

Bifurcations de codimension 2

Olivier FAUGERAS

28 Octobre 2008

Plan

Introduction et exemples

Cas général

Liste des bifurcations de codimension 2

La fronce

Plan

Introduction et exemples

Cas général

Liste des bifurcations de codimension 2

La fronce

Plan

Introduction et exemples

Cas général

Liste des bifurcations de codimension 2

La fronce

Plan

Introduction et exemples

Cas général

Liste des bifurcations de codimension 2

La fronce

Introduction

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}^2, \quad f, \text{ régulière}$$

Si le système a pour $\alpha = \alpha_0$ un équilibre $x = x_0$ en lequel les conditions de la bifurcation pli ou de Hopf sont satisfaites alors, génériquement, il existe une courbe \mathbb{B} du plan (α_1, α_2) le long de laquelle le système a un équilibre avec les mêmes caractéristiques.

Exemple 1 : pli en dimension 1

- ▶ Pour $\alpha = \alpha_0$ on a $f(x_0, \alpha_0) = f_x(x_0, \alpha_0) = 0$.
- ▶ Le système

$$\begin{cases} f(x, \alpha) = 0 \\ f_x(x, \alpha) = 0 \end{cases}$$

définit génériquement une courbe de \mathbb{R}^3 passant par le point de coordonnées $(x_0, \alpha_1^0, \alpha_2^0)$.

- ▶ Génériquement veut dire que le rang de

$$J = \begin{pmatrix} f_x & f_{\alpha_1} & f_{\alpha_2} \\ f_{xx} & f_{x\alpha_1} & f_{x\alpha_2} \end{pmatrix}$$

est 2.

Exemple 1 : pli en dimension 1

- ▶ Puisque les conditions de la bifurcation pli sont, par exemple,

$$\begin{cases} f_{\alpha_1}(x_0, \alpha_0) \neq 0 \\ f_{xx}(x_0, \alpha_0) \neq 0 \end{cases}$$

cette condition est bien satisfaite.

- ▶ Le théorème des fonctions implicites donne l'existence de deux fonctions régulières $x = X(\alpha_2)$ et $\alpha_1 = A(\alpha_2)$ satisfaisant le système ci-dessus et telles que $x_0 = X(\alpha_2^0)$ et $\alpha_1^0 = A(\alpha_2^0)$.

Exemple 1 : pli en dimension 1

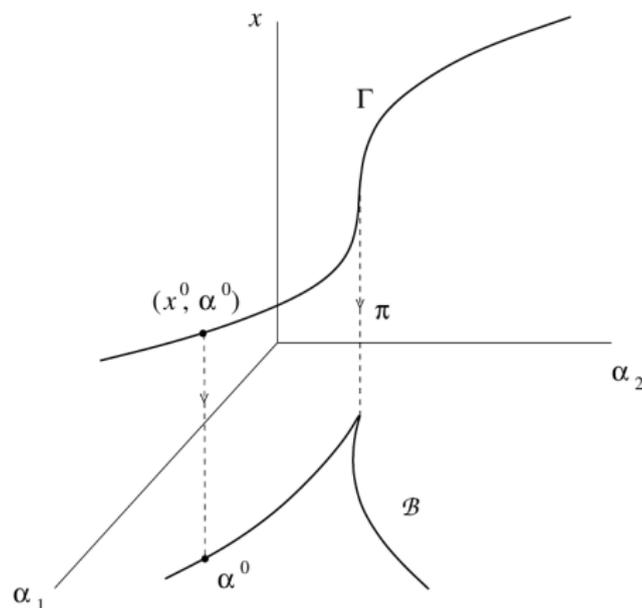


Figure tirée de Kuznetsov 1998.

Exemple 2 : Andronov-Hopf en dimension 2

- ▶ Pour $\alpha = \alpha_0$ on a $f(x_0, \alpha_0) = 0$ et la jacobienne $f_x(x_0, \alpha_0)$ a deux valeurs propres conjuguées sur l'axe imaginaire $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$.
- ▶ Le système de trois équations scalaires

$$\begin{cases} f(x, \alpha) = 0 \\ \text{Tr } f_x(x, \alpha) = 0 \end{cases}$$

définit génériquement une courbe de \mathbb{R}^4 passant par le point de coordonnées (x_0, α_0) .

