Théorèmes de la variété centrale

Olivier FAUGERAS

28 Octobre 2009

Plan

Plan

Systèmes continus

Systèmes discrets

Dépendance d'un paramètre

Application : bifurcation pli générique dans R^2

Application : bifurcation Andronov-Hopf générique dans R^3

Application aux bifurcations de cycles limites

Plan

Plan

Plan

Systèmes continus

Systèmes discrets

Dépendance d'un paramètre

Application : bifurcation pli générique dans R^2

Application : bifurcation Andronov-Hopf générique dans R^3

Application aux bifurcations de cycles limites

Plan

Théorème de la variété centrale

On considère

$$\dot{x} = f(x),\ x \in \mathbb{R}^n, f \text{ régulière},\ f(0) = 0$$

Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de la jacobienne.
On suppose $n_0 \neq 0$. Soit T_c le sous-espace vectoriel correspondant aux valeurs propres de partie réelle nulle.

Théorème (Pliss 1964, Kelley 1967, Hirsch et al. 1977)

Il existe une sous-variété W^c_{loc} régulière de dimension n_0 définie dans un voisinage de 0 tangente à T_c à l'origine. Il existe un voisinage U de l'origine tel que si $\varphi^t x \in U$ for all $t \geq 0$ ($t \leq 0$) then $\lim_{t \to +\infty} \varphi^t x \in W^c_{loc}$ ($\lim_{t \to -\infty} \varphi^t x \in W^c_{loc}$).

Théorème de la variété centrale

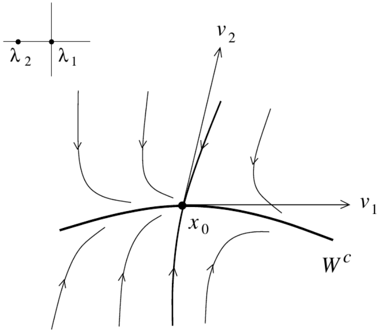


Figure tirée de Kuznetzov 1998.

Théorème de la variété centrale

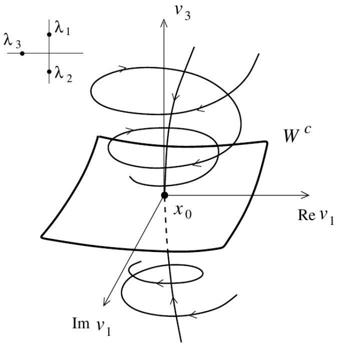


Figure tirée de Kuznetzov 1998.

Théorème de la variété centrale

Remarques :

- W^c n'est pas forcément unique.
- W^c hérite de la régularité de f.

Théorème de la variété centrale

Dans une base propre, le système s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{u} & = & Bu + g(u,v) \\ \dot{v} & = & Cv + h(u,v) \end{array} \right. , \; u \in \mathbb{R}^{n_0}, \; v \in \mathbb{R}^{n_- + n_+}$$

B a toute ses valeurs propres de parties réelles nulles, C n'en a aucune.
g, h sont régulières et $O(\|u\|^2 + \|v\|^2)$.
W^c peut être représenté localement comme le graphe d'une fonction régulière

$$W^c = \{(u,\, v) \,:\, v = V(u)\} \quad V : \mathbb{R}^{n_0} \to \mathbb{R}^{n_- + n_+} \quad V(u) = O(\|u\|^2)$$

Théorème de la variété centrale

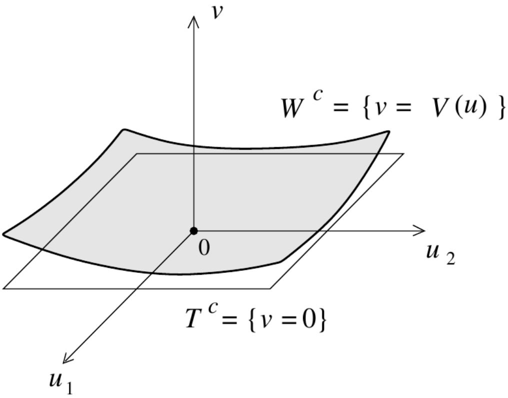


Figure tirée de Kuznetzov 1998.

Théorème de la variété centrale

Théorème (Principe de réduction)

Le système est localement topologiquement équivalent au voisinage de l'origine au système

$$\begin{cases} \dot{u} = Bu + g(u, V(u)) \\ \dot{v} = Cv \end{cases}$$

Théorème de la variété centrale

Remarques :

- Les équations sont découplées.
- La première est la restriction du système à W^c.
- La seconde peut être remplacée par celle du *col* générique

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \dot{v} & = & -v \\ \dot{w} & = & w \end{array} \right., (v, w) \in \mathbb{R}^{n_-} \times \mathbb{R}^{n_+}$$

- Au voisinage d'un équilibre non-hyperbolique, le système est localement topologiquement équivalent à la suspension de sa restriction à la variété centrale par le col générique.

Théorème de la variété centrale

On considère

$$x \to f(x),\ x \in \mathbb{R}^n, f \text{ régulière},\ f(0) = 0$$

Soient $\mu_1, \cdots, \mu_n$ les valeurs propres de la jacobienne.
On suppose $n_0 \neq 0$. Soit T_c le sous-espace vectoriel correspondant aux valeurs propres de partie réelle nulle.
On a exactement le même théorème que dans le cas continu.

Théorème de la variété centrale

Théorème (Principe de réduction)

Le système est localement topologiquement équivalent au voisinage de l'origine au système

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} Bu + g(u, V(u)) \\ Cv \end{pmatrix}$$

Théorème de la variété centrale

Remarques :

$n_+ = 0$ Deux cas

1. Si $detC > 0$ on peut remplacer $v \to Cv$ par $v \to \frac{1}{2}v$ (noeud générique stable préservant l'orientation) ,
2. sinon on prend (noeud générique stable changeant l'orientation)

$$\begin{cases} v_1 & \to & \frac{1}{2}v_1, \; v_1 \in \mathbb{R}^{n_- -1} \\ v_2 & \to & -\frac{1}{2}v_2, \; v_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$n_+ \neq 0$ on a soit $w \to 2w$ (noeud générique instable préservant l'orientation) soit (noeud générique instable changeant l'orientation)

$$\begin{cases} w_1 & \to & 2w_1, \; w_1 \in \mathbb{R}^{n_+ -1} \\ w_2 & \to & -2w_2, \; w_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Dépendance d'un paramètre

On considère

$$\dot{x} = f(x, \alpha),\ x \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \in \mathbb{R},\ f \text{ régulière}$$

On suppose que ce système a un équilibre non-hyperbolique $x = 0$ pour $\alpha = 0$. On considère le système étendu

$$\begin{cases} \dot{\alpha} & = & 0 \\ \dot{x} & = & f(x, \alpha) \end{cases} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ f_\alpha(0,0) & f_x(0,0) \end{pmatrix}$$

J a $n_0 + 1$ valeurs propres de parties réelles nulles, et $n - n_0$ valeurs propres de parties réelles non nulles.
On applique le théorème de la variété centrale à ce système.
On en déduit l'existence locale de $W^c \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $dim W^c = n_0 + 1$.
Les hyperplans $\Pi_{\alpha_0} = \{(\alpha,\ x)\ :\ \alpha = \alpha_0\}$ sont invariants pour le système étendu.

Dépendance d'un paramètre

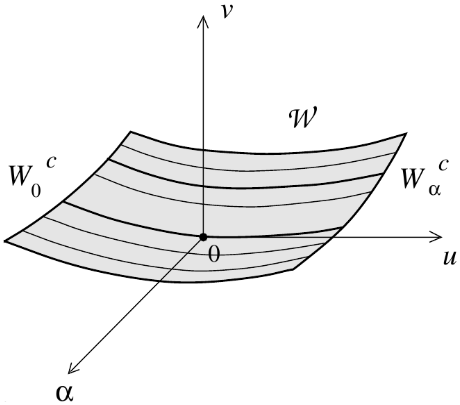


Figure tirée de Kuznetzov 1998.

Dépendance d'un paramètre

On considère $W^c_\alpha = W^c \cap \Pi_\alpha$ et on a le

Lemme

Le système $\dot{x} = f(x, \alpha)$ admet W^c_α comme variété centrale locale

On introduit un système de coordonnées (dépendant de α) sur W^c_α pour $|\alpha|$ suffisamment petit. La restriction du système à W^c_α prend la forme

$$\dot{u} = \Phi(u, \alpha),\ u \in \mathbb{R}^{n_0},$$

Dépendance d'un paramètre

Théorème (Shoshitaishvili, 1975)

Le système $\dot{x} = f(x, \alpha)$ est localement topologiquement équivalent à la suspension de $\dot{u} = \Phi(u, \alpha)$ par le col générique.

Bien entendu $\dot{u} = \Phi(u, \alpha)$ peut être remplacé par un système localement topologiquement équivalent.

Bifurcation pli générique dans R^2

Supposons que

$$\dot{x} = f(x, \alpha),\ x \in \mathbb{R}^2,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

aie pour $\alpha = 0$ l'équilibre $x = 0$ avec $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 < 0$.
On a l'existence pour $|\alpha|$ suffisamment petit d'une sous-variété W_α^c de dimension 1.
Pour $\alpha = 0$, la restriction s'écrit

$$\dot{u} = au^2 + O(u^3)$$

Bifurcation pli générique dans R^2

Si $a \neq 0$ et si l'équation restreinte dépend de manière générique de α elle est localement topologiquement équivalente à la forme normale

$$\dot{u} = \alpha + \sigma u^2, \ \sigma = \mathrm{signe}\, a = \pm 1$$

Le théorème de Shoshitaishvili nous dit que le système est localement topologiquement équivalent à

$$\begin{cases} \dot{u} & = & \alpha + \sigma u^2 \\ \dot{v} & = & -v \end{cases}$$

Bifurcation pli générique dans R^2

Bifurcation pli ($\sigma = 1$) dans le système standard de coordonnées:

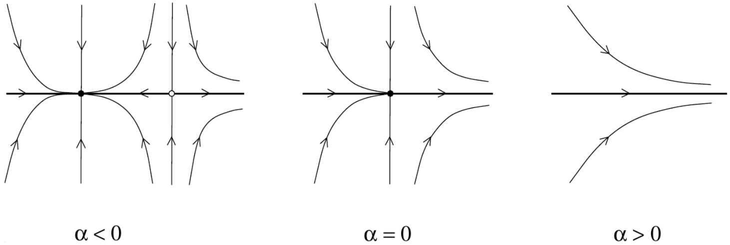
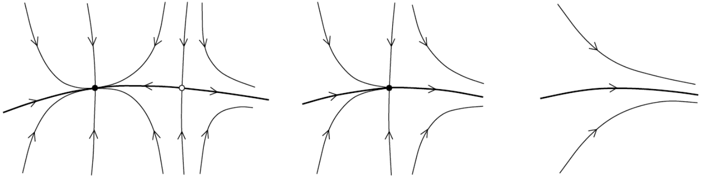


Figure tirée de Kuznetzov 1998.

Bifurcation pli générique dans R^2

Bifurcation pli ($\sigma = 1$) dans un système générique de coordonnées planes:



$\alpha < 0$ $\alpha = 0$ $\alpha > 0$

Figure tirée de Kuznetzov 1998.

Bifurcation Andronov-Hopf générique dans R^3

Supposons que

$$\dot{x} = f(x, \alpha),\ x \in \mathbb{R}^3,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

aie pour $\alpha = 0$ l'équilibre $x = 0$ avec $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$ et $\lambda_3 < 0$. On a l'existence pour $|\alpha|$ suffisamment petit d'une sous-variété W^c_α de dimension 2.
Pour $\alpha = 0$, la restriction s'écrit

$$\dot{z} = i\omega_0 z + g(z, \bar{z}),\ z \in \mathbb{C}$$

Bifurcation Andronov-Hopf générique dans R^3

Si le coefficient de Lyapunov $l_1(0) \neq 0$ et si l'équation restreinte dépend de manière générique de α elle est localement topologiquement équivalente à la forme normale

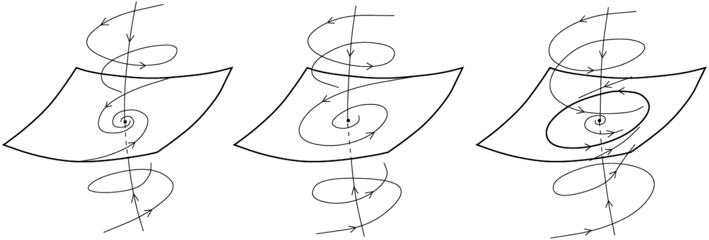
$$\dot{z} = (\alpha + i)z + \sigma z^2 \overline{z}, \ \sigma = \text{signe}\, l_1(0) = \pm 1$$

Le théorème de Shoshitaishvili nous dit que le système est localement topologiquement équivalent à

$$\begin{cases} \dot{z} & = & (\alpha + i)z + \sigma z^2 \overline{z} \\ \dot{v} & = & -v \end{cases}$$

Bifurcation Andronov-Hopf générique dans R^3

Bifurcation de Hopf-Andronov ($\sigma = -1$) dans un système générique de coordonnées 3D:



$\alpha < 0$ $\alpha = 0$ $\alpha > 0$

Figure tirée de Kuznetzov 1998.

Introduction

- Soit L_0 un cycle limite du système $\dot{x} = f(x, \alpha)$ pour $\alpha = 0$.
- Soit P_α l'application de Poincaré pour $|\alpha|$ suffisamment petit, $P_\alpha : \Sigma \to \Sigma$, Σ est une section transverse locale de L_0 (voir leçon 2).
- P_α est régulière et localement invertible.
- Si L_0 n'est pas hyperbolique, le théorème de la variété centrale donne l'existence d'une sous-variété $W_\alpha^c \subset \Sigma$ invariante par P_α sur laquelle les évènements "essentiels" prennent place.
- P_α est localement topologiquement équivalent à la suspension de sa restriction à W_α^c par le col générique.

