Equations différentielles stochastiques

Olivier FAUGERAS

1er décembre 2009

Plan

Plan

Plan

Plan

Notation

- On se donne un processus brownien $\mathbf{W}(\cdot)$ de dimension m.
- On note $\mathcal{F}(t)$ la σ-algèbre engendrée par la variable aléatoire réelle $\mathbf{X}_0$ de dimension n et l'histoire du processus brownien $\mathbf{W}(\cdot)$ jusqu'au temps t inclus.
- On se donne $T > 0$ et les fonctions

$$\mathbf{b} : \mathbb{R}^n \times [0, T] \to \mathbb{R}^n \quad \mathbf{B} : \mathbb{R}^n \times [0, T] \to \mathbb{M}^{n \times m}$$

Définition

On dit qu'un processus stochastique $\mathbf{X}(\cdot)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ est solution de l'équation différentielle stochastique d'Itô

$$\begin{cases} d\mathbf{X} & = & \mathbf{b}(\mathbf{X}, t)\, dt + \mathbf{B}(\mathbf{X}, t)\, d\mathbf{W} \\ \mathbf{X}(0) & = & \mathbf{X}_0 \end{cases}$$

pour $0 \leq t \leq T$ si

Définition

1. $\mathbf{X}(\cdot)$ est progressivement mesurable par rapport à $\mathcal{F}(\cdot)$,
2. $\mathbf{F} = \mathbf{b}(\mathbf{X}, t)$ is in $\mathbb{L}^1_n(0, T)$,
3. $\mathbf{G} = \mathbf{B}(\mathbf{X}, t)$ is in $\mathbb{L}^2_{n\times m}(0, T)$,
4. et $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0 + \int_0^t \mathbf{b}(\mathbf{X}, s)\, ds + \int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X}, s)\, d\mathbf{W}$ pour $0 \leq t \leq T$.

Définition

Remarques :

1. De iii) et iv) on déduit que $\mathbf{X}(\cdot)$ a p.s. des trajectoires continues.
2. Une EDS d'ordre supérieur

$$\mathbf{Y}^{(n)} = f(t, Y, \cdots, Y^{(n-1)}) + g(t, Y, \cdots, Y^{(n-1)})\xi$$

s'écrit sous la forme précédente à l'aide du "changement de variables"

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} Y(t) \\ \dot{Y}(t) \\ \vdots \\ Y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ \vdots \\ X_n(t) \end{pmatrix}$$

Définition

On a alors

$$d\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_2(t) \\ X_3(t) \\ \vdots \\ f(t, \mathbf{X}) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ g(t, \mathbf{X}) \end{pmatrix} d\mathbf{W}$$

Exemple 1 : $dX = gX\,dW$

On prend $m = n = 1$. Une solution de

$$\begin{cases} dX & = & gXdW \\ X(0) & = & 1 \end{cases}$$

est $X(t) = e^{-\frac{1}{2}\int_0^t g^2\,ds + \int_0^t g\,dW}$ comme on le vérifie à l'aide de la formule d'Itô.
On vérifie de même qu'une solution de

$$\begin{cases} dX & = & fX\,dt + gX\,dW \\ X(0) & = & 1 \end{cases}$$

est $X(t) = e^{\int_0^t f - \frac{1}{2}g^2\,ds + \int_0^t g\,dW}$.

Equation de Langevin

Si on rajoute de la friction au mouvement brownien $\dot{X} = \sigma\xi$, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{rcl} dX & = & -bX\,dt + \sigma\,dW \\ X(0) & = & X_0 \end{array} \right.$$

pour une distribution initiale X_0 indépendante du brownien. C'est l'équation de Langevin dont la solution est

$$X(t) = e^{-bt}X_0 + \sigma \int_0^t e^{-b(t-s)}\,dW \quad t \geq 0$$

Equation de Langevin

On vérifie que $\mathbb{E}[X(t)] = e^{-bt}\mathbb{E}[X_0]$ et que $\mathbb{E}\left[X^2(t)\right] = e^{-2bt}\mathbb{E}\left[X_0^2\right] + \frac{\sigma^2}{2b}(1 - e^{-2bt})$.
Donc

