Intégrales stochastiques, formule d'Itô

Olivier FAUGERAS

25 Novembre 2009

Plan

Motivations

Définition et propriétés de l'intégrale d'Itô

Martingales

Intégrales indéfinies

Formule d'Itô

Intégrale et formule d'Itô en dimension supérieure

Plan

Motivations

Définition et propriétés de l'intégrale d'Itô

Martingales

Intégrales indéfinies

Formule d'Itô

Intégrale et formule d'Itô en dimension supérieure

Plan

Motivations

Définition et propriétés de l'intégrale d'Itô

Martingales

Intégrales indéfinies

Formule d'Itô

Intégrale et formule d'Itô en dimension supérieure

Plan

Motivations

Définition et propriétés de l'intégrale d'Itô

Martingales

Intégrales indéfinies

Formule d'Itô

Intégrale et formule d'Itô en dimension supérieure

Plan

Motivations

Définition et propriétés de l'intégrale d'Itô

Martingales

Intégrales indéfinies

Formule d'Itô

Intégrale et formule d'Itô en dimension supérieure

Plan

Motivations

Définition et propriétés de l'intégrale d'Itô

Martingales

Intégrales indéfinies

Formule d'Itô

Intégrale et formule d'Itô en dimension supérieure

Motivation

- On revient sur l'EDS

$$\begin{cases} d\mathbf{X} & = & \mathbf{b}(\mathbf{X}, t)\, dt + \mathbf{B}(\mathbf{X}, t) d\mathbf{W} \quad t > 0 \\ \mathbf{X}(0) & = & X_0 \end{cases}$$

- que nous réécrirons plus tard sous la forme

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0 + \int_0^t \mathbf{b}(\mathbf{X}, s)\, ds + \int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X}, s) d\mathbf{W} \quad t \geq 0$$

- Il s'agit donc de donner un sens à des intégrales de la forme

$$\int_0^T \mathbf{G}\, d\mathbf{W},$$

pour une large classe de processus **G**

- Une difficulté est que p.s. $t \rightarrow W(t, \omega)$ est à variation infinie.

Intégrale de Paley-Wiener-Zygmund

- On se place en dimension 1.
- Si $g \in C^1([0,1],\mathbb{R})$, $g(1) = g(0) = 0$, on définit

$$\int_0^1 g\,dW = -\int_0^1 g' W\,dt,$$

une v.a.

Lemme (Propriétés de l'intégrale Paley-Wiener-Zygmund)

1. $\mathbb{E}\left[\int_0^1 g\,dW\right] = 0$
2. $\mathbb{E}\left[\left(\int_0^1 g\,dW\right)^2\right] = \int_0^1 g^2\,dt$

On peut étendre la définition à $L^2(0,\,1)$ mais pas à des processus.

Sommes de Riemann

On essaye de définir $\int_0^T W\,dW$.

Définition

On a

1. *Une partition P de $[0,\ T]$:* $P = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T\}$.
2. *Le pas $|P|$ de P est $|P| = \max_{0 \le k \le m-1} |t_{k+1} - t_k|$.*
3. *Soit $0 \le \lambda \le 1$ et P une partition de $[0,\ T]$, on définit*

$$\tau_k = (1-\lambda)t_k + \lambda t_{k+1}\; k = 0,\ 1, \cdots, \ m-1,$$

$$R(P,\lambda) = \sum_{k=0}^{m-1} W(\tau_k)\left(W(t_{k+1}) - W(t_k)\right)$$

Sommes de Riemann

Lemme (Variation quadratique)

Soit $[a, b]$ *un intervalle fermé de* $[0, \infty]$ *et* $P^n = [a = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{m_n}^n = b]$ *des partitions de* $[a, b]$ *telles que* $|P^n| \to 0$ *quand* $n \to \infty$*. On a*

$$\sum_{k=0}^{m_n - 1} (W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n))^2 \to b - a$$

dans $L^2(\Omega)$ *quand* $n \to \infty$*.*

Ceci justifie en partie l'idée heuristique que $dW \sim (dt)^{1/2}$.

