Equivalence topologique, bifurcations

Olivier FAUGERAS

21 Octobre 2009

Plan

Equivalence

Classification topologique des équilibres génériques

Cycles limites

Bifurcations et diagrammes de bifurcations

Formes normales topologiques des bifurcations

Stabilité structurelle

Plan

Equivalence

Classification topologique des équilibres génériques

Cycles limites

Bifurcations et diagrammes de bifurcations

Formes normales topologiques des bifurcations

Stabilité structurelle

Plan

Equivalence

Classification topologique des équilibres génériques

Cycles limites

Bifurcations et diagrammes de bifurcations

Formes normales topologiques des bifurcations

Stabilité structurelle

Plan

Equivalence

Classification topologique des équilibres génériques

Cycles limites

Bifurcations et diagrammes de bifurcations

Formes normales topologiques des bifurcations

Stabilité structurelle

Plan

Equivalence

Classification topologique des équilibres génériques

Cycles limites

Bifurcations et diagrammes de bifurcations

Formes normales topologiques des bifurcations

Stabilité structurelle

Plan

Equivalence

Classification topologique des équilibres génériques

Cycles limites

Bifurcations et diagrammes de bifurcations

Formes normales topologiques des bifurcations

Stabilité structurelle

Définition

Définition

Un système dynamique $\{T, \mathbb{R}^n, \varphi^t\}$ est dit topologiquement équivalent au système $\{T, \mathbb{R}^n, \psi^t\}$ s'il existe un homéomorphisme $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ transformant les orbites du premier système en les orbites du second tout en préservant la direction du temps.

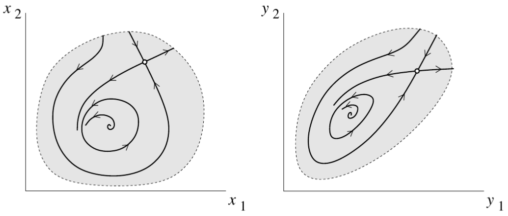


Figure tirée de Kuznetzov, 1995, 1998.

Définition

Dans le cas discret on a la relation explicite

$$f = h^{-1} \circ g \circ h$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & f(x) \arrow[d, "h"'] \\ y \arrow[r, "g"] & g(y) \end{tikzcd}$$

Définition

En pratique on utilise une notion plus faible c.a.d. plus locale

Définition

Un système dynamique $\{T, \mathbb{R}^n, \varphi^t\}$ *est dit localement topologiquement équivalent au voisinage de l'équilibre* x_0 *au système* $\{T, \mathbb{R}^n, \psi^t\}$ *au voisinage de l'équilibre* y_0 *s'il existe un homéomorphisme* $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

1. *défini dans un petit voisinage* $U \subset \mathbb{R}^n$ *de* x_0,
2. *qui satisfait* $y_0 = h(x_0)$,
3. *qui transforme les orbites du premier système dans* U *en les orbites du second dans* $V = f(U)$ *tout en préservant la direction du temps.*

Définition

Exercice : Montrer l'équivalence topologique noeud-foyer (Kuznetsov, p.43)

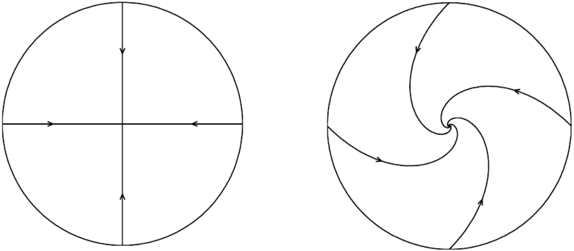


Figure tirée de Kuznetzov, 1995, 1998.

Equilibres hyperboliques : cas des systèmes continus

On considère le système

$\dot{x} = f(x), \; x \in \mathbb{R}^n, \; f$ régulière. $x_0 = 0$ est un équilibre : $f(x_0) = 0$

Soit $A = Df(x_0)$ la Jacobienne en x_0.
Soit n_-, n_0 et n_+ le nombre de ses valeurs propres de parties réelles < 0, $= 0$ et > 0, en comptant leur multiplicité.

Définition

Un équilibre est dit hyperbolique si $n_0 = 0$, c'est un col hyperbolique si $n_- n_+ \neq 0$.

L'hyperbolicité est une propriété typique d'un équilibre d'un système générique.