$$V(X(t)) = \mathbb{E}\left[X^2(t)\right] - \mathbb{E}^2[X(t)] = e^{-bt}V(X_0) + \frac{\sigma^2}{2b}(1 - e^{-2bt})$$

et si $V(X_0) < \infty$

$$\begin{cases} \mathbb{E}[X(t)] \to 0 \\ V(X(t)) \to \frac{\sigma^2}{2b} \end{cases} \qquad t \to \infty$$

La solution tend vers une variable aléatoire Gaussienne $\mathcal{N}(0, \frac{\sigma}{\sqrt{2b}})$ quelle que soit la condition initiale.

Processus d'Ornstein-Uhlenbeck

C'est le processus dont la dérivée satisfait l'équation de Langevin :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \ddot{Y} & = & -b\dot{Y} + \sigma\,\xi \\ Y(0) & = & Y_0,\, \dot{Y}(0) = Y_1 \end{array} \right.$$

La vitesse $X = \dot{Y}$ est donnée par

$$X(t) = e^{-bt}Y_1 + \sigma \int_0^t e^{-b(t-s)}\, dW \quad t \geq 0$$

et la position par

$$Y(t) = Y_0 + \int_0^t X\, ds$$

Processus d'Ornstein-Uhlenbeck

On trouve

$$\mathbb{E}\left[Y(t)\right] = \mathbb{E}\left[Y_0\right] + \left(\frac{1 - e^{-bt}}{b}\right)\mathbb{E}\left[Y_1\right]$$

et

$$V(Y(t)) = V(Y_0) + \frac{\sigma^2}{b^2}t + \frac{\sigma^2}{2b^3}(-3 + 4e^{-bt} - e^{-2bt})$$

Oscillateur harmonique aléatoire

$$\begin{cases} \ddot{X} & = & -\lambda^2 X - b\dot{X} + \sigma\,\xi \\ X(0) & = & X_0, \dot{X}(0) = X_1 \end{cases}$$

On montre à l'aide des techniques exposées plus loin que la solution est

$$X(t) = X_0 \cos(\lambda t) + \frac{1}{\lambda} \int_0^t \sin(\lambda(t-s))\, dW$$

dans le cas $X_1 = 0$, $b = 0$, $\sigma = 1$.

Exemple en une dimension

On suppose $b \in C^1$ avec $|b'| \leq L$. On considère

$$\begin{cases} dX & = & b(X)\,dt + dW \\ X(0) & = & x \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}$$

On réécrit

$$X(t) = x + \int_0^t b(X)\,ds + W(t)$$

On définit la suite de processus, $X^0(t) = x$ et

$$X^{n+1}(t) = x + \int_0^t b(X^n)\,ds + W(t) \quad t \geq 0$$

Exemple en une dimension

On note $D^n(t) = \max_{0 \leq s \leq t} | X^{n+1}(s) - X^n(s) |, n = 0, \cdots$

On remarque que $D^0(t) = \max_{0 \leq s \leq t} \left| \int_0^s b(x)\, dr + W(s) \right| \leq C(\omega)$

pour $0 \leq t \leq T$

et on montre que $D^n(t) \leq C \frac{L^n}{n!} t^n$ pour tout $n \geq 0$ et tout t dans $[0, T]$.

On en conclut que la suite $X^n(\cdot)$ est p.s. uniformément de Cauchy pour tout t dans $[0, T]$.

Elle converge donc uniformément p.s. vers un processus $X(\cdot)$ qui est solution.

Changement de variable

On part de

$$\begin{cases} dX & = & b(X)\,dt + \sigma(X)\,dW \\ X(0) & = & x \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}$$

et on essaye de se ramener au cas précédent :

$$\begin{cases} dY & = & f(Y)\,dt + dW \\ Y(0) & = & y \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}$$

en posant $Y = u(X)$ et en utilisant la formule d'Itô.

Changement de variable

On montre que cela revient, sous certaines conditions, à résoudre l'EDO

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u'(z) & = & \sigma(u(z)) \\ u(y) & = & x \end{array} \right. \qquad x \in \mathbb{R},$$

puis prendre $f(z) = \frac{1}{\sigma(u(z))} \left[b(u(z)) - \frac{1}{2} u''(z) \right]$.

Préliminaire : le lemme de Gronwall

Lemme

Soient Φ *et* f *deux fonctions continues sur* $[0, T]$ *non-négatives,* C_0 *une constante positive. Si*

$$\Phi(t) \leq C_0 + \int_0^t f\Phi \, ds \quad 0 \leq t \leq T,$$

alors

$$\Phi(t) \leq C_0 \, e^{\int_0^t f \, ds}$$

Existence et unicité

Théorème

On se donne $\mathbf{b} : \mathbb{R}^n \times [0, T] \to \mathbb{R}^n$ *et* $\mathbf{B} : \mathbb{R}^n \times [0, T] \to \mathbb{M}^{n \times m}$*, continues et telles que*

$$\begin{cases} |\,\mathbf{b}(x,t) - \mathbf{b}(\hat{x},t\,| & \leq & L|\,x - \hat{x}\,| \\ |\,\mathbf{B}(x,t) - \mathbf{B}(\hat{x},t\,| & \leq & L|\,x - \hat{x}\,| \end{cases} \qquad \forall t \in [0,T]\,\forall x,\, \hat{x} \in \mathbb{R}^n$$

Soit X_0 *une v.a. à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{E}\left[|\,X_0\,|^2\right] < \infty$ *et indépendante de* $\mathcal{W}^+(0)$, $\mathbf{W}(\cdot)$ *est un processus brownien m-dimensionnel. Il existe une unique solution* $\mathbf{X} \in \mathbb{L}^2_n(0,T)$ *de l'EDS*

$$\begin{cases} d\mathbf{X} & = & \mathbf{b}(\mathbf{X},t)\,dt + \mathbf{B}(\mathbf{X},t)\,d\mathbf{W} \\ \mathbf{X}(0) & = & \mathbf{X}_0 \end{cases}$$

Existence et unicité

Schéma de preuve : unicité
On utilise l'hypothèse de continuité Lipschitz uniforme et le lemme de Gronwall pour montrer que

$$\mathbb{E}\left[\mid \mathbf{X}(t) - \hat{\mathbf{X}}(t) \mid^2 \right] = 0 \, \forall t \in [0, T]$$

et donc que $\mathbf{X}(t) = \hat{\mathbf{X}}(t)$ p.s. pour tout $t \in [0, T]$.

Existence et unicité

Schéma de preuve : Existence

On introduit le même schéma itératif que dans l'exemple précédent

$$\begin{cases} \mathbf{X}^0(t) & = & \mathbf{X}_0 \\ \mathbf{X}^{n+1}(t) & = & \mathbf{X}_0 + \int_0^t \mathbf{b}(\mathbf{X}^n(s), s)\, ds + \int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X}^n(s), s)\, dW \end{cases}$$

$n \in \mathbb{N}$, $t \in [0, T]$.

On définit $d^n(t) = \mathbb{E}\left[| \mathbf{X}^{n+1}(t) - \mathbf{X}^n(t) |^2 \right]$. On montre par récurrence que si $M \geq 2L^2(1 + T)$ alors

$$d^n(t) \leq \frac{(Mt)^{n+1}}{(n+1)!} \; n \in \mathbb{N} \; t \in [0, T]$$

Existence et unicité

On montre alors grâce à l'inégalité de martingale que

$$\mathbb{E}\left[\max_{0\leq t\leq T} \mid \mathbf{X}^{n+1}(t) - \mathbf{X}^{n}(t) \mid^2\right] \leq C\frac{(MT)^n}{n!}$$