Sommes de Riemann

Eléments de preuve

- On pose $Q_n = \sum_{k=0}^{m_n-1}(W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n))^2$ et on remarque que

$$Q_n - (b-a) = \sum_{k=0}^{m_n-1}(W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n))^2 - (t_{k+1}^n - t_k^n)$$

Sommes de Riemann

- On utilise la propriété d'acroissements indépendants du brownien pour obtenir

$$\mathbb{E}\left[(Q_n - (b-a))^2\right] = \sum_{k=0}^{m_n-1} \mathbb{E}\left[(Y_k^2 - 1)^2 (t_{k+1}^n - t_k^n)^2\right],$$

avec $Y_k = \frac{W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n)}{\sqrt{t_{k+1}^n - t_k^n}}$ de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

- Et donc $\mathbb{E}\left[(Q_n - (b-a))^2\right] \leq C \sum_{k=0}^{m_n-1} (t_{k+1}^n - t_k^n)^2 \leq C |P^n| (b-a)$.

Sommes de Riemann

Lemme

Soit P^n une partition de $[0, T]$, $0 \leq \lambda \leq 1$ fixé, et

$$R_n = \sum_{k=0}^{m_n - 1} W(\tau_k^n)(W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n)).$$

Alors $\lim_{n \to \infty} R_n = \frac{W(T)^2}{2} + \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) T$ *dans* $L^2(\Omega)$.
La limite dépend du choix des τ_n^k *tels que* $t_n^k \leq \tau_n^k \leq t_{n+1}^k$,
$\tau_n^k = (1 - \lambda) t_k^n + \lambda t_{k+1}^n$.

Sommes de Riemann

Eléments de preuve :

- On écrit

$$R_n = \frac{W^2(T)}{2} - \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m_n-1}(W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n))^2}_{A}$$

$$+ \underbrace{\sum_{k=0}^{m_n-1}(W(\tau_k^n) - W(t_k^n))^2}_{B}$$

$$+ \underbrace{\sum_{k=0}^{m_n-1}(W(t_{k+1}^n) - W(\tau_k^n))(W(\tau_k^n) - W(t_k^n))}_{C}$$

Sommes de Riemann

- On remarque que $A \to T/2$ et que $B \to \lambda T$ dans $L^2(\Omega)$.
- Puis, en utilisant la propriété d'acroissements indépendants du brownien

$$\mathbb{E}\left[\left[\sum_{k=0}^{m_n-1}(W(t_{k+1}^n) - W(\tau_k^n))(W(\tau_k^n) - W(t_k^n))\right]^2\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{m_n-1}\lambda(t_{k+1}^n - t_k^n)(1-\lambda)(t_{k+1}^n - t_k^n)$$

$$\leq \lambda(1-\lambda)T|\,P^n\,|$$

Sommes de Riemann

- La définition de l'intégrale d'Itô (voir plus bas), correspond au choix $\lambda = 0$ soit
$$\int_s^r WdW = \frac{W^2(r) - W^2(s)}{2} - \frac{r-s}{2},$$
- alors que l'intégrale de Stratonovich (voir TD) correspond au choix $\lambda = 1/2$ soit
$$\int_s^r W \circ dW = \frac{W^2(r) - W^2(s)}{2}$$

Quelques définitions

Définition

1. *La* σ*-algèbre* $\mathcal{W}(t) = \mathcal{A}(W(s) \,|\, 0 \leq s \leq t)$ *est l'histoire du mouvement brownien jusqu'au temps t (inclus).*
2. *La* σ*-algèbre* $\mathcal{W}^+(t) = \mathcal{A}(W(s) - W(t) \,|\, s \geq t \geq 0)$ *est le futur du mouvement brownien au delà du temps* t*.*

Définition (Filtration)

Une famille $\mathcal{F}(\cdot)$ *de* σ*-algèbres* $\subseteq \mathcal{A}$ *est dite non-anticipative (par rapport à* $W(\cdot)$*) si*

1. $\mathcal{F}(t) \supseteq \mathcal{F}(s)$ *pour tout* $t \geq s \geq 0$,
2. $\mathcal{F}(t) \supseteq \mathcal{W}(t)$ *pour tout* $t \geq 0$,
3. $\mathcal{F}(t)$ *est indépendante de* $\mathcal{W}^+(t)$ *pour tout* $t \geq 0$.

Quelques définitions

Définition (Processus adaptés)

Un processus $G(\cdot)$ à valeurs réelles est dit non-anticipant ou adapté à la filtration $\mathcal{F}(\cdot)$ si pour tout temps $t \geq 0$, $G(t)$ est $\mathcal{F}(t)$-mesurable.

On a en pratique besoin d'une notion un peu plus forte

Définition (Processus progressivement mesurable)

Un processus $G(\cdot)$ à valeurs réelles est dit progressivement mesurable par rapport à la filtration $\mathcal{F}(\cdot)$ si pour tout temps $t \geq 0$ et tout $\omega \in \Omega$ l'application $(t, \omega) \to G(t, \omega)$ est $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}(t)$ mesurable ($\mathcal{B}([0, t])$ est l'ensemble des boréliens de $[0, t]$).

Quelques définitions

Définition

On note $\mathbb{L}^2(0, T)$ l'ensemble des processus réels progressivement mesurables $G(\cdot)$ tels que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T G^2 dt\right] < \infty$$

De même $\mathbb{L}^1(0, T)$ est l'ensemble des processus réels progressivement mesurables $G(\cdot)$ tels que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |G| dt\right] < \infty$$

Quelques définitions

Définition

Un processus $G(\cdot)$ *de* $\mathbb{L}^2(0, T)$ *est dit constant par morceaux s'il existe une partition* P *de* $[0, T]$ *telle que*

$$G(t) \equiv G_k,\ t_k \leq t < t_{k+1},\ k = 0, \cdots, m-1$$

Noter que chaque G_k est $\mathcal{F}(t_k)$-mesurable puisque G est adapté.

Quelques définitions

Définition (Intégrale d'Itô)

Soit $G(\cdot)$ un processus constant par morceaux de $\mathbb{L}^2(0, T)$

$$\int_0^T G\,dW = \sum_{k=0}^{m-1} G_k(W(t_{k+1}) - W(t_k))$$

est l'intégrale d'Itô de G sur $[0, T]$.

Quelques définitions

Lemme (Propriétés de l'intégrale d'Itô pour des processus constants par morceaux)

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et tous $G, H \in \mathbb{L}^2(0, T)$ constants par morceaux on a

1. $\int_0^T aG + bH \, dW = a \int_0^T G \, dW + b \int_0^T H \, dW$
2. $\mathbb{E}\left[\int_0^T G \, dW\right] = 0$
3. $\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T G \, dW\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T G^2 \, dt\right]$

Quelques définitions

- Le point i) est facile à vérifier.
- Pour ii) on écrit

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T GdW\right] = \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{E}\left[G_k(W(t_{k+1}) - W(t_k))\right],$$

et on utilise le fait que G_k est $\mathcal{F}(t_k)$-mesurable donc indépendant de $\mathcal{W}^+(t_k)$ alors que $W(t_{k+1}) - W(t_k)$ est $\mathcal{W}^+(t_k)$-mesurable.

Quelques définitions

- Pour iii) on a

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T GdW\right)^2\right] = \sum_{k,j=1}^{m-1} \mathbb{E}\left[G_j G_k (W(t_{j+1}) - W(t_j))(W(t_{k+1}) - W(t_k))\right]$$

- Si $j < k$ on utilise l'indépendance de $W(t_{k+1}) - W(t_k)$ et de $G_j G_k (W(t_{j+1}) - W(t_j))$ ce qui permet de conclure.

Quelques définitions

Lemme (Approximation par des processus constants par morceaux)

Soit $G \in \mathbb{L}^2(0, T)$, il existe une suite G^n de processus constants par morceaux bornés de $\mathbb{L}^2(0, T)$ tels que

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}\left[\int_0^T |\, G - G^n\,|^2 \, dt\right] = 0$$

Définition

On définit alors

$$\int_0^T G \, dW = \lim_{n \to \infty} \int_0^T G^n \, dW \quad dans \quad \mathbb{L}^2(0, T)$$

Quelques définitions

Théorème (Propriétés de l'intégrale d'Itô)

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et tous $G, H \in \mathbb{L}^2(0, T)$ on a

1. $\int_0^T aG + bH\, dW = a \int_0^T G\, dW + b \int_0^T H\, dW$
2. $\mathbb{E}\left[\int_0^T G\, dW\right] = 0$
3. $\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T G\, dW\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T G^2\, dt\right]$
4. $\mathbb{E}\left[\int_0^T G\, dW \int_0^T H\, dW\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T GH\, dt\right]$

Quelques définitions

i), ii) et iii) découlent facilement des propriétés correspondantes des processus constants par morceaux.
iv) découle de la relation $2ab = (a+b)^2 - a^2 - b^2$.

Motivation

- Soient $Y_1, Y_2, \cdots$ des v.a. réelles indépendantes de moyenne nulle et $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$ leur somme.
- Quel est notre meilleure estimation de S_{n+k} étant données les valeurs de $S_1, \ldots, S_n$?
- La réponse est S_n car $\mathbb{E}\left[S_{n+k} \,|\, S_1, \cdots, S_n\right] = S_n$.

Définition

Définition (Martingale discrète)

Soit $\{X_n\}_{k=1}^{\infty}$ *une suite de v.a. réelles telles que* $\mathbb{E}\left[| X_i |\right] < \infty$, $i \geq 1$, *si*

$$X_k = \mathbb{E}\left[X_j \,|\, X_1, \cdots, X_k\right] \; p.s. \forall j \geq k,$$

on dit que $\{X_n\}_{k=1}^{\infty}$ *est une martingale (discrète).*

Définition

Définition (Martingale continue)

Soit $X(\cdot)$ un processus à valeurs réelles tel que $\mathbb{E}\left[|\, X(t)\, |\right] < \infty$ pour tout $t \geq 0$

1. *Si*
$$X(s) = \mathbb{E}\left[X(t) \,|\, \mathcal{F}^X(s)\right] \; p.s. \forall t \geq s \geq 0,$$
on dit que $X(\cdot)$ est une martingale.
2. *Si*
$$X(s) \leq \mathbb{E}\left[X(t) \,|\, \mathcal{F}^X(s)\right] \; p.s. \forall t \geq s \geq 0,$$
on dit que $X(\cdot)$ est une sous martingale.

Définition

Théorème

1. *Si* $\{X_n\}_{k=1}^{\infty}$ *est une sous-martingale alors*

$$P\left(\max_{1\leq k\leq n} X_k \geq \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}\left[X_n^+\right]$$

pour tout $n = 1, \cdots$ *et* $\lambda > 0$.

2. *Si* $\{X_n\}_{k=1}^{\infty}$ *est une martingale alors*

$$\mathbb{E}\left[\max_{1\leq k\leq n} | X_k |^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[| X_n |^p]$$

Définition et théorème

Définition (Intégrale d'Itô indéfinie)

Soit $G \in \mathbb{L}^2(0, T)$ *et*

$$I(t) = \int_0^t G\,dW \quad 0 \leq t \leq T$$

l'intégrale indéfinie de G par rapport au mouvement brownien W. *On a* $I(0) = 0$.

Théorème

1. *Si* $G \in \mathbb{L}^2(0, T)$, $I(\cdot)$ *est une martingale.*
2. *Il existe une modification de* $I(\cdot)$ *avec des trajectoires continues p.s.*

Eléments de preuve

- Il existe une suite G^n de processus constants par morceaux de $\mathbb{L}^2(0,T)$ convergeant vers G. On définit $I^n(t) = \int_0^t G^n dW$, $0 \leq t \leq T$.
- On considère la partition correspondant à G^n et écrit :

$$I^n(t) = \sum_{i=0}^{k-1} G_i^n(W(t_{i+1}^n) - W(t_i^n)) + G_n^k(W(t) - W(t_k^n)), \quad t_k^t \leq t \leq t_{k+$$

  $I^n(\cdot)$ a donc p.s. des trajectoires continues.
- $I^n(\cdot)$ est une martingale (point i)) donc $\mid I^n - I^m \mid^2$ est une sous-martingale.

Eléments de preuve

- Donc

$$P\left(\sup_{0\leq t\leq T} \mid I^n(t) - I_m(t) \mid > \varepsilon\right) = P\left(\sup_{0\leq t\leq T} \mid I^n(t) - I_m(t) \mid^2 > \varepsilon^2\right)$$
$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\mathbb{E}\left[\mid I^n(T) - I_m(T) \mid^2\right]$$
$$= \frac{1}{\varepsilon^2}\mathbb{E}\left[\int_0^T \mid G^n - G^m \mid^2 dt\right]$$

Eléments de preuve

- On choisit $\varepsilon = 1/2^k$ et on en conclut l'existence de n_k tel que $P\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |\, I^n(t) - I_m(t) \,| > 1/2^k\right) \leq 1/k^2$ pour $m,\ n \geq n_k$. On peut supposer la suite n_k croissante.
- On applique le lemme de Borel-Cantelli à la suite d'événements $A_k = \{\sup_{0 \leq t \leq T} |\, I^{n_{k+1}}(t) - I^{n_k}(t) \,| > 1/2^k\}$

Définition

Définition

Soit $X(\cdot)$ processus à valeurs réelles tel que

$$X(r) = X(s) + \int_s^r F dt + \int_s^r G dW$$

pour $F \in \mathbb{L}^1(0,T)$ et $G \in \mathbb{L}^2(0,T)$ et $0 \leq s \leq r \leq T$. On dit que $X(\cdot)$ admet la différentielle stochastique

$$dX = F\,dt + G\,dW$$

pour $0 \leq t \leq T$.

Intégrale d'Itô

Théorème

Soit $X(\cdot)$ un processus ayant pour différentielle stochastique

$$dX = F\,dt + G\,dW$$

pour $F \in \mathbb{L}^1(0,T)$ et $G \in \mathbb{L}^2(0,T)$. Soit $u : \mathbb{R} \times [0,T] \to \mathbb{R}$ continue et telle que les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ existent et soient continues. Si $Y(t) = u(X(t),t)$, alors $Y(\cdot)$ a pour différentielle stochastique

$$\begin{aligned} dY &= \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x}\,dX + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,G^2\,dt \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} F + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,G^2\right) dt + \frac{\partial u}{\partial x} G dW \end{aligned}$$

Exemples d'application de la formule d'Itô

Soit $X(\cdot) = W(\cdot)$ et $u(x) = x^m$ $m \geq 2$, alors

$$d(W^m) = mW^{m-1}dW + \frac{1}{2}m(m-1)W^{m-2}dt$$

Exemples d'application de la formule d'Itô

Soit $X(\cdot) = W(\cdot)$ et $u(x,t) = e^{\lambda x - \frac{\lambda^2}{2} t}$. Alors

$$d\left(e^{\lambda W(t) - \frac{\lambda^2}{2} t}\right) = \lambda Y dW$$

Eléments de preuve de la formule d'Itô

Lemme

On a

1. $d(W^2) = 2WdW + dt$.
2. $d(tW) = Wdt + tdW$

Elements de preuve :
On a déjà démontré i) (lemme).

Eléments de preuve de la formule d'Itô

Pour ii)

- On écrit (par définition) et dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$

$$\int_0^r t dW = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{m_n-1} t_k^n (W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n))$$

- De même, puisque $t \to W(t)$ est continue p.s.

$$\int_0^r W dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{m_n-1} W(t_{k+1}^n)(t_{k+1}^n - t_k^n)$$

  Noter qu'on peut choisir t_{k+1}^n puisqu'il s'agit d'une approximation de Riemann ordinaire.
- On ajoute ces deux relations.

Eléments de preuve de la formule d'Itô

Théorème

Si

$$\begin{cases} dX_1 &= F_1 dt + G_1 dW \\ & \qquad\qquad\qquad 0 \leq t \leq T \\ dX_2 &= F_2 dt + G_2 dW \end{cases}$$

pour $F_i \in \mathbb{L}^1(0, T)$, $G_i \in \mathbb{L}^2(0, T)$, $i = 1, 2$, *alors*

$$d(X_1 X_2) = X_2 dX_1 + X_1 dX_2 + G_1 G_2 dt$$

On écrit aussi

$$\int_s^r X_2 dX_1 = X_1(r)X_2(r) - X_1(s)X_2(s) - \int_s^r X_1 dX_2 - \int_s^r G_1 G_2 dt$$

Eléments de preuve de la formule d'Itô

Eléments de preuve

- On fait d'abord les hypothèses que F_i et G_i ne dépendent pas du temps et sont $\mathcal{F}(0)$-mesurables et que $X_1(0) = X_2(0) = 0$. Ce qui permet, en utilisant le lemme précédent, de conclure

$$\begin{aligned}
&\int_0^r X_2 dX_1 + X_1 dX_2 + G_1 G_2 dt \\
=&F_1 F_2 r^2 + (G_1 F_2 + G_2 F_1) r W(r) + G_1 G_2 W^2(r) \\
=&X_1(r) X_2(r)
\end{aligned}$$

C'est le cas $s = 0$, $X_i(0) = 0$ et F_i constants.

Eléments de preuve de la formule d'Itô

- Le cas $s > 0$, $X_i(s)$ arbitraires et F_i constants se traite de la même manière.
- Si F_i et G_i sont constants par morceaux, on applique le résultat précédent sur chaque sous-intervalle.
- Dans le cas général on approxime F_i et G_i par des processus constants par morceaux et on passe à la limite.

Fin du schéma de preuve

- On commence avec $u(x) = x^m$, $m = 0, 1, \cdots$ et on montre que

$$d(X^m) = mX^{m-1}dX + \frac{1}{2}m(m-1)X^{m-2}G^2dt$$

- C'est vrai pour $m = 0, 1$ et $m = 2$ d'après le théorème précédent. On démontre le cas général par récurrence.
- On en conclut que la formule d'Itô est valable pour toutes les fonctions polynomiales.

Fin du schéma de preuve

- On suppose ensuite que $u(x, t) = f(x)g(t)$, f et g des polynomes et on vérifie à l'aide du théorème précédent que la formule d'Itô est vraie dans ce cas.
- Elle est donc vraie pour des combinaisons linéaires de fonctions du type précédent
- On utilise alors la densité des polynomes (Théorème de Stone-Weierstrass).

Généralisation

Proposition

Si on a $dX^i = F^i dt + G^i dW$ *avec* $F^i \in \mathbb{L}^1(0,T)$ *et* $G^i \in \mathbb{L}^2(0,T)$ *pour* $i = 1, \cdots, n$ *et si* $u : \mathbb{R}^n \times [0,T] \to \mathbb{R}$ *est continue ainsi que les dérivées partielles* $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ *et* $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$, $i, j = 1, \cdots, n$, *alors on a*

$$d(u(X^1, \cdots, X^n, t)) = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} dX^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} G^i G^j dt$$

Généralisation

Comment s'en souvenir :

$$d(u(\mathbf{X},t)) = \frac{\partial u}{\partial t}dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} dX^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} dX_i dX_j,$$

on développe et on simplifie alors les termes $dX_i dX_j$ en utilisant les règles $(dt)^2 = 0$, $dtdW = 0$ et $dWdW = dt$

Dimension quelconque

Quelques notations

1. Soit $\mathbf{W}(\cdot) = (W^1(\cdot), \cdots, W^m(\cdot))$ un mouvement brownien de dimension m.
2. Soit $\mathcal{F}(\cdot)$ une famille non-anticipative de σ-algèbres:
   - $\mathcal{F}(t) \supseteq \mathcal{F}(s)$ pour $t \geq s$.
   - $\mathcal{F}(t) \supseteq \mathcal{W}(t) = \mathcal{A}(\mathbf{W}(s) \,|\, 0 \leq s \leq t)$
   - $\mathcal{F}(t)$ est indépendante de $\mathcal{W}^+(t) = \mathcal{A}(\mathbf{W}(s) - \mathbf{W}(t) \,|\, t \leq s < \infty)$

Dimension quelconque

Définition

Un processus stochastique $\mathbf{G} = (G^{ij})$ *à valeurs dans* $\mathcal{M}^{n \times m}$ *appartient à* $\mathbb{L}^2_{n \times m}(0, T)$ *si* $G^{ij} \in \mathbb{L}^2(0, T)$ *pour* $i = 1, \cdots, n$ *et* $j = 1, \cdots, m$,

Un processus stochastique $\mathbf{F} = (F^1, \cdots, F^n)$ *appartient à* $\mathbb{L}^1_n(0, T)$ *si* $F^i \in \mathbb{L}^1(0, T)$ *pour* $i = 1, \cdots, n$

