Mouvement brownien et bruit blanc

Olivier FAUGERAS

18 Novembre 2009

Plan

Motivations et définitions

Construction du mouvement brownien

Propriété des trajectoires

Propriété de Markov

Plan

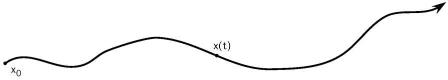
Plan

Plan

Motivations

- Nous avons considéré jusqu'à présent des EDO de la forme
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) & = & \mathbf{b}(\mathbf{x}(t)) \quad t > 0 \\ \mathbf{x}(0) & = & x_0 \end{cases}$$
où $\mathbf{b} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est un champ de vecteur régulier.

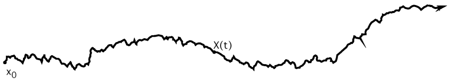
Les trajectoires des solutions sont régulières :



Trajectory of the differential equation

Motivations

Dans de nombreuses applications, les trajectoires mesurées ressemblent plutôt à :



SAMPLE PATH OF THE STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATION

On peut être tenté de perturber le système initial avec de l'aléatoire. De manière formelle :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}(t) & = & \mathbf{b}(\mathbf{X}(t)) + \mathbf{B}(\mathbf{X}(t))\xi(t) \quad t > 0 \\ \mathbf{X}(0) & = & X_0 \end{cases}$$

où $\mathbf{B} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{M}^{n\times m}$, l'ensemble des matrices $n \times m$, et ξ est un "bruit-blanc" de dimension m. C'est une équation différentielle stochastique (EDS).

Motivations

Ceci pose les problèmes mathématiques suivants

- Définir le bruit blanc.
- Définir les solutions d'une EDS.
- Etudier l'existence, l'unicité des solutions de l'EDS, leur dépendance par rapport aux paramètres, aux conditions initiales.

Une heuristique

Dans le cas $m = n$, $X_0 = 0$, $\mathbf{b} = 0$, $\mathbf{B} = Id$, la solution est ce qu'on appelle le mouvement brownien ou le processus de Wiener de dimension n, ce qu'on écrit (symboliquement) :

$$\dot{\mathbf{W}}(\cdot) = \xi(\cdot)$$

"Le bruit blanc est la dérivée du processus de Wiener".

Marches aléatoires

- On considère la grille 2D $\{(m\Delta x,\ n\Delta t)\,|\,m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\}$
- Une particule se trouve en $x = 0$ à $t = 0$.
- A chaque instant $n\Delta t$ elle avance ou elle recule avec la probabilité $1/2$.
- Soit $p(m, n)$ la probabilité de trouver la particule en $m\Delta x$ à l'instant $n\Delta t$.
- On a la relation

$$p(m, 0) = \begin{cases} 0 & m \neq 0 \\ 1 & m = 0 \end{cases}$$

Marches aléatoires

- Et aussi

$$p(m, n+1) = \frac{1}{2}p(m-1, n) + \frac{1}{2}p(m+1, n),$$

- Donc

$$p(m, n+1) - p(m, n) = \frac{1}{2}(p(m-1, n) - 2p(m, n) + p(m+1, n))$$

Marches aléatoires

- Si $\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = D$, constante,

$$\frac{p(m, n+1) - p(m, n)}{\Delta t} = \frac{D}{2}\left(\frac{p(m-1, n) - 2p(m, n) + p(m+1, n)}{(\Delta x)^2}\right)$$

- Si maintenant $\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$, $m\Delta x \to x$, $n\Delta t \to t$ avec $\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = D$, alors, sans doute, $p(m, n) \to f(x, t)$ qui satisfait

$$f_t = \frac{D}{2} f_{xx}$$

- C'est une équation de diffusion ou équation de la chaleur.

Marches aléatoires

- Avec la condition initiale $f(x,0) = \delta(x)$ on trouve la solution

$$f(x,t) = \frac{1}{(2\pi Dt)^{1/2}} e^{-\frac{x^2}{2Dt}}$$

- La densité de probabilité est $\mathcal{N}(0, Dt)$.