- ▶ Génériquement veut dire que le rang de

$$J = \begin{pmatrix} f_x & f_\alpha \\ (\text{Tr } f_x)_x & (\text{Tr } f_x)_\alpha \end{pmatrix}$$

est 3.

Exemple 2 : Andronov-Hopf en dimension 2

- ▶ Puisque les conditions de la bifurcation D'Andronov-Hopf ($l_1(0) \neq 0$ et $\mu'(0) \neq 0$) sont satisfaites, alors la condition de rang est vraie.
- ▶ Le théorème des fonctions implicites donne l'existence de deux fonctions régulières $x = X(\alpha_2)$ et $\alpha_1 = A(\alpha_2)$ satisfaisant le système ci-dessus et telles que $x_0 = X(\alpha_2^0)$ et $\alpha_1^0 = A(\alpha_2^0)$. Elles définissent une courbe Γ de \mathbb{R}^4 dont la projection dans le plan α est la courbe de bifurcation \mathbb{B} .
- ▶ Chaque point de Γ définit un équilibre du système tel que $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$ tant que $\det(f_x(x, \alpha)) > 0$.

Cas général

- ▶ Tout marche dans le cas $x \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}^2$. Dans chaque cas (pli et Hopf) on peut construire une fonction scalaire régulière $\psi(x, \alpha)$ de la jacobienne $J = f_x$ qu'on ajoute à l'équation d'équilibre.
- ▶ Ces $n + 1$ équations définissent de manière générique une courbe de \mathbb{R}^{n+2} passant par le point (x_0, α_0) .
- ▶ Cas du pli : $\psi(x, \alpha) = \det(f_x(x, \alpha)) = \prod \lambda_i$.

Cas général

- ▶ Cas de Hopf : $\psi(x, \alpha) = \det(2f_x(x, \alpha) \circ I) = \prod_{i>j}(\lambda_i + \lambda_j)$.
- ▶ \circ représente le produit bialterné de deux matrices, c'est une matrice de taille $\frac{1}{2}n(n-1)$.
- ▶ Dans les deux cas on montre que la jacobienne correspondant aux $n+1$ équations

$$\begin{cases} f(x, \alpha) = 0 \\ \psi(x, \alpha) = 0 \end{cases}$$

est de rang $n+1$ en tout point correspondant à une bifurcation (pli ou Hopf) générique.

Quels évènements ?

- ▶ D'autres valeurs propres de la jacobienne peuvent se rapprocher de l'axe imaginaire, changeant ainsi la dimension de W^c .
- ▶ Certaines des conditions de genericité de la bifurcation de codimension 1 peuvent être violées.
 - ▶ Les conditions de non dégénérescence calculées à partir des coefficients de Taylor de $f(x, 0)$ à l'origine : elles déterminent le nombre et la stabilité des équilibres et des cycles limites qui apparaissent.
 - ▶ Les conditions de transversalité calculées à partir de dérivées de $f(x, \alpha)$ par rapport à α : elles suggèrent l'introduction de nouveaux paramètres pour "déployer" la bifurcation.

La courbe B_t de bifurcations pli

Un point "typique" définit un équilibre avec $\lambda_1 = 0$ et aucune autre valeur propre sur l'axe imaginaire. La restriction du système à sa variété centrale a la forme

$$\dot{\xi} = a\xi^2 + O(\xi^3)$$

La courbe B_t de bifurcations pli

On peut donc voir sur \mathbb{B}_t les évènements suivants :

- ▶ Une autre valeur propre réelle prend la valeur 0, $\lambda_{1,2} = 0$ et W^c devient bi-dimensionnelle : Bogdanov-Takens, $n \geq 2$.
- ▶ Deux valeurs propres complexes conjuguées deviennent imaginaires pures, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm i\omega_0$ et W^c devient tri-dimensionnelle : pli-Hopf ou Gavrilov-Guckenheimer, $n \geq 3$.
- ▶ La valeur propre nulle reste simple et la seule sur l'axe imaginaire mais le coefficient a de la forme normale s'annule, $\lambda_1 = a = 0$: fronce, $n \geq 1$.

La courbe B_H de bifurcations de Hopf

Un point "typique" définit un équilibre avec $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ et aucune autre valeur propre sur l'axe imaginaire. La restriction du système à sa variété centrale a la forme

$$\dot{w} = (\beta + i)w + l_1(\beta)w|w|^3 + O(|w|^4)$$

La courbe B_H de bifurcations de Hopf

On peut donc voir sur \mathbb{B}_H les évènements suivants :

- ▶ Deux autres valeurs propres complexes conjuguées deviennent imaginaires pures, $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, $\lambda_{3,4} = \pm i\omega_1$, $\omega_{0,1} > 0$: Hopf-Hopf, $n \geq 4$.
- ▶ l_1 peut prendre la valeur 0, $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, $l_1 = 0$: Bautin, $n \geq 2$.

Introduction

On suppose que le système

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^2, \quad f \text{ régulière}$$

a pour $\alpha = 0$ l'équilibre $x = 0$ pour lequel

$$\lambda = f_x(0, 0) = 0 \quad a = \frac{1}{2} f_{xx}(0, 0) = 0$$

On considère le développement de Taylor de f an $x = 0$:

$$f(x, \alpha) = f_0(\alpha) + f_1(\alpha)x + f_2(\alpha)x^2 + f_3(\alpha)x^3 + O(x^4)$$

avec $f_0(0) = f_1(0) = f_2(0) = 0$.

On obtient une forme normale en deux étapes

Changement de coordonnée

On pose $\xi = x + \delta(\alpha)$, δ régulière. On obtient

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= [f_0(\alpha) - f_1(\alpha)\delta + \delta^2\varphi(\alpha, \delta)] + [f_1(\alpha) - 2f_2(\alpha)\delta + \delta^2\Phi(\alpha, \delta)]\xi \\ &+ [f_2(\alpha) - 3f_3(\alpha)\delta + \delta^2\psi(\alpha, \delta)]\xi^2 + [f_3(\alpha) + \delta\theta(\alpha, \delta)]\xi^3 + O(\xi^4) \end{aligned}$$

Puisque $f_2(0) = 0$ on ne peut pas utiliser le théorème des fonctions implicites pour éliminer le terme linéaire.

On peut l'utiliser pour éliminer le terme quadratique si

$$f_3(0) = \frac{1}{6}f_{xxx}(0, 0) \neq 0.$$

On obtient une fonction régulière $\delta = \delta(\alpha)$ telle que $\delta(0) = 0$ et $F(\alpha, \delta(\alpha)) = 0$ avec

$$F(\alpha, \delta) = f_2(\alpha) - 3f_3(\alpha)\delta + \delta^2\psi(\alpha, \delta)$$

Changement de paramètres

On pose

$$\begin{cases} \mu_1(\alpha) &= f_0(\alpha) - f_1(\alpha)\delta(\alpha) + \delta(\alpha)^2\varphi(\alpha, \delta(\alpha)) \\ \mu_2(\alpha) &= f_1(\alpha) - 2f_2(\alpha)\delta(\alpha) + \delta(\alpha)^2\Phi(\alpha, \delta(\alpha)) \end{cases}$$

On a $\mu(0) = 0$ et le déterminant de la jacobienne de la transformation vaut

$$\det \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \det \begin{pmatrix} f_{\alpha_1}(0, \alpha) & f_{\alpha_2}(0, \alpha) \\ f_{x\alpha_1}(0, \alpha) & f_{x\alpha_2}(0, \alpha) \end{pmatrix} \Big|_{\alpha=0}$$

Changement de paramètres

S'il est non nul, le théorème des fonctions implicites nous donne l'existence d'une fonction $\alpha = \alpha(\mu)$, régulière, et telle que $\alpha(0) = 0$.

On a donc

$$\dot{\xi} = \mu_1 + \mu_2 \xi + c(\mu) \xi^2 + O(\xi^4)$$

où $c(\mu) = f_3(\alpha(\mu)) + \delta(\alpha(\mu))\theta(\alpha(\mu), \delta(\alpha(\mu)))$ est une fonction régulière de μ et

$$c(0) = f_3(0) = \frac{1}{6} f_{xxx}(0, 0) \neq 0$$

Changement d'échelle

On pose

$$\eta = \frac{\xi}{|\mathbf{c}(\mu)|^{1/2}}$$

et

$$\beta_1 = \mu_1 |\mathbf{c}(\mu)|^{1/2} \quad \beta_2 = \mu_2$$

On obtient

$$\dot{\eta} = \beta_1 + \beta_2 \eta + \mathbf{s} \eta^3 + O(\eta^4) \quad \mathbf{s} = \text{signe} \mathbf{c}(0) = \pm 1$$

Forme normale de la fronce

Théorème

Soit le système $\dot{x} = f(x, \alpha)$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}^2$, f régulière, tel que pour $\alpha = 0$ $x = 0$ est un équilibre pour lequel les conditions de fronce

$$\lambda = f_x(0, 0) = 0 \quad a = \frac{1}{2} f_{xx}(0, 0) = 0$$

soient satisfaites.