Dimension quelconque

Définition

Si $\mathbf{G} \in \mathbb{L}^2_{n\times m}(0, T)$, *alors*

$$\int_0^T \mathbf{G}\, d\mathbf{W}$$

est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ *dont les composantes sont données par*

$$\sum_{j=1}^{m} \int_0^T G^{ij}\, dW^j$$

Dimension quelconque

En utilisant les approximations par des processus constants par morceaux on démontre que si $\mathbf{G} \in \mathbb{L}^2_{n\times m}(0,T)$, alors

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \mathbf{G}\, d\mathbf{W}\right] = 0,$$

et

$$\mathbb{E}\left[\left|\int_0^T \mathbf{G}\, d\mathbf{W}\right|^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T |\mathbf{G}|^2 dt\right],$$

avec $|\mathbf{G}|^2 = \sum_{i,j}(G^{ij})^2$.

Dimension quelconque

Définition

Soit $\mathbf{X}(\cdot) = (X^1(\cdot), \cdots, X^n(\cdot))$ *un processus stochastique à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$ *tel quel*

$$\mathbf{X}(r) = \mathbf{X}(s) + \int_s^r \mathbf{F}(t)dt + \int_s^r \mathbf{G}\, d\mathbf{W}$$

pour un $\mathbf{F} \in \mathbb{L}_n^1(0,T)$ *et un* $\mathbf{G} \in \mathbb{L}_{n\times m}^2(0,T)$*. On dit que* $\mathbf{X}$ *satisfait l'équation différentielle stochastique*

$$d\mathbf{X} = \mathbf{F}dt + \mathbf{G}d\mathbf{W}$$

Dimension quelconque

Théorème (Formule d'Itô en dimension n)

Soit $\mathbf{X}(\cdot)$ un processus ayant pour différentielle stochastique

$$d\mathbf{X} = \mathbf{F}\, dt + \mathbf{G}\, d\mathbf{W}$$

pour $\mathbf{F} \in \mathbb{L}^1_n(0, T)$ et $\mathbf{G} \in \mathbb{L}^2_{n \times n}(0, T)$. Soit $u : \mathbb{R}^n \times [0, T] \to \mathbb{R}$ continue et telle que les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j}$ $(i, j = 1, \cdots, n)$ existent et soient continues. Si $\mathbf{Y}(t) = u(\mathbf{X}(t), t)$, alors $\mathbf{Y}(\cdot)$ a pour différentielle stochastique

$$d\mathbf{Y} = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dX^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j} \sum_{l=1}^{m} G^{il} G^{jl}\, dt$$

Eléments de preuve

Lemme

Soient $W(\cdot)$ et $\bar{W}(\cdot)$ deux processus browniens indépendants de dimension 1. Alors

$$d(W\bar{W}) = W\,d\bar{W} + \bar{W}\,dW$$

Eléments de preuve

Eléments de preuve

1. On définit $X(t) = \frac{W(t)+\bar{W}(t)}{\sqrt{2}}$ et on montre que c'est un processus brownien.
2. On utilise alors le fait que $W\bar{W} = X^2 - \frac{1}{2}W^2 - \frac{1}{2}\bar{W}^2$ et la formule de la différentielle du carré du brownien.

Eléments de preuve

On démontre aussi le lemme.

Lemme

Si

$$\left\{ \begin{array}{lcl} dX_1 & = & F_1 dt + \sum_{k=1}^m G_1^k dW^k \\ dX_2 & = & F_2 dt + \sum_{l=1}^m G_2^l dW^l \end{array} \right.$$

pour $F_i \in \mathbb{L}^1(0,T)$, $G_i^k \in \mathbb{L}^2(0,T)$, $i = 1, 2$ *et* $k = 1, \cdots, n$ *alors*

$$d(X_1 X_2) = X_2 dX_1 + X_1 dX_2 + \sum_{k=1}^m G_1^k G_2^k dt$$

La preuve est une modification de celle en dimension 1 et utilise le fait nouveau que

$$d(W^i W^j) = W^i dW^j + W^j dW^i + \delta_{ij} dt$$