Justification mathématique

- On utilise le théorème de Laplace-De Moivre.
- Soient X_i, $i = 1, \cdots$ des variables aléatoires à valeurs dans $\{0, 1\}$ indépendantes et identiquement uniformément distribuées (donc $V(X_i) = 1/4$).
- On définit la v.a.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

  C'est le nombre de mouvements en avant jusqu'au temps $n\Delta t$.
- Soit $X(t)$ la position de la particule à l'instant $n\Delta t$:

$$X(t) = S_n\Delta x + (n - S_n)(-\Delta x) = (2S_n - n)\Delta x$$

Justification mathématique

- On vérifie que

$$V(X(t)) = (\Delta x)^2 n = \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} t = Dt$$

- Puis,

$$X(t) = \left(\frac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} \right) \sqrt{n} \Delta x = \left(\frac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} \right) \sqrt{tD}$$

- Le théorème de Laplace-De Moivre implique que

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ t = n\Delta t,\ \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}}} P(a \leq X(t) \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2Dt}} \, dx$$

Justification mathématique

On est conduit à la définition

Définition

Un processus aléatoire réel $W(\cdot)$ est dit processus de Wiener ou mouvement brownien si

- $W(0) = 0$ *p.s.,*
- $W(t) - W(s)$ *a pour loi* $\mathcal{N}(0, t-s)$ *pour tout* $t \geq s \geq 0$*,*
- *Quels que soient les instants* $0 < t_1 < \cdots < t_n$ *les v.a.* $W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \ldots, W(t_n) - W(t_{n-1})$ *sont indépendantes (indépendance des acroissements).*

Noter que $\mathbb{E}[W(t)] = 0$ et $\mathbb{E}[W^2(t)] = t$.

Calcul des lois jointes

- On sait que

$$P(a_1 \leq W(t_1) \leq b_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t_1}} \int_{a_1}^{b_1} e^{-\frac{x_1^2}{2t_1}}\, dx_1$$

- Sachant que $W(t_1) = x_1$ avec $a_1 \leq x_1 \leq b_1$ on peut parier que $W(t_2)$ est $\mathcal{N}(x_1,\, t_2 - t_1)$ sur l'intervalle $[t_1,\, t_2]$.

Calcul des lois jointes

- En posant
$$g(x,\, t \,|\, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}},$$
- on s'attend à ce que

$$P(a_1 \leq W(t_1) \leq b_1, \cdots, a_n \leq W(t_n) \leq b_n) = \\ \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} g(x_1,\, t_1 \,|\, 0) g(x_2,\, t_2 - t_1 \,|\, x_1) \cdots \\ g(x_n,\, t_n - t_{n-1} \,|\, x_{n-1})\, dx_n \cdots dx_1$$

Calcul des lois jointes

Théorème

Soit $W(\cdot)$ un processus de Wiener de dimension 1. Pour tout entier positif n et pour tous les choix d'instants $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ et pour toutes les fonctions mesurables $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on a

$$\mathbb{E}[f(W(t_1), \cdots, W(t_n))] = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \cdots, x_n)\, g(x_1, t_1 \,|\, 0)\, g(x_2, t_2 - t_1 \,|\, x_1) \cdots g(x_n, t_n - t_{n-1} \,|\, x_{n-1})\, dx_n \cdots dx_1$$

Calcul des lois jointes

Preuve :
On pose $X_i = W(t_i)$, $Y_i = X_i - X_{i-1}$ pour $i = 1, \cdots, n$, on définit $h(y_1, y_2, \cdots, y_n) = f(y_1, y_1 + y_2, \cdots, y_1 + y_2 + \cdots + y_n)$. Le résultat provient de l'indépendance des Y_i.

Construction d'un processus de Wiener monodimensionnel

Lemme

Soit $W(\cdot)$ un processus de Wiener de dimension 1. Alors

$$\mathbb{E}[W(t)W(s)] = t \wedge s = \min\{t, s\} \quad t, s \geq 0$$

La preuve utilise l'indépendance des acroissements.
La fonction $r(s, t) = \mathbb{E}[W(t)W(s)]$ s'appelle la fonction d'autocorrélation du processus $W(\cdot)$ (en fait, puisque $\mathbb{E}[W(t)] = 0$, c'est la fonction d'autocovariance).

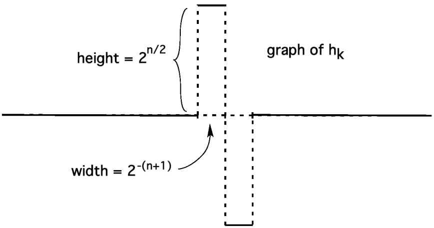
Construction de Lévy-Ciesilsky

Lemme

Les fonctions de Haar $\{h_k(\cdot)\}_{k=0}^{\infty}$ *définies sur* $[0,\ 1]$ *forment une base complète orthonormale de* $L^2(0,\ 1)$

Preuve :

On montre que si $f \in L^2(0,\ 1)$ est telle que $\int_0^1 f(t) h_k(t)\, dt$ pour tout $k \geq 0$ alors $f = 0$ p.p.



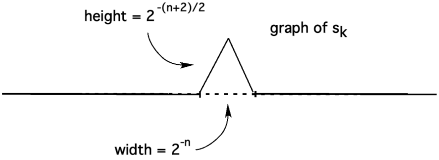
GRAPH OF A HAAR FUNCTION

Construction de Lévy-Ciesilsky

Définition

$$s_k(t) = \int_0^t h_k(s)\, ds \quad 0 \leq t \leq 1 \quad k = 0, 1, \cdots$$

est la kième fonction de Schauder.



Graph of a Schauder function

Construction de Lévy-Ciesilsky

On définit (formellement) $W(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k s_k(t)$, $0 \leq t \leq 1$, où les coefficients A_k sont des v.a. i.i.d $\mathcal{N}(0,1)$.

Lemme

Soit $\{a_k\}_{k \geq 0}$ une suite de réels tels que

$$|a_k| = O(k^\delta) \quad k \to \infty, \quad 0 \leq \delta < 1/2,$$

alors la série $\sum_0^\infty a_k s_k(t)$ converge uniformément sur $[0,\ 1]$.

Preuve :
Il suffit de remarquer que $\max_{2^n \leq k < 2^{n+1}} |a_k| \leq C(2^{n+1})^\delta$.

Construction de Lévy-Ciesilsky

Lemme

Soit $\{A_k\}_{k\geq 0}$ *une suite de v.a. i.i.d.* $\mathcal{N}(0,1)$*. Alors on a p.s.* $|A_k(\omega)| = O(\sqrt{\log k})$ *quand* $k \to \infty$*.*

Preuve :

- On majore $P(|A_k| > x)$ par $Ce^{-\frac{x^2}{4}}$, $C > 0$.
- On en déduit pour $x = 4\sqrt{\log k}$, $P(|A_k| > 4\sqrt{\log k}) \leq C\frac{1}{k^4}$.
- L'application du lemme de Borel-Cantelli donne $P(|A_k| > 4\sqrt{\log k} \text{ i.s.}) = 0$, i.s.="infiniment souvent".
- Donc pour presque tout ω, $|A_k(\omega)| \leq 4\sqrt{\log k}$ dès que $k \geq K(\omega)$.

Construction de Lévy-Ciesilsky

Lemme

$\sum_{k=0}^{\infty} s_k(s)s_k(t) = t \wedge s$ *pour* $0 \leq s, t \leq 1$.

Preuve :

- Soit $\Phi_s(\tau) = 1$ si $0 \leq \tau \leq s$ et 0 sinon.
- D'après le lemme sur les fonctions de Haar on a, si $s \leq t$

$$s = \int_0^1 \Phi_t \Phi_s \, d\tau = \sum_{k \geq 0} a_k b_k,$$

- avec

$$a_k = \int_0^1 \Phi_t h_k \, d\tau = \int_0^t h_k \, d\tau = s_k(t)$$

et pour la même raison $b_k = s_k(s)$.