Supposons que les deux conditions de généricité

1. $f_{xxx}(0, 0) \neq 0$.
2. $f_{\alpha_1} f_{x\alpha_2} - f_{\alpha_2} f_{x\alpha_1} \neq 0$

soient satisfaites. Alors il existe des changements de coordonnée et de paramètres réguliers et inversibles transformant le système en

$$\dot{\eta} = \beta_1 + \beta_2 \eta \pm \eta^3 + O(\eta^4)$$



Diagramme de bifurcation de la fronce ($s=-1$)

La courbe de bifurcation est définie dans le plan (β_1, β_2) par les équations

$$\beta_1 + \beta_2\eta - \eta^3 = 0 \quad \beta_2 - 3\eta^2 = 0$$

Soit, après élimination de η

$$27\beta_1^2 = 4\beta_2^3 \quad (\mathbb{B})$$

Cette courbe divise le plan en deux régions

1. $4\beta_2^3 - 27\beta_1^2 > 0$: 3 équilibres, 2 stables et 1 instable.
2. $4\beta_2^3 - 27\beta_1^2 < 0$: 1 équilibre stable.

Lorsque l'on traverse \mathbb{B} en tout point sauf l'origine, on a une bifurcation noeud-col.

Lorsqu'on passe par l'origine les trois équilibres se fondent en un seul, stable.

Phénomène d'hystérésis.

Diagramme de bifurcation de la fronce ($s=-1$)

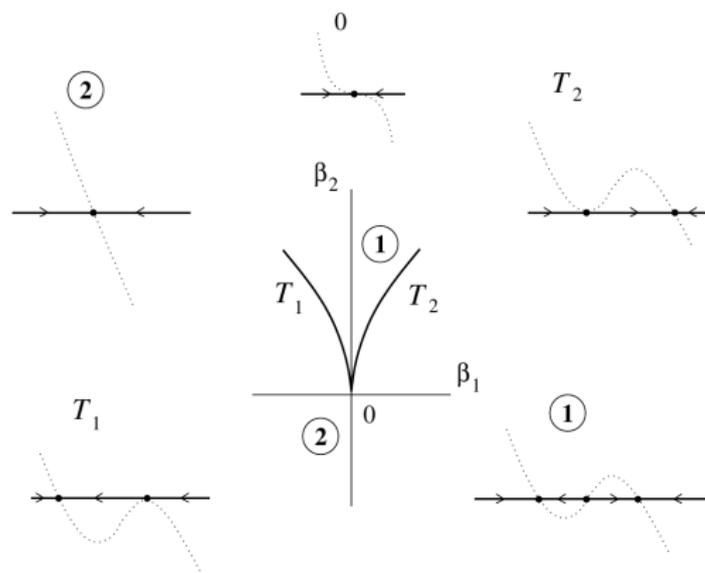


Figure tirée de Kuznetsov 1998.

Diagramme de bifurcation de la fronce ($s=-1$)

Variété des équilibres : $\mathcal{M} = \{(\eta, \beta_1, \beta_2) \mid \beta_1 + \beta_2 \eta - \eta^3 = 0\}$

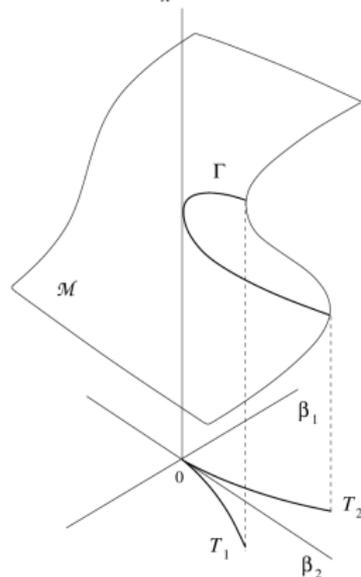


Figure tirée de Kuznetsov 1998.

Diagramme de bifurcation de la fronce ($s=-1$)

Hystérésis : la disparition de l'un des équilibres stables à la traversée de T_1 ou T_2 est la cause des sauts dans l'espace d'état.