Equilibres hyperboliques : cas des systèmes continus

On considère le système

$$\dot{x} = f(x), \ x \in \mathbb{R}^n, \ f \text{ régulière. } x_0 = 0 \text{ est un équilibre : } f(x_0) = 0$$

Soit $A = Df(x_0)$ la Jacobienne en x_0.
Soit n_-, n_0 et n_+ le nombre de ses valeurs propres de parties réelles < 0, $= 0$ et > 0, en comptant leur multiplicité.

Définition

Un équilibre est dit hyperbolique si $n_0 = 0$, c'est un col hyperbolique si $n_- n_+ \neq 0$.

L'hyperbolicité est une propriété typique d'un équilibre d'un système générique.

Equilibres hyperboliques : cas des systèmes continus

On considère le système

$\dot{x} = f(x),\ x \in \mathbb{R}^n,\ f$ régulière. $x_0 = 0$ est un équilibre : $f(x_0) = 0$

Soit $A = Df(x_0)$ la Jacobienne en x_0.
Soit n_-, n_0 et n_+ le nombre de ses valeurs propres de parties réelles < 0, $= 0$ et > 0, en comptant leur multiplicité.

Définition

Un équilibre est dit hyperbolique si $n_0 = 0$, c'est un col hyperbolique si $n_- n_+ \neq 0$.

L'hyperbolicité est une propriété typique d'un équilibre d'un système générique.

Equilibres hyperboliques : cas des systèmes continus

On considère le système

$\dot{x} = f(x),\ x \in \mathbb{R}^n,\ f$ régulière. $x_0 = 0$ est un équilibre : $f(x_0) = 0$

Soit $A = Df(x_0)$ la Jacobienne en x_0.
Soit n_-, n_0 et n_+ le nombre de ses valeurs propres de parties réelles < 0, $= 0$ et > 0, en comptant leur multiplicité.

Définition

Un équilibre est dit hyperbolique si $n_0 = 0$, c'est un col hyperbolique si $n_- n_+ \neq 0$.

L'hyperbolicité est une propriété typique d'un équilibre d'un système générique.

Variété stable locale : cas continu

Définition

Soit x_0 un équilibre, son ensemble stable $W^s(x_0)$ est défini

$$W^s(x_0) = \{x : \lim_{t \to \infty} \varphi^t x = x_0\}$$

Son ensemble instable $W^i(x_0)$ est défini par

$$W^i(x_0) = \{x : \lim_{t \to -\infty} \varphi^t x = x_0\}$$

Variété stable locale : cas continu

Théorème (Variété stable locale (continu))

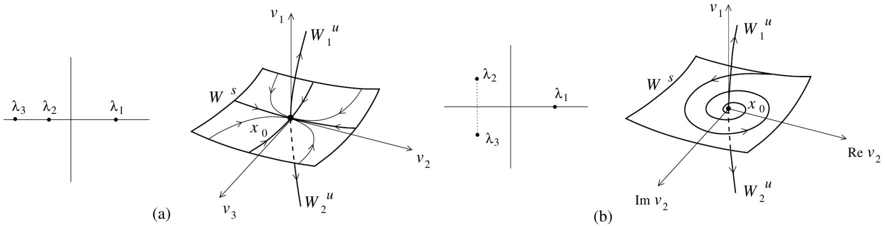
Soit x_0 un équilibre hyperbolique. Les intersections de $W^s(x_0)$ et de $W^i(x_0)$ avec un voisinage suffisamment petit de x_0 contiennent des variétés régulières $W^s_{loc}(x_0)$ et $W^i_{loc}(x_0)$ de dimension n_- et n_+, respectivement.
De plus $W^s_{loc}(x_0)$ (resp. $W^i_{loc}(x_0)$) est tangent en x_0 au sous-espace vectoriel T^s (resp. T^i) correspondant à l'union des valeurs propres λ de A telles que $Re(\lambda) < 0$ (resp. $Re(\lambda) > 0$).

Variété stable locale : cas continu

Schéma de preuve :

- $\varphi^1(T^i)$ est une variété de dimension n_+ tangente à T^i en x_0.
- On choisit un voisinage de x_0 où la partie linéaire est dominante et on itère.
- On démontre que ce processus converge et produit une variété régulière $W^i_{loc}(x_0)$ invariante et tangente en x_0 à T^i.
- Pour $W^s_{loc}(x_0)$ on applique φ^{-1}.