Bifurcation de pli, $n = 3$

- On suppose que pour $\alpha = 0$ le cycle a un multiplicateur simple $\mu_1 = 1$, l'autre satisfaisant $0 < \mu_2 < 1$.
- La restriction de P_α à la variété centrale W^c_α est de dimension 1, a un point fixe pour $\alpha = 0$ avec $\mu_1 = 1$.
- Ceci implique la collision et la disparition de deux points fixes de P_α lorsque α passe par la valeur 0.
- D'après l'hypothèse sur μ_2 ceci a lieu sur un attracteur invariant de P_α.
- On a collision d'un cycle limite attracteur et d'un cycle limite col qui fusionnent en L_0 avant de disparaître.

Bifurcation de pli, $n = 3$

Bifurcation pli de cycles limite:

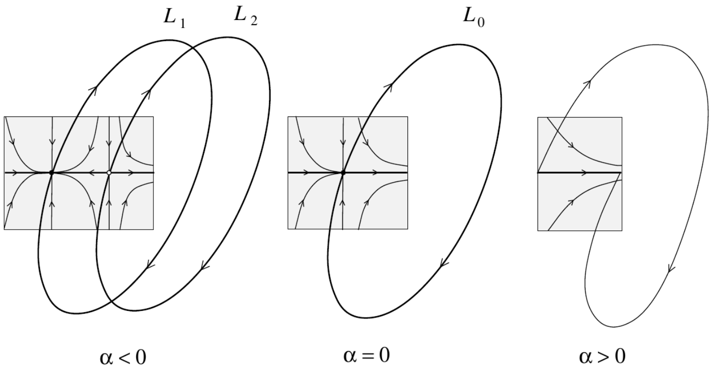


Figure tirée de Kuznetzov 1998.

Bifurcation de clapet, $n = 3$

- On suppose que pour $\alpha = 0$ le cycle a un multiplicateur simple $\mu_1 = -1$, l'autre satisfaisant $-1 < \mu_2 < 0$.
- La restriction de P_α à la variété centrale W^c_α est de dimension 1, a un point fixe pour $\alpha = 0$ avec $\mu_1 = -1$.
- Lorsque α passe par la valeur 0 le point fixe $x = 0$ perd sa stabilité et deux points fixes stables apparaissent.
- L_0 devient instable et un nouveau cycle limite stable L_1 apparaît, de période approximativement double.

Bifurcation de clapet, $n = 3$

Bifurcation clapet de cycles limite:

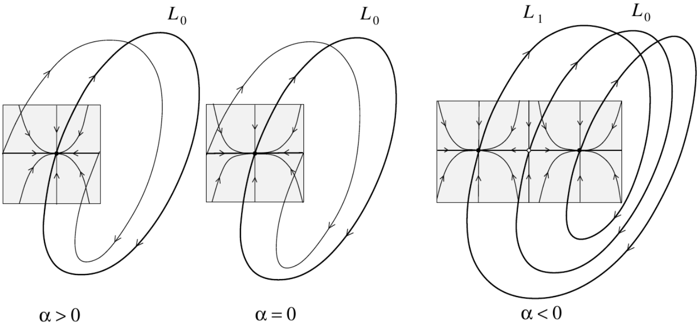


Figure tirée de Kuznetzov 1998.

Bifurcation de Neimark-Sacker, $n = 3$

- On suppose que pour $\alpha = 0$ le cycle a deux multiplicateur complexes conjugués sur le cercle unité $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$,
- La restriction de P_α à la variété centrale est de dimension 2.
- Le point fixe attracteur perd sa stabilité et bifurque en une courbe fermée invariante.
- Elle correspond à un tore invariant de dimension 2 pour le système continu initial.
- La structure des orbites sur le tore est déterminée par la restriction de P_α à la courbe invariante.

Bifurcation de Neimark-Sacker, $n = 3$

Bifurcation de Neimark-Sacker de cycles limite:

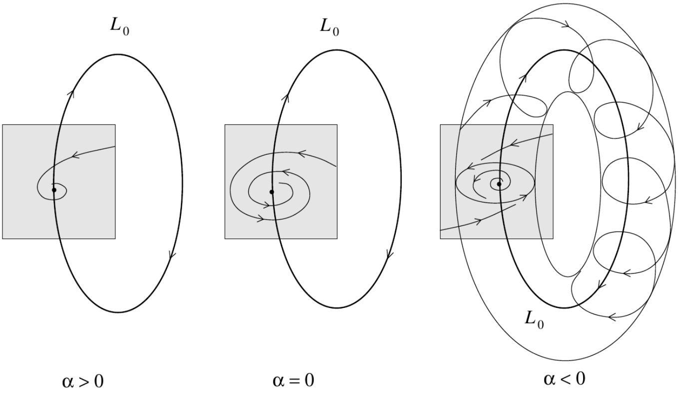


Figure tirée de Kuznetzov 1998.