L'application du lemme de Borel-Cantelli nous donne

$$P\left(\max_{0\leq t\leq T} \mid \mathbf{X}^{n+1}(t) - \mathbf{X}^{n}(t) \mid^2 > \frac{1}{2^n} \text{ i.s.}\right) = 0$$

et donc la convergence uniforme sur $[0, T]$ p.s. de

$$\mathbf{X}^n = \mathbf{X}^0 + \sum_{j=0}^{n-1}(\mathbf{X}^{j+1} - \mathbf{X}^j)$$

vers un processus $\mathbf{X}(\cdot)$ solution de l'EDS.
On montre enfin que $\mathbf{X}^n(\cdot)$ est dans $\mathbb{L}^2(0, T)$ et aussi sa limite $\mathbf{X}(\cdot)$.

Estimation des moments des solutions

Théorème

Sous les hypothèses du théorème d'existence et d'unicité, si $\mathbb{E}\left[|\,\mathbf{X}_0\,|^{2p}\right] < \infty$ *la solution* $\mathbf{X}(\cdot)$ *satisfait*

$$\mathbb{E}\left[|\,\mathbf{X}(t)\,|^{2p}\right] \leq C_2(1 + \mathbb{E}\left[|\,\mathbf{X}_0\,|^{2p}\right])e^{C_1 t}$$

et

$$\mathbb{E}\left[|\,\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}(s)\,|^{2p}\right] \leq C_2(1+\mathbb{E}\left[|\,\mathbf{X}_0\,|^{2p}\right])|t-s|^p e^{C_2 t} \quad \forall s,\, t \in [0, T]$$

C_1 *et* C_2 *ne dépendent que de* L, T, m *et* n.

Schéma de preuve

On montre que la condition de croissance linéaire sur **b** et **B** implique la condition:

$$\exists \alpha > 0,\ \mathbf{x}^T \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) + \frac{2p-1}{2} |\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)|^2 \leq \alpha(1 + |\mathbf{x}|^2) \qquad \forall (t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$$

Cette majoration, la formule de Itô appliquée à la fonction $u(\mathbf{x}, t) = (1 + |\mathbf{x}|^2)^p$, et l'inégalité $(|a| + |b|)^q \leq 2^{q-1}(|a|^q + |b|^q)$ permettent de conclure pour la première inégalité.

Schéma de preuve

La même inégalité, $(|a|+|b|)^q \leq 2^{q-1}(|a|^q+|b|^q)$, l'inégalité de Hölder, et l'hypothèse de croissance au plus linéaire permettent d'obtenir la seconde inégalité.

Application : régularité des trajectoires

Les propriétés précédentes montrent que l'application $t \rightarrow \mathbf{X}(t, \omega)$ est p.s. Hölder continue pour tous les exposants plus petits que $\frac{1}{2}$ si $\mathbb{E}\left[\mid \mathbf{X}_0 \mid^{2p}\right] < \infty$ pour tous les entiers $p \geq 1$ (Théorème de Kolmogorov).

Dépendance des paramètres

Pour $k = 1, 2, \cdots$, supposons que $\mathbf{b}^k$, $\mathbf{B}^k$ et $\mathbf{X}_0^k$ satisfassent les hypothèses du théorème d'existence et d'unicité et que

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\left[| \mathbf{X}_0^k - \mathbf{X}_0 |^2 \right] = 0,$$

pour tout $M > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \max_{0\leq t\leq T} \max_{|x|\leq M} (| \mathbf{b}^k(x,t) - \mathbf{b}(x,t) | + | \mathbf{B}^k(x,t) - \mathbf{B}(x,t) |) = 0$$

Si $X^k(\cdot)$ est solution de

$$\left\{ \begin{array}{ccc} d\mathbf{X}^k & = & \mathbf{b}^k(\mathbf{X}^k, t)\, dt + \mathbf{B}^k(\mathbf{X}^k, t)\, d\mathbf{W} \\ \mathbf{X}^k(0) & = & \mathbf{X}_0^k \end{array} \right. ,$$

Dépendance des paramètres

alors

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\left[\max_{0\le t\le T} |\,\mathbf{X}^k(t) - \mathbf{X}(t)\,|^2\right] = 0,$$

où $\mathbf{X}(\cdot)$ est solution de

$$\left\{\begin{array}{lll} d\mathbf{X} & = & \mathbf{b}(\mathbf{X}, t)\,dt + \mathbf{B}(\mathbf{X}, t)\,d\mathbf{W} \\ \mathbf{X}(0) & = & \mathbf{X}_0 \end{array}\right. ,$$

Définition

L'EDS est dite linéaire si les coefficients **b** et **B** sont de la forme

$$\mathbf{b}(x,t) = \mathbf{c}(t) + \mathbf{D}(t)x$$

avec **C** : $[0, T] \to \mathbb{R}^n$, **D** : $[0, T] \to \mathbb{M}^{n\times n}$ et

$$\mathbf{B}(x,t) = \mathbf{E}(t) + \mathbf{F}(t)x$$

avec **E** : $[0, T] \to \mathbb{M}^{n\times m}$ et **F** : $[0, T] \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{M}^{n\times m})$, l'ensemble des applications linéaires bornées de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{M}^{n\times m}$.
Elle est dite homogène si $\mathbf{c} = \mathbf{E} = 0$ sur $[0, T]$.
Remarque :
Si $\sup_{0\leq t\leq T}[\mid \mathbf{c}(t) \mid + \mid \mathbf{D}(t) \mid + \mid \mathbf{E}(t) \mid + \mid \mathbf{F}(t) \mid] < \infty$ **b** et **B** satisfont les hypothèses du théorème d'existence et d'unicité.

Cas particulier $\mathbf{F} = 0$

Si $\mathbf{D}(t) = D$, alors la solution de

$$\begin{cases} d\mathbf{X} & = & (\mathbf{c}(t) + D\mathbf{X})dt + \mathbf{E}(t)d\mathbf{W} \\ \mathbf{X}(0) & = & \mathbf{X}_0 \end{cases}$$

s'écrit

$$\mathbf{X}(t) = e^{Dt}\mathbf{X}_0 + \int_0^t e^{D(t-s)}(\mathbf{c}(s)ds + \mathbf{E}(s)dW)$$

Cas particulier $\mathbf{F} = 0$

Plus généralement la solution de

$$\left\{\begin{array}{rcl} d\mathbf{X} & = & (\mathbf{c}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{X})dt + \mathbf{E}(t)d\mathbf{W} \\ \mathbf{X}(0) & = & \mathbf{X}_0 \end{array}\right.$$

s'écrit

$$\mathbf{X}(t) = \Phi(t)\left(\mathbf{X}_0 + \int_0^t \Phi(s)^{-1}(\mathbf{c}(s)ds + \mathbf{E}(s)dW)\right),$$

où $\Phi(\cdot)$ est la résolvante du système d'EDO

$$\frac{d\Phi}{dt} = \mathbf{D}(t)\Phi,\ \Phi(0) = \mathrm{Id}$$

Tout ceci s'obtient (formellement) à partir des formules standards de la théorie des EDO en écrivant $\mathbf{E}d\mathbf{W} = \mathbf{E}\xi dt$.

Cas général scalaire

La solution de

$$\begin{cases} dX &= (c(t) + d(t)X)dt + \sum_{l=1}^{m}(e^l(t) + f^l(t)X)dW^l \\ X(0) &= X_0 \end{cases}$$

s'écrit

$$X(t) = \Phi(t)\left(X_0 + \int_0^t \Phi(s)^{-1}\left(c(s) - \sum_{l=1}^{m} e^l(s)f^l(s)\right)ds \right.$$
$$\left. + \int_0^t \sum_{l=1}^{m} \Phi(s)^{-1} e^l(s)dW^l\right)$$

avec

$$\Phi(t) = \exp\left(\int_0^t d - \sum_{l=1}^{m} \frac{(f^l)^2}{2} ds + \int_0^t \sum_{l=1}^{m} f^l dW^l\right)$$