Construction de Lévy-Ciesilsky

Théorème

Soit $\{A_k\}_{k \geq 0}$ *une suite de v.a. i.i.d.* $\mathcal{N}(0, 1)$ *définies sur le même espace de probabilité. La somme*

$$W(t, \omega) = \sum_{k \geq 0} A_k(\omega) s_k(t) \quad 0 \leq t \leq 1$$

converge uniformément en t p.s. De plus

1. $W(\cdot)$ *est un mouvement brownien pour* $0 \leq t \leq 1$*.*
2. *Les trajectoires* $t \to W(t, \omega)$ *sont continues p.s.*

Construction de Lévy-Ciesilsky

Schéma de preuve :

- La convergence uniforme est une conséquence des lemmes précédents et implique (ii) et $W(0) = 0$ p.s..
- On montre que $W(t) - W(s)$ est $\mathcal{N}(0, t-s)$ en calculant la fonction caractéristique et en utilisant l'indépendance des A_k et le lemme précédent.
- On démontre ensuite, pour $m = 1, 2, \cdots$ et pour tout $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m \leq 1$ que la fonction de répartition $F_{W(t_1), W(t_2)-W(t_1), \cdots, W(t_m)-W(t_{m-1})}(x_1, \cdots, x_m)$ est égale à $F_{W(t_1)}(x_1)\, F_{W(t_2)-W(t_1)}(x_2) \cdots F_{W(t_m)-W(t_{m-1})}(x_m)$ en utilisant la fonction caractéristique :

$$\mathbb{E}\left[e^{i \sum_{j=1}^m \lambda_j (W(t_j) - W(t_{j-1}))}\right] = \Pi_{j=1}^m e^{-\frac{\lambda_j^2}{2}(t_j - t_{j-1})}$$

Construction de Lévy-Ciesilsky

Théorème

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace de probabilité sur lequel il existe une famille dénombrable de v.a. i.i.d.* $\mathcal{N}(0, 1)$*. Alors il existe un mouvement brownien* $W(.)$ *défini pour* $\omega \in \Omega$ *et* $t \geq 0$*.*

Preuve :

On construit une famille dénombrable de mouvements browniens $W^n(t)$, $n \geq 0$ sur $[0, 1]$ puis W par induction :

$$W(t) = W(n-1) + W^n(t-(n-1)) \quad n-1 \leq t \leq n$$

Mouvement brownien dans R^n

Définition

Un processus stochastique $\mathbf{W}(\cdot) = (W^1(\cdot), \cdots, W^n(\cdot))$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$ *est un processus de Wiener (ou un mouvement brownien) n-dimensionnel si*

1. *Pour chaque* $k = 1, \cdots, n$, $W^k(\cdot)$ *est un processus de Wiener monodimensionnel.*
2. *Les* σ*-algèbres* $\mathcal{W}^k = \mathcal{A}(W^k(t) \,|\, t \geq 0)$ *sont indépendantes pour* $k = 1, \cdots, n$.

En utilisant les résultats précédents on sait construire un processus de Wiener n-dimensionnel.

Mouvement brownien dans R^n

Lemme

Si $\mathbf{W}(\cdot)$ est un processus de Wiener n-dimensionnel alors

1. $\mathbb{E}\left[W^k(t)W^l(s)\right] = (t \wedge s)\delta_{kl} \quad k, l = 1, \cdots, n$
2. $\mathbb{E}\left[(W^k(t) - W^k(s))(W^l(t) - W^l(s))\right] = (t - s)\delta_{kl} \quad k, l = 1, \cdots, n \quad t \geq s \geq 0$

Mouvement brownien dans R^n

Théorème

1. *Si* $\mathbf{W}(\cdot)$ *est un processus de Wiener n-dimensionnel, alors* $\mathbf{W}(t) \sim \mathcal{N}(0,\, t\, Id)$ *pour* $t > 0$*. Id est la matrice identité de taille n.*
2. *Pour chaque fonction mesurable* $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \cdots \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *on a, si* $g(\mathbf{x},\, t \,|\, \mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{2t}}$ *:*

$$\mathbb{E}\left[f(\mathbf{W}(t_1), \cdots, \mathbf{W}(t_m)\right] =$$
$$\int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_m)\, g(\mathbf{x}_1,\, t_1 \,|\, 0)\, g(\mathbf{x}_2,\, t_2 - t_1 \,|\, \mathbf{x}_1) \cdots$$
$$g(\mathbf{x}_m,\, t_m - t_{m-1} \,|\, \mathbf{x}_{m-1})\, d\mathbf{x}_m \cdots d\mathbf{x}_1$$

Continuité

Définition

Soit $0 < \gamma \leq 1$. *Une fonction* $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ *est dite uniformément hölderienne d'exposant* γ *s'il existe une constante* K *telle que*

$$|f(t) - f(s)| \leq K \, |t - s|^{\gamma} \quad \forall t, s \in [0, T]$$

Continuité

On utilise le théorème suivant dû à Kolmogorov :

Théorème

Soit $\mathbf{X}(\cdot)$ *un processus stochastique à trajectoires continues p.s. et tel que*

$$\mathbb{E}\left[|\mathbf{X}(t)-\mathbf{X}(s)|^{\beta}\right] \leq C\,|t-s|^{1+\alpha}, \quad \alpha,\ \beta > 0,\ C \geq 0 \quad \forall t,\ s \geq 0.$$

Alors pour tout $0 < \gamma < \frac{\alpha}{\beta}$, $T > 0$ *et pour presque tout* ω, *il existe une constante* $K(\omega,\ \gamma,\ T)$ *telle que*

$$|\,\mathbf{X}(t,\ \omega)-\mathbf{X}(s,\ \omega)\,| \leq K\,|\,t-s\,|^{\gamma} \quad \forall 0 \leq s,\ t \leq T$$

On a donc continuité hölderienne uniforme d'exposant γ sur $[0,\ T]$.

Continuité

Schéma de démonstration :

- On suppose pour simplifier que $T = 1$. Soit γ tel que $0 < \gamma < \frac{\alpha}{\beta}$. On considère les événements $A_n = \{\left|\mathbf{X}(\frac{i+1}{2^n}) - \mathbf{X}(\frac{i}{2^n})\right| > \frac{1}{2^{n\gamma}}\}$ pour un entier i tel que $0 \leq i < 2^n$ pour $n \geq 1$.
- Par l'inégalité de Chebyshev on majore $P(A_n)$ par $C\,2^{n(-\alpha+\beta\gamma)}$ et on en déduit que $\sum_{n\geq 1} P(A_n) < \infty$.
- Le lemme de Borel-Cantelli implique que $P(A_n i.s.) = 0$ et donc que pour presque tout ω il existe $m = m(\omega)$ tel que si $n \geq m$

$$\left|\mathbf{X}(\frac{i+1}{2^n}) - \mathbf{X}(\frac{i}{2^n})\right| \leq \frac{1}{2^{n\gamma}} \quad 0 \leq i \leq 2^n - 1$$

Continuité

- On peut donc trouver $K(\omega)$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{c} \left|\mathbf{X}(\frac{i+1}{2^n}) - \mathbf{X}(\frac{i}{2^n})\right| \leq K \frac{1}{2^{n\gamma}} \\ \forall n \geq 0 \end{array} \right.$$

- On montre alors que ceci implique la propriété hölderienne.

Continuité

Application au mouvement brownien :
On montre que

$$\mathbb{E}\left[|\mathbf{W}(t)-\mathbf{W}(s)|^{2m}\right]=C\,|t-s|^{m}$$

pour tout $m \geq 1$.
Les hypothèses du théorème de Kolmogorov sont satisfaites pour $\beta = 2m$ et $\alpha = m - 1$. $\mathbf{W}(\cdot)$ est donc hölderien pour tous les exposants γ tels que $0 < \gamma < \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2m}$

Différentiabilité

Théorème (Dvoretsky, Erdös, Kakutani)

1. *Pour tout* γ, $\frac{1}{2} < \gamma \leq 1$ *et pour presque tout* ω, $t \to \mathbf{W}(t, \omega)$ *n'est nulle part hölderien d'exposant* γ.
2. *En particulier, p.s., la trajectoire* $t \to \mathbf{W}(t, \omega)$ *n'est différentiable nulle part et de variation infinie sur chaque sous intervalle.*

Différentiabilité

Schéma de démonstration :
Il suffit de considérer un mouvement brownien de dimension 1 sur $[0,1]$.

- On choisit N assez grand pour que $N\left(\gamma - \frac{1}{2}\right) > 1$.
- Supposons que $t \to W(t,\omega)$ soit Hölder d'exposant γ en s, $0 \leq s < 1$. Alors il existe K tel que

$$|W(t,\omega) - W(s,\omega)| \leq K|t-s|^{\gamma} \quad \forall t \in [0,1]$$

Différentiabilité

- On choisit $n \gg 1$ et $i = [ns] + 1$, alors pour $j = i, i+1, \cdots, i+N-1$ on a

$$\left| W(\frac{j+1}{n}, \omega) - W(\frac{j}{n}, \omega) \right| \leq \left| W(s, \omega) - W(\frac{j}{n}, \omega) \right| + \left| W(s, \omega) - W(\frac{j+1}{n}, \omega) \right| \leq \frac{M}{n^\gamma}$$

pour une certaine constante M.

- Donc ω appartient à l'un des événements

$$A^i_{M,n} = \left\{ \left| W(\frac{j+1}{n}) - W(\frac{j}{n}) \right| \leq \frac{M}{n^\gamma} \quad j = i, \cdots, i+N-1 \right\}$$

pour certains i tels que $1 \leq i \leq n$, un $M \geq 1$ et tous les n assez grands.

Différentiabilité

- L'ensemble des ω tels que $W(\omega, \cdot)$ est Hölder de coefficient γ est inclus dans l'ensemble

$$\bigcup_{M=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{n} A_{M,n}^{i}$$

- On montre que cet événement est de probabilité nulle, d'où découle 1.
- Si $W(t, \omega)$ est différentiable en s il est Hölder de coefficient 1 en ce point, ce qu'il n'est pas p.s. Enfin, si $W(t, \omega)$ est de variation finie sur un sous-intervalle il est différentiable p.p. sur cet intervalle.

Bruit blanc

Définition

Soit $X(\cdot)$ *un processus à valeur réelles tel que* $\mathbb{E}[X^2(t)] < \infty$ *pour tout* $t \geq 0$*. On définit sa fonction d'autocorrélation*

$$r(t, s) = \mathbb{E}[X(t)X(s)],\ t,\ s \geq 0,$$

et sa fonction d'autocovariance

$$a(t, s) = \mathbb{E}[(X(t) - \mathbb{E}[X(t)])(X(s) - \mathbb{E}[X(s)])],\ t,\ s \geq 0,$$

Si $\mathbb{E}[X(t)] = \mathbb{E}[X(s]$ *pour tous* $s,\ t \geq 0$ *et* $r(t, s) = c(t - s)$*, pour une fonction* $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, on dit que le processus* $X(\cdot)$ *est stationnaire.*

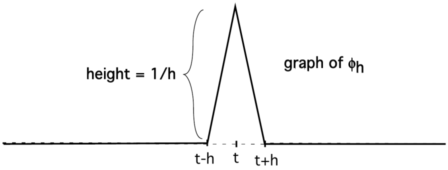
Bruit blanc

- Nous avons défini au début de la leçon le bruit blanc comme la “dérivée” d’un processus de Wiener dont nous savons maintenant que ses trajectoires sont p.s. nul part dérivable.
- On peut néanmoins “définir” un bruit blanc comme un processus stationnaire à valeurs réelles de moyenne nulle et de fonction d’autorrélation $c(t) = \delta(t)$.
- On le voit en définissant la fonction

$$\Phi_h(s) = \mathbb{E}\left[\left(\frac{W(t+h) - W(t)}{h}\right)\left(\frac{W(s+h) - W(s)}{h}\right)\right],$$

pour $h > 0$, $t > 0$ fixé, en utilisant les propriétés du mouvement brownien et en faisant tendre h vers 0 (voir figure).

Bruit blanc



Markov

Définition

Si Γ est une σ-algèbre, $\Gamma \subset \mathcal{A}$ alors, pour tout borélien A de $\mathcal{A}$ on définit la v.a. $P(A \mid \Gamma) = \mathbb{E}[\chi_A \mid \Gamma]$

$P(A \mid \Gamma)$ est la probabilité conditionnelle de A étant donné Γ.

Définition

Si $\mathbf{X}(\cdot)$ est un processus stochastique, la σ-algèbre

$$\mathcal{A}(s) = \mathcal{A}(\mathbf{X}(r) \mid 0 \leq r \leq s)$$

s'appelle l'historique du processus jusqu'au temps s.

Markov

Définition

Un processus $\mathbf{X}(\cdot)$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$ *est dit de Markov si*

$$P(\mathbf{X}(t) \in B \,|\, \mathcal{A}(s)) = P(\mathbf{X}(t) \in B \,|\, \mathbf{X}(s)) \; p.s.$$

pour tout s *tel que* $0 \leq s < t$ *et pour tout borélien* B *de* $\mathbb{R}^n$*.*

Markov

Théorème

Soit $\mathbf{W}(\cdot)$ *un processus de Wiener n-dimensionnel. Alors* $\mathbf{W}(\cdot)$ *est de Markov et p.s.*

$$P(\mathbf{W}(t) \in A \,|\, \mathbf{W}(s)) = \frac{1}{(2\pi(t-s))^{n/2}} \int_A e^{-\frac{|\,\mathbf{x}-\mathbf{W}(s)\,|^2}{2(t-s)}}\, dx$$

pour tous s tels que $0 \leq s < t$ *et tous les boréliens A.*

Noter que les deux côtés de cette égalité sont des v.a.

Markov

Schéma de preuve de la deuxième partie :

- On définit
$$\Phi(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi(t-s))^{n/2}} \int_A e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{2(t-s)}} \, d\mathbf{x}$$
- On remarque que $\Phi(\mathbf{W}(s))$ est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{A}(\mathbf{W}(s))$.
- Il suffit donc de montrer que pour tout borélien C de $\mathcal{A}(\mathbf{W}(s))$
$$\int_C \chi_{\mathbf{W}(t) \in A} \, dP = \int_C \Phi(\mathbf{W}(s)) \, dP$$
- Ceci résulte de ce que $C = \{\mathbf{W}(s) \in B\}$ pour un certain borélien $B \subset \mathbb{R}^n$ et des définitions.

Markov

- Par exemple

$$\begin{aligned}\int_C \chi_{\mathbf{W}(t)\in A}\, dP &= P(\mathbf{W}(s) \in B,\, \mathbf{W}(t) \in A) \\ &= \int_B \int_A g(\mathbf{y},\, s \,|\, 0)\, g(\mathbf{x},\, t-s \,|\, \mathbf{y})\, d\mathbf{x}\, d\mathbf{y} \\ &= \int_B g(\mathbf{y},\, s \,|\, 0)\Phi(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}\end{aligned}$$

- et

$$\begin{aligned}\int_C \Phi(\mathbf{W}(s))\, dP &= \int_\Omega \chi_B(\mathbf{W}(s))\, \Phi(\mathbf{W}(s))\, dP \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_B(\mathbf{y})\, \Phi(\mathbf{y})\, \frac{e^{-\frac{|\mathbf{y}|^2}{2s}}}{(2\pi s)^{n/2}}\, d\mathbf{y}\end{aligned}$$