H_-)} \leq M e^{-\delta t}, t \geq 0.$$

Il en résulte que le problème linéaire (cf hypothèse $H_4$)

$$\frac{dZ_-}{dt} = L_- Z + f(t)$$

où $f \in BC_\eta(\mathbb{R}, D_-)$ a une solution unique $Z_- \in BC_\eta(\mathbb{R}, D_-)$ pour tout $\eta \in [0, \delta[$ donnée par

$$Z_-(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{L_-(t-s)} f(s) ds,$$

et l'on peut appliquer les théorèmes précédents. La dynamique au voisinage de 0, pour $t > 0$ est donc régie par une équation différentielle scalaire, puisque la variété centrale est attractive et de dimension 1 (cas $\sigma^+$ vide).

## 5.4 Autres exemples

### 5.4.1 Navier-Stokes

Considérons le système qui régit la vitesse $V(t,x)$ des particules et la pression $p(t,x)$ au sein d'un fluide visqueux incompressible dans un domaine borné régulier $\Omega$ de $\mathbb{R}^3$ (ou $\mathbb{R}^2$)

$$\left.\begin{array}{c} \frac{\partial V}{\partial t} + (V.\nabla)V + \nabla p = \nu \Delta V + f(x), \\ \nabla . V = 0, \end{array}\right\} \quad x \in \Omega$$

$$V|_{\partial\Omega} = a, \qquad \int_{\partial\Omega} a.n dS = 0,$$

où $f$ et $a$ sont donnés et sont supposés dépendre de paramètres $\mu \in \mathbb{R}^m$. On suppose qu'on a une famille de solutions stationnaires régulières $(V_\mu^{(0)}, p_\mu^{(0)})(x)$ du système ci-dessus, et on pose

$$\begin{aligned} V &= V_\mu^{(0)} + U, \\ p &= p_\mu^{(0)} + q \end{aligned}$$

pour aboutir au nouveau système

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t}+\nabla q &= \nu\Delta U-(V_\mu^{(0)}.\nabla)U-(U.\nabla)V_\mu^{(0)}-(U.\nabla)U, \qquad (18)\\ \nabla.U &= 0,\quad U|_{\partial\Omega}=0,\end{aligned}$$

que l'on écrit sous la forme (14) en procédant de la façon suivante. On commence par définir

$$H=\{U\in\left[L^2(\Omega)\right]^3;\nabla.U=0,U.n|_{\partial\Omega}=0\}$$

dont on peut montrer qu'il a un sens (la trace $U.n|_{\partial\Omega}$ est dans $H^{-1/2}$). Alors la projection $\Pi_0$ orthogonale dans $\left[L^2(\Omega)\right]^3$ sur le sous-espace fermé $H$ a un noyau constitué des $\nabla\phi$ avec $\phi\in H^1(\Omega)$. Il en résulte que l'on peut éliminer le terme $\nabla q$ dans l'équation (18) en projetant cette équation par $\Pi_0$ sur $H$. On a ainsi

$$\begin{aligned}D &= \{U\in\left[H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right]^3;\nabla.U=0\},\\ D &\hookrightarrow K\overset{def}{=}\{U\in H;U\in\left[H^1(\Omega)\right]^3\}\hookrightarrow H\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}LU &= \Pi_0\left[\nu\Delta U-(V_\mu^{(0)}.\nabla)U-(U.\nabla)V_\mu^{(0)}\right],\\ R(U) &= -\Pi_0\left[(U.\nabla)U\right]\in K.\end{aligned}$$

On peut alors montrer que $L$ est le générateur d'un semi-groupe analytique $e^{Lt}$ pout $t>0$, et que (16) est vérifié pour $\alpha=3/4$ (cf ref dans [9]). Le spectre de $L$ est formé uniquement de valeurs propres isolées, de multiplicités finies, situées dans un secteur, centré sur l'axe réel, orienté du coté des réels négatifs. On est donc bien dans les conditions d'application des théorèmes précédents, et ceci est utilisé extensivement en théorie des instabilités hydrodynamiques non linéaires.

*Remarque 1:* La formulation précédente pour (18) s'applique également dans les cas où le domaine est un domaine périodique, comme dans de nombreux problèmes classiques d'hydrodynamique (cf. [9]).

*Remarque 2:* On peut encore considérer les équations de Navier-Stokes stationnaires (solutions indépendantes de $t$), ou même périodiques de $t$ comme un système elliptique dans un cylindre (ou une bande) comme à l'exemple 2 de la section précédente, où une variable d'espace ($x$) joue le rôle de variable d"'évolution". Ceci permet notamment d'atteindre une description explicite des comportements à l'infini des solutions (cf. par ex. [9] et les références citées au chapitre 8 de ce livre).

### 5.4.2 Théorie des vagues

On considère les ondes progressives (vitesse $c$) dans une couche de fluide parfait incompressible, en écoulement potentiel, soumise à l'action de la pesanteur, reposant sur un plan, et ayant une surface libre en contact avec l'air à pression supposée constante. On ne néglige pas les effets de tension de surface. Utilisons les variables de Levi-Civita pour écrire les équations dans un domaine fixe (il s'agit des équations d'Euler, dans le cas des écoulements potentiels bidim. stationnaires quand on écrit les équations dans le référentiel en mouvement (vitesse uniforme $c$)). Il est classique d'introduire le potentiel complexe

$$w(\xi+i\eta)=x+iy$$

fonction analytique de $\xi + i\eta$ dans le domaine de l'écoulement, où $\xi$ et $\eta$ sont les coordonnées physiques et où $x$ est le potentiel des vitesses, et $y$ la fonction de courant. Les nouvelles coordonnées sont $(x, y)$ et par construction $y \in (-1/b, 0)$, $x \in \mathbb{R}$, et les paramètres du problèmes sont

$$\lambda = \frac{gh}{c^2}, \quad b = \frac{T}{\rho h c^2},$$

où $h$ est l'épaisseur de la couche au repos, et $T$ la tension de surface. On introduit alors les fonctions $\alpha$ et $\beta$ de $(x, y)$ telles que

$$w'(\xi + i\eta) = e^{-i(\alpha + i\beta)},$$

ainsi $\alpha$ est la pente des lignes de courant, et $\beta = \ln |U|$ et $\alpha$ et $\beta$ sont alors des fonctions harmoniques conjuguées dans la bande représentant le domaine transformé. La condition aux limites à la surface libre (donnée ici par l'intégrale première de Bernoulli et la condition sur la pression) fournit la non linéarité du problème. En notant

$$[Z(x)]\,(y) = (\alpha_0(x), \alpha(x, y), \beta(x, y))^t$$

et l'espace $D$ étant défini par

$$D = \mathbb{R} \times \left\{W^{1,1}(-1/b, 0)\right\}^2 \cap \{\alpha_0 = \alpha|_{y=0}, \alpha|_{y=-1/b} = 0\}$$

les équations deviennent

$$\frac{dZ}{dx} = F(Z, \lambda, b) \tag{19}$$

dans

$$H = \mathbb{R} \times \left\{L^1(-1/b, 0)\right\}^2$$

avec

$$F(Z, \lambda, b) = \left\{ \begin{array}{c} \sinh \beta_0 + \lambda b e^{-\beta_0} \int_{-1/b}^{0} (e^{-\beta} \cos \alpha - 1) dy \\ \left. \begin{array}{c} \frac{\partial \beta}{\partial y} \\ -\frac{\partial \alpha}{\partial y} \end{array} \right\} - 1/b < y < 0 \end{array} \right. .$$

Le système (19) est réversible, avec la symétrie $S$ définie par

$$SZ = (-\alpha_0, -\alpha, \beta)^t.$$

Le spectre de l'opérateur $L = D_Z F(0, \lambda, b)$ est constitué de valeurs propres isolées $\sigma$, de multiplicités finies, qui vérifient l'équation dite "de dispersion" pour $k = -i\sigma$

$$(\lambda b + k^2) \tanh(k/b) - k = 0,$$

On montre qu'il n'y a pas plus de 4 valeurs propres imaginaires, toutes 4 en 0 pour $\lambda = 1$ et $b = 1/3$. De plus, l'estimation de la résolvante $(16)_1$ est vérifiée, et on a ici $K = D$. On peut donc utiliser le théorème de la variété centrale, et ramener l'étude des "petites" (i.e. voisines de 0) solutions (pour $x \in \mathbb{R}$) à celles d'une équation différentielle ordinaire de dimension au plus 4 (cf. [10]).

### 5.4.3 Ondes dans les réseaux unidimensionnels

On considère un réseau unidimensionnel d'oscillateurs qui interagissent avec leurs plus proches voisins, de la forme suivante ($V$ est le potentiel, identique pour tous les oscillateurs)

$$\frac{d^2X_n}{d\tilde{t}^2} + V'(X_n) = \gamma(X_{n+1} - 2X_n + X_{n-1}), \quad n \in \mathbb{Z}$$

où l'on cherche des solutions de la forme $X_n(\tau t) = x(t-n)$, où $\tau$ représente l'inverse de la vitesse de l'onde progressive. Ainsi $x(t)$ vérifie une équation différentielle du 2nd ordre avec termes d'avance et de retard:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \tau^2 V'[x(t)] = \gamma\tau^2[x(t+1) - 2x(t) + x(t-1)], \tag{20}$$

où on suppose que $V(x) = \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)$. On montre que l'étude des petites solutions de (20) est analogue du cas d'un système elliptique dans une bande (exemple 2) (cf [11] pour les détails). On commence par définir

$$Z(t) = (x(t), \xi(t), X(t,\cdot))^t$$

où

$$\begin{aligned} X(t,v) &= x(t+v), \quad v \in [-1,1], \\ \xi(t) &= \dot{x}(t). \end{aligned}$$

L'equation (20) devient de la forme (14), avec

$$(x, \xi, X) \in D \overset{def}{=} \mathbb{R}^2 \times \left[C^1[-1,1] \cap \{X(0) = x\}\right]$$

et pour $Z \in D$

$$LZ = \begin{pmatrix} \xi \\ -\tau^2(1+2\gamma)x + \gamma\tau^2[X(1) + X(-1)] \\ \partial_v X \end{pmatrix} \in H,$$

$$R(Z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau^2 g(x) \\ 0 \end{pmatrix} \in D,$$

où $g(x)$ est régulier et $O(x^2)$ au voisinage de 0. On note que le système est réversible par la symétrie $S$ définie par

$$S(x, \xi, X) = (x, -\xi, X \circ s)$$

où $(X \circ s)(v) = X(-v)$. On peut alors montrer (cf. [11]) que le spectre de $L$ est constitué de valeurs propres $\lambda$ isolées, de multiplicités finies, solutions de l'équation

$$-\lambda^2 - \tau^2(1+2\gamma) + \gamma\tau^2(e^\lambda + e^{-\lambda}) = 0.$$

Seulement un nombre fini de valeurs propres peuvent être imaginaires, les autres étant dans un secteur exponentiel de la forme

$$|\operatorname{Im}\lambda| < \tau + 2\sqrt{\gamma\tau^2 + 4e^{-2}}\cosh(\operatorname{Re}\lambda/2).$$

On n'a donc pas d'estimation de la résolvante comme (16), puisque cela conduit à une contradiction pour la position des valeurs propres. En revanche on peut résoudre comme requis par l'hypothèse 4, le problème linéaire

$$\frac{dZ_h}{dt} = L_h Z_h + f(t)$$

où $f \in BC_\eta(\mathbb{R}, D)$, et $\eta > 0$ est assez proche de 0 (détails dans [11] où on définit la transformée de Fourier (distribution) de fonctions pouvant croître exponentiellement pour résoudre plus facilement le problème linéaire ci-dessus). On peut donc utiliser le théorème de la variété centrale ici encore, et se ramener à une équation différentielle ordinaire en dimension finie, pour l'étude des solutions qui restent petites pour $t \in \mathbb{R}$.

# References


[1] A.Vanderbauwhede, S.van Gils. Center manifolds and contractions on a scale of Banach spaces. J.Funct. Anal., **72**,2, 209-224, 1987.

[2] A.Vanderbauwhede. Centre manifolds, normal forms and elementary bifurcations. Dynamics Reported, **2**, 89-169. Kirchgraber, Walther eds., John Wiley and sons, B.Teubner 1989.

[3] A.Vanderbauwhede, G.Iooss. Center manifold theory in infinite dimensions. Dynamics Reported, 1 new series, 125-163. C.Jones, U.Kirchgraber, H.Walther eds., Springer Verlag 1992.

[4] G.Iooss, M.Adelmeyer. Topics in bifurcation theory and Applications. Adv. ser. Nonlinear Dynamics 3, World Sci. 1999 (nouvelle édition).

[5] K.Kirchgässner. Wave solutions of reversible systems and applications. J.Diff. Equ. 45, 113-127, 1982.

[6] A.Mielke. Reduction of quasilinear elliptic equations in cylindrical domains with applications. Math. Meth. Appl. Sci. 10, 51-66, 1988.

[7] P.Kirrmann. Reduktion nichtlinearer elliptischer Systeme in Zylindergebieten unter verwendung von optimaler Regularität in Hölder-Raümen. PhD thesis, Universität Stuttgart, 1991.

[8] T.Kato. Perturbation theory for linear operators. Springer-Verlag, Berlin 1966.

[9] P.Chossat, G.Iooss. The Couette-Taylor problem. Appl. Math. Sci. **102**, Springer-Verlag, 1994.

[10] F.Dias, G.Iooss. Water-waves as a spatial dynamical system. Handbook of Math. Fluid Dynamics. chap 10, p.443 -499. S.Friedlander, D.Serre Eds., Elsevier 2003.

[11] G.Iooss, K.Kirchgässner. Travelling waves in a chain of coupled nonlinear oscillators. Com. Math. Phys. **211**, 439-464, 2000.