Temps d'arrêt, formules de Feynman-Kac

Olivier FAUGERAS

9 décembre 2009

Plan

Plan

Temps d'arrêt

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et $\mathcal{F}(\cdot)$ une filtration.

Définition

Une v.a.r. positive τ est dite un temps d'arrêt par rapport à $\mathcal{F}(\cdot)$ si

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}(t) \quad \forall t \geq 0$$

Temps d'arrêt

Théorème

Soient τ_1 et τ_2 deux temps d'arrêt par rapport à $\mathcal{F}(\cdot)$. Alors on a

1. $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}(t)$ *et donc* $\{\tau = t\} \in \mathcal{F}(t)$ *pour tout* $t \geq 0$.
2. $\tau_1 \wedge \tau_2$ *et* $\tau_1 \vee \tau_2$ *sont des temps d'arrêt.*

Temps d'arrêt

On observe que

$$\{\tau < t\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{\{\tau \leq t - 1/k\}}_{\in \mathcal{F}(t-1/k) \subseteq \mathcal{F}(t)}$$

Temps d'arrêt

On observe aussi que

$$\{\tau_1 \wedge \tau_2 \le t\} = \{\tau_1 \le t\} \bigcup \{\tau_2 \le t\}$$

$$\{\tau_1 \vee \tau_2 \le t\} = \{\tau_1 \le t\} \bigcap \{\tau_2 \le t\}$$

Exemple : toucher un ensemble

On considère la solution de l'équation

$$\left\{ \begin{array}{rcl} d\mathbf{X} & = & \mathbf{b}(\mathbf{X}, t)\, dt + \mathbf{B}(\mathbf{X}, t)\, d\mathbf{W} \\ \mathbf{X}(0) & = & \mathbf{X}_0 \end{array} \right.$$

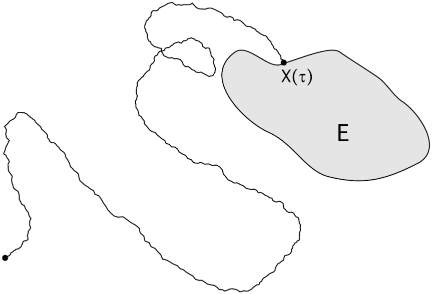
Exemple : toucher un ensemble

Théorème

Soit E un ensemble non vide ouvert ou fermé de $\mathbb{R}^n$. Alors

$$\tau = \inf\{t \geq 0 \,|\, \mathbf{X}(t) \in E\}$$

est un temps d'arrêt.



Exemple : toucher un ensemble

Soit $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ une suite dense de $[0, \infty[$.
Si E est un ouvert non vide U

$$\{\tau \leq t\} = \bigcup_{t_i \leq t} \underbrace{\{\mathbf{X}(t_i) \in U\}}_{\in \mathcal{F}(t_i) \subseteq \mathcal{F}(t)}$$

Si E est un fermé F, on note $x \to d(x, F)$ sa fonction distance (continue), et on définit la suite d'ouverts

$$U_n = \{x : d(x, F) < \frac{1}{n}\}$$

On a

$$\{\tau \leq t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{t_i \leq t} \underbrace{\{\mathbf{X}(t_i) \in U_n\}}_{\in \mathcal{F}(t_i) \subseteq \mathcal{F}(t)}$$

Intégrales stochastiques et temps d'arrêt

Définition

Si $G \in \mathbb{L}^2(0,T)$ *et* τ *est un temps d'arrêt tel que* $0 \leq \tau \leq T$ *alors*

$$\int_0^\tau G\,dW = \int_0^T \chi_{\{t \leq \tau\}} G\,dW$$

Intégrales stochastiques et temps d'arrêt

Lemme (Intégrales d'Itô avec temps d'arrêt)

Si $G \in \mathbb{L}^2(0, T)$ et τ est un temps d'arrêt tel que $0 \leq \tau \leq T$ alors

1.
$$\mathbb{E}\left[\int_0^\tau G\,dW = 0\right]$$

2.
$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^\tau G\,dW\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^\tau G^2\,dt\right]$$

Formule d'Itô avec des temps d'arrêt

Soit $d\mathbf{X} = \mathbf{b}(\mathbf{X}, t)\, dt + \mathbf{B}(\mathbf{X}, t)\, d\mathbf{W}$ et u une fonction C^2.
On a la formule d'Itô :

$$du(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial u}{\partial t}\, dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dX^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \sum_{k=1}^{n} B^{ik} B^{jk}\, dt$$

Sous forme intégrale :

$$u(\mathbf{X}(t), t) - u(\mathbf{X}(0), 0) = \int_0^t \left(\frac{\partial u}{\partial t} + Lu \right) ds + \int_0^t Du \cdot \mathbf{B}\, d\mathbf{W}$$

Formule d'Itô avec des temps d'arrêt

o'u L est l'opérateur différentiel

$$Lu = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i},\ a^{ij} = \sum_{k=1}^{n} B^{ik} B^{jk},$$

et

$$Du \cdot \mathbf{B}\, d\mathbf{W} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} u_{x_i} B^{ik}\, dW^k$$

Formule d'Itô avec des temps d'arrêt

L s'appelle le générateur.
Pour un ω fixé la formule intégrale est vraie pour $0 \leq t \leq T$ donc on peut prendre $t = \tau$, τ un temps d'arrêt tel que $0 \leq \tau \leq T$:

$$u(\mathbf{X}(\tau), \tau) - u(\mathbf{X}(0), 0) = \int_0^\tau \left(\frac{\partial u}{\partial t} + Lu \right) ds + \int_0^\tau Du \cdot \mathbf{B}\, d\mathbf{W}$$

Prenons l'espérance

$$\mathbb{E}\left[u(\mathbf{X}(\tau), \tau) - u(\mathbf{X}(0), 0)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^\tau \left(\frac{\partial u}{\partial t} + Lu \right) ds\right]$$

Exemple du Brownien

Dans le cas où $\mathbf{X} = \mathbf{W}$ on a

$$Lu = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = \frac{1}{2}\Delta u$$

Espérance du temps d'atteinte d'une frontière

Soit U un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière ∂U régulière. On sait qu'il existe une solution régulière u de

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\Delta u & = & 1 & \text{dans } U \\ u & = & 0 & \text{sur } \partial U \end{cases}$$

On définit $\mathbf{X}(\cdot) = x + \mathbf{W}(\cdot)$ et $\tau_x =$ le premier instant où $\mathbf{X}(\cdot)$ touche ∂U.

Théorème

$$u(x) = \mathbb{E}\left[\tau_x\right]$$

pour tout $x \in U$. Donc en particulier $u > 0$ dans U.

Espérance du temps d'atteinte d'une frontière

On utilise la formule précédente avec $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ et $Lu = \frac{1}{2}\Delta u$.

$$\mathbb{E}\left[u(\mathbf{X}(\tau_x \wedge n)) - u(\mathbf{X}(0))\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau_x \wedge n} \frac{1}{2}\Delta u\, ds\right] = -\mathbb{E}\left[\tau_x \wedge n\right]$$

Comme u est bornée

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\tau_x \wedge n\right] < \infty$$

τ_x est donc intégrable. En passant à la limite et en remarquant que $\mathbb{E}\left[u(\mathbf{X}(\tau_x))\right] = 0$ on a le résultat annoncé.

Représentation probabiliste des fonctions harmoniques

Soit U un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière ∂U régulière, $g : \partial U \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On sait qu'il existe une fonction $u \in C^2(U) \cup C(\overline{U})$, dite harmonique, telle que

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta u & = & 0 & \text{dans } U \\ u & = & g & \text{sur } \partial U \end{array} \right.$$

Représentation probabiliste des fonctions harmoniques

Théorème

$$u(x) = \mathbb{E}\left[g(\mathbf{X}(\tau_x))\right]$$

pour tout $x \in U$ *et* $\mathbf{X}(\cdot) = \mathbf{W}(\cdot) + x$

Preuve :
On a

$$\mathbb{E}\left[u(\mathbf{X}(\tau_x))\right] = \mathbb{E}\left[u(\mathbf{X}(0))\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau_x} \frac{1}{2} \Delta u(\mathbf{X}) ds\right] = \mathbb{E}\left[u(\mathbf{X}(0))\right] = u(x)$$

Formule de Feynman-Kac

On étend l'exemple précédent au problème

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\Delta u + cu & = & f & \text{dans } U \\ u & = & 0 & \text{sur } \partial U \end{cases}$$

Formule de Feynman-Kac

Théorème

Pour tout $x \in U$ on a

$$u(x) = \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau_x} f(\mathbf{X}(t))\, e^{-\int_0^t c(\mathbf{X}(s))\, ds}\, dt\right]$$

Formule de Feynman-Kac

Preuve :

- On pose $Z(t) = -\int_0^t c(\mathbf{X}(s))\,ds$ et $Y(t) = e^{Z(t)}$.
- La formule d'Itô donne $dY = -c(\mathbf{X})Ydt$.
- La formule du produit d'Itô

$$d\left(u(\mathbf{X})e^{-\int_0^t c(\mathbf{X}(s))\,ds}\right) = (du(\mathbf{X}))e^{-\int_0^t c(\mathbf{X}(s))\,ds} +$$

$$u(\mathbf{X})d\left(e^{-\int_0^t c(\mathbf{X}(s))\,ds}\right) =$$

$$\left(\frac{1}{2}\Delta u(\mathbf{X})\,dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u(\mathbf{X})}{\partial x_i} dW^i\right) e^{-\int_0^t c(\mathbf{X}(s))\,ds} +$$

$$u(\mathbf{X})(-c(\mathbf{X})\,dt)e^{-\int_0^t c(\mathbf{X}(s))\,ds}$$

- On écrit la formule intégrale correspondante pour $t = \tau_x$ et on prend l'espérance.

Interprétation

Des particules browniennes peuvent disparaitre en étant absorbées par le milieu
La probabilité de disparaitre dans l'intervalle $[t, t+h]$ est $c(\mathbf{X}(t))h + o(h)$
La probabilité de survie jusqu'au temps t est approximativement égale à

$$(1 - c(\mathbf{X}(t_1))h)(1 - c(\mathbf{X}(t_2))h) \cdots (1 - c(\mathbf{X}(t_n))h) \to e^{-\int_0^t c(\mathbf{X}(s))\, ds}$$

quand $h \to 0$, avec $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ et $h = t_{k+1} - t_k$.

Interprétation

Donc $u(x)$ qui est égal à la moyenne de $f(\mathbf{X}(\cdot))$ sur tous les chemins qui survivent assez longtemps pour rencontrer ∂U est bien égal à

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{\tau_x} f(\mathbf{X}(t))\, e^{-\int_0^t c(\mathbf{X}(s))\, ds}\, dt\right]$$