Variété stable locale : cas continu



Variété stable locale : cas continu

Théorème (Classification topologique des équilibres hyperboliques)

Les portraits de phase au voisinage de deux équilibres hyperboliques x_0 et y_0 sont localement topologiquement équivalents si et seulement si ils ont le même nombre n_- et n_+ de valeurs propres de parties réelles négatives et positives, respectivement.

Variété stable locale : cas continu

Schéma de preuve :

- Au voisinage d'un équilibre hyperbolique le système est localement topologiquement équivalent à sa linéarisation $\dot{\xi} = Df(x_0)\xi$ (théorème de Grobman-Hartman).
- On applique le théorème au voisinage de x_0 et y_0 et on démontre l'équivalence topologique de deux systèmes linéaires ayant le même nombre de valeurs propres de parties réelles positives et négatives, respectivement (voir exercice précédent).

Variété stable locale : cas continu

Exercice (en TP) : les équilibres génériques des systèmes bidimensionnels.

Equilibres hyperboliques : cas des systèmes discrets

On considère le système

$x \to f(x), \; x \in \mathbb{R}^n, \; f$ et f^{-1} régulières. x_0 est un point fixe : $f(x_0) = x_0$

f est un difféomorphisme.

Soit $A = Df(x_0)$ la Jacobienne en x_0.

Soit n_-, n_0 et n_+ le nombre de ses valeurs propres (appelées multiplicateurs) de module < 1, $= 1$ et > 1, en comptant leur multiplicité.

Définition

Un point fixe est dit hyperbolique si $n_0 = 0$, c'est un col hyperbolique si $n_- n_+ \neq 0$.

Equilibres hyperboliques : cas des systèmes discrets

On considère le système

$x \to f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, f et f^{-1} régulières. x_0 est un point fixe : $f(x_0) = x_0$

f est un difféomorphisme.

Soit $A = Df(x_0)$ la Jacobienne en x_0.

Soit n_-, n_0 et n_+ le nombre de ses valeurs propres (appelées multiplicateurs) de module < 1, $= 1$ et > 1, en comptant leur multiplicité.

Définition

Un point fixe est dit hyperbolique si $n_0 = 0$, c'est un col hyperbolique si $n_- n_+ \neq 0$.

Equilibres hyperboliques : cas des systèmes discrets

On considère le système

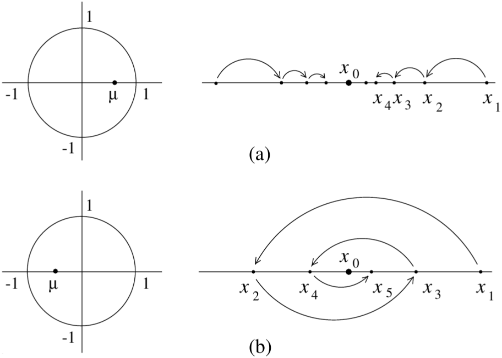
$$x \to f(x),\ x \in \mathbb{R}^n,\ f \text{ et } f^{-1} \text{ régulières. } x_0 \text{ est un point fixe : } f(x_0) = x_0$$

f est un difféomorphisme.
Soit $A = Df(x_0)$ la Jacobienne en x_0.
Soit n_-, n_0 et n_+ le nombre de ses valeurs propres (appelées multiplicateurs) de module < 1, $= 1$ et > 1, en comptant leur multiplicité.

Définition

Un point fixe est dit hyperbolique si $n_0 = 0$, c'est un col hyperbolique si $n_- n_+ \neq 0$.

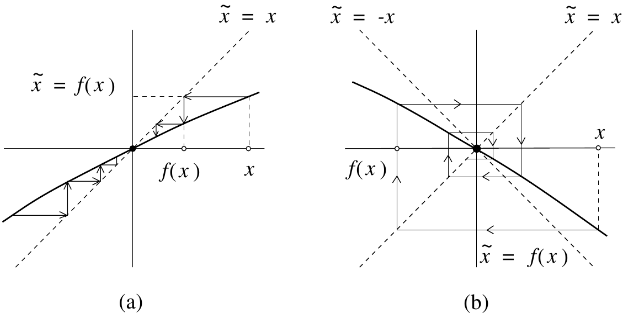
Equilibres hyperboliques discrets : exemples



$$0 < \mu < 1 \quad \text{et} \quad -1 < \mu < 0$$

Figure tirée de Kuznetzov, 1995, 1998.

Equilibres hyperboliques discrets : exemples



Diagrammes en “escalier”.

Figure tirée de Kuznetzov, 1995, 1998.

Variété stable locale : cas discret

Définition

Soit x_0 un point fixe, sa variété stable locale $W^s(x_0)$ est définie par

$$W^s(x_0) = \{x : \lim_{k \to \infty} f^k(x) = x_0\}$$

Sa variété instable locale $W^i(x_0)$ est définie par

$$W^i(x_0) = \{x : \lim_{k \to -\infty} f^k(x) = x_0\}$$

k est un entier.

Variété stable locale : cas discret

Théorème (Variété stable locale (cas discret))

Soit x_0 un point fixe hyperbolique. Les intersections de $W^s(x_0)$ et de $W^i(x_0)$ avec un voisinage suffisamment petit de x_0 contiennent des variétés régulières $W^s_{loc}(x_0)$ et $W^i_{loc}(x_0)$ de dimension n_- et n_+, respectivement.
De plus $W^s_{loc}(x_0)$ (resp. $W^i_{loc}(x_0)$) est tangent en x_0 au sous-espace vectoriel T^s (resp. T^i) correspondant à l'union des valeurs propres λ de A telles que $|\mu| < 1$ (resp. $|\mu| > 1$).

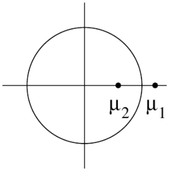
Preuve : analogue au cas continu.

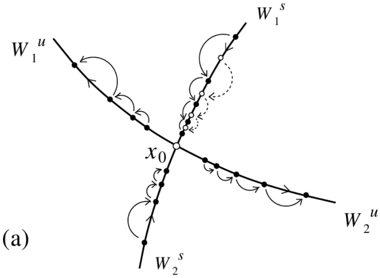
Variété stable locale : cas discret

Théorème (Classification des points fixes hyperboliques)

Les portraits de phase au voisinage de deux équilibres hyperboliques x_0 et y_0 sont localement topologiquement équivalents si et seulement si ils ont le même nombre n_- et n_+ de valeurs propres de modules < 1 et > 1, respectivement, et si les signes des produits des multiplicateurs $|\mu| < 1$ et $|\mu| > 1$ sont les mêmes pour les deux points fixes.

Variété stable locale : cas discret

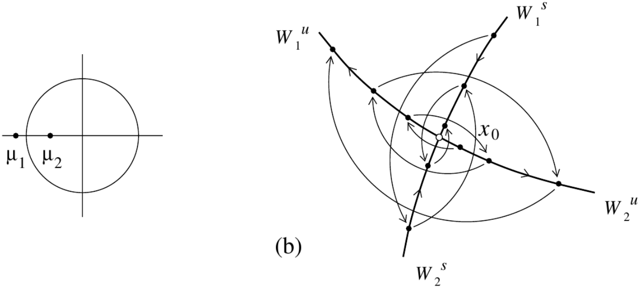




$$0 < \mu_2 < 1 < \mu_1$$

Figure tirée de Kuznetzov, 1995, 1998.

Variété stable locale : cas discret



$$\mu_1 < -1 < \mu_2 < 0$$

Figure tirée de Kuznetzov, 1995, 1998.

Variété stable locale : cas discret

Schéma de preuve : analogue au cas continu.

- La condition sur les produits provient du fait que le difféomorphisme *f* peut préserver l'orientation ($det(J) > 0$) ou ne pas la préserver ($det(J) < 0$).
- L'équivalence topologique implique la préservation de l'orientation.
- Les produits sont les déterminants de la jacobienne de *f* et *g* restreints aux variétés stables et instables locales.
- On peut se restreindre aux multiplicateurs réels.

Application de Poincaré : définition

Soit

$$\dot{x} = f(x), \; x \in \mathbb{R}^n, \; f \text{ régulière} \tag{1}$$

un système dynamique à temps continu. S'il a une orbite périodique L_0, soit x_0 un point de L_0. Considérons une hypersurface Σ transverse à L_0 en x_0, p.e. l'hyperplan d'équation

$$\langle f(x_0), \, x - x_0 \rangle = 0$$

Application de Poincaré : définition

Les solutions de l'EDO dépendent continûment des conditions initiales (voir leçon 1) donc on peut définir dans un voisinage de x_0 dans Σ une application

$$P : \Sigma \to \Sigma$$

Définition

L'application P est l'application de Poincaré associée au cycle L_0.

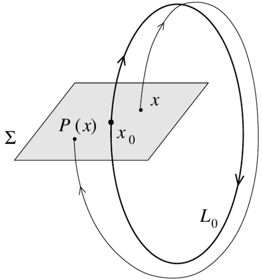


Figure tirée de Kuznetzov, 1995, 1998.

Application de Poincaré : définition

1. P hérite de la régularité de f.
2. P est invertible dans un voisinage de x_0, du fait de l'invertibilité du système défini par (1).
3. x_0 est un point fixe de P.

Application de Poincaré : propriétés

1. On choisit un système de coordonnées locales $(\xi_1, \cdots, \xi_{n-1})$ dans Σ tel que $\xi = 0$ corresponde à x_0.
2. Dans ce système $P : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$ et $P(0) = 0$.
3. La stabilité de L_0 est équivalente à celle de $\xi_0 = 0$.

Application de Poincaré : propriétés

Lemme

Les multiplicateurs $\mu_1, \cdots, \mu_{n-1}$ de la matrice jacobienne A de P associée au cycle L_0 ne dépendent pas du choix de x_0 sur L_0, de la section Σ et du choix des coordonnées locales dans Σ.

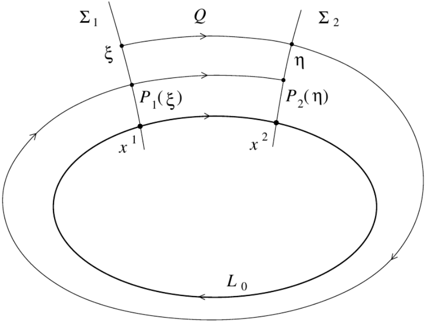


Figure tirée de Kuznetzov, 1995, 1998.

Application de Poincaré : propriétés

Schéma de preuve :

- On considère deux sections Σ_1 et Σ_2 passant par x^1 et x^2 de L_0, P_1 et P_2 les deux applications de Poincaré, ξ, η les coordonnées.
- On définit, comme pour P, localement en x^1 l'application $Q : \Sigma_1 \to \Sigma_2$, régulière, inversible, telle $Q(0) = 0$.
- $P_2 \circ Q = Q \circ P_1$ donc $P_1 = Q^{-1} \circ P_2 \circ Q$.
- On différencie : $\frac{dP_1}{d\xi} = \frac{dQ^{-1}}{d\eta} \frac{dP_2}{d\eta} \frac{dQ}{d\xi}$.
- On évalue en $\xi = 0$: $A_1 = B^{-1} A_2 B$, $B = \left.\frac{dQ}{d\xi}\right|_{\xi=0}$

Application de Poincaré : propriétés

1. Soit $x^0(t)$ une solution périodique de (1) $(x^0(t+T_0) = x^0(t))$ correspondant à l'orbite périodique L_0.
2. On écrit une solution de (1) sous la forme
$$x(t) = x^0(t) + u(t)$$
3. Donc $\dot{u}(t) = \dot{x}(t) - \dot{x}^0(t) = f(x^0(t) + u(t)) - f(x^0(t)) = A(t)u(t) + O(\|u(t)\|^2)$, $A(t) = Df(x^0(t))$, donc $A(t+T_0) = A(t)$.
4. L'équation
$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) \; u \in \mathbb{R}^n$$
est l'équation aux variations du cycle L_0.

Application de Poincaré : propriétés

Définition

La matrice $M(t)$ solution de

$$\dot{M} = A(t)M \quad M(0) = Id$$

s'appelle la solution matricielle fondamentale de (1). Elle satisfait l'équation

$$u(T_0) = M(T_0)u(0)$$

La preuve passe par les exponentielles de matrices:

$$M(t) = exp(\int_0^t A(s)\,ds) \quad u(t) = exp(\int_0^t A(s)\,ds)u(0)$$

Donc $u(T_0) = M(T_0)u(0)$

Application de Poincaré : propriétés

La matrice $M(T_0)$ est la matrice de monodromie du cycle L_0.

Théorème

Les valeurs propres de la matrice de monodromie $M(T_0)$ sont égales à $1, \mu_1, \cdots, \mu_{n-1}$, où les μ_i sont les multiplicateurs de l'application de Poincaré P associée au cycle L_0.

Application de Poincaré : propriétés

Schéma de preuve :

- On considère le flot $\varphi^t : R^n \to \mathbb{R}^n$ au voisinage du cycle L_0.
- On montre que $\left.\frac{d\varphi^t x}{dx}\right|_{x=x_0} = M(t)$ donc en particulier $\left.\frac{d\varphi^{T_0} x}{dx}\right|_{x=x_0} = M(T_0)$.
- $M(T_0)$ a une valeur propre égale à 1 correspondant au vecteur propre $\dot{x}^0(0) = f(x_0)$.
- $P(x) = \varphi^t x \cap \Sigma$ donc $\left.\frac{dP}{d\xi}\right|_{\xi=0} = \left.\frac{d\varphi^{T_0} x}{dx}\right|_{x=x_0} = M(T_0)$.

Pour voir que $\dot{x}^0(t)$ est solution de $\dot{u} = Au$ on se souvient de ce que $A(t) = Df(x^0(t))$ ce qui entraine que $A(t)\dot{x}^0(t) = Df(x^0(t))\dot{x}^0(t) = \frac{d\, f(x^0(t))}{d\, t} = \ddot{x}^0(t)$. On a donc $M(T_0)\dot{x}^0(0) = \dot{x}^0(T_0) = \dot{x}^0(0)$.

Application à la classification des cycles limites

- Génériquement ξ_0 est hyperbolique donc
- il existe des variétés stables et instables locales

$$W^s(\xi_0) = \{\xi \in \Sigma : \lim_{k\to+\infty} P^k(\xi) = \xi_0\}$$
$$W^u(\xi_0) = \{\xi \in \Sigma : \lim_{k\to-\infty} P^k(\xi) = \xi_0\}$$

de dimensions $n_\pm$, $n_+ + n_- = n - 1$.

- $W^{s,u}$ sont les intersections avec Σ des variétés stables et instables du cycle L_0 :

$$W^s(L_0) = \{x : \lim_{t\to+\infty} \varphi^t x \in L_0\}$$
$$W^u(L_0) = \{x : \lim_{t\to-\infty} \varphi^t x \in L_0\}$$

Application à la classification des cycles limites

Définition

Un cycle limite L_0 est dit hyperbolique si ξ_0 est un point fixe hyperbolique de l'application de Poincaré P. C'est un cycle col s'il a des multiplicateurs dans et à l'extérieur du disque unité : $n_- n_+ \neq 0$.

Application à la classification des cycles limites

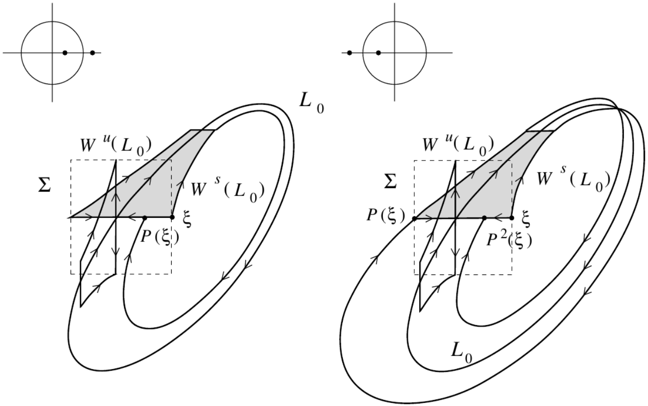


Figure tirée de Kuznetzov, 1995, 1998.

Définition

On considère des systèmes dynamiques qui dépendent de paramètres

$$\dot{x} = f(x, \alpha) \quad x \to f(x, \alpha) \quad x \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \in \mathbb{R}^m$$

Définition

Lorsque l'on fait varier le paramètre α, l'apparition d'un portrait de phase non topologiquement équivalent s'appelle une bifurcation.

Exemple 1 : la bifurcation d'Andronov-Hopf

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & \alpha x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 & = & x_1 + \alpha x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{array}\right.$$

En coordonnées polaires

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\rho} & = & \rho(\alpha - \rho^2) \\ \dot{\theta} & = & 1 \end{array}\right.$$

C'est une bifurcation locale.

Exemple 1 : la bifurcation d'Andronov-Hopf

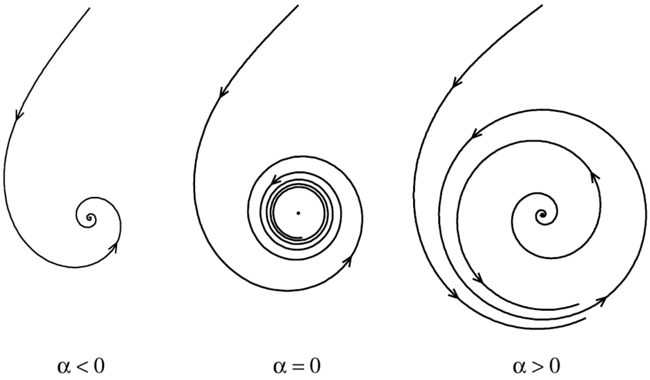


Figure tirée de Kuznetzov, 1995, 1998.

Exemple 2 : la bifurcation hétérocline

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = & 1 - x_1^2 - \alpha x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 & = & x_1 x_2 + \alpha(1 - x_1^2) \end{cases}$$

Deux équilibres col quel que soit α : $x_{(1)} = (-1, 0)$ et $x_{(2)} = (1, 0)$.
C'est une bifurcation globale.

Exemple 2 : la bifurcation hétérocline

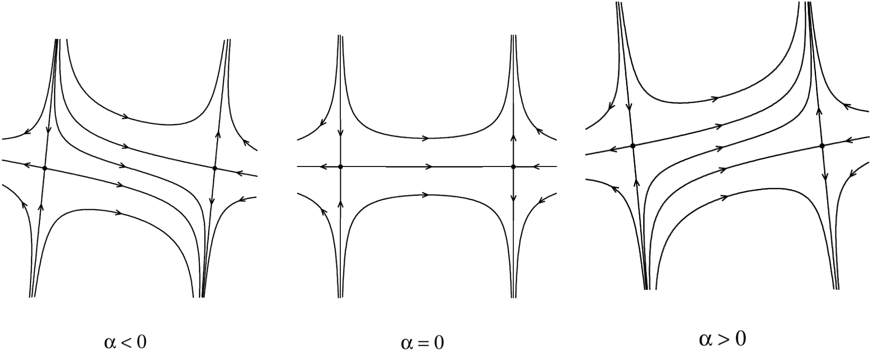


Figure tirée de Kuznetzov, 1995, 1998.

Exemple 3 : la bifurcation noeud-col sur un cercle invariant

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = & x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) - x_2(1 + \alpha + x_1) \\ \dot{x}_2 & = & x_1(1 + \alpha + x_1) + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) \end{cases}$$

En coordonnées polaires

$$\begin{cases} \dot{\rho} & = & \rho(1 - \rho^2) \\ \dot{\theta} & = & 1 + \alpha + \rho \cos \theta \end{cases}$$

C'est une bifurcation globale impliquant des événements locaux.

Exemple 3 : la bifurcation noeud-col sur un cercle invariant

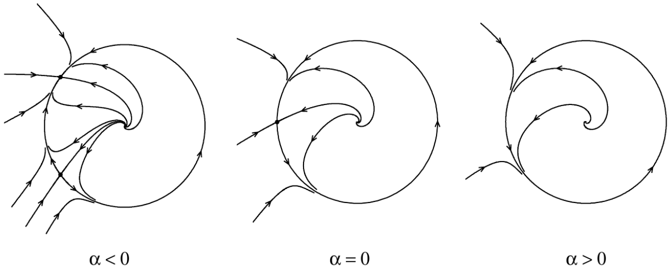


Figure tirée de Kuznetzov, 1995, 1998.

Diagrammes de bifurcation

Définition

Un diagramme de bifurcation d'un système dynamique est une stratification de l'espace des paramètres induite par l'équivalence topologique ainsi que des portraits de phase significatifs de chaque strate.

Diagrammes de bifurcation

Remarque : dans le cas $n = 1, 2$ et $m = 1$ le diagramme de bifurcation peut se visualiser dans $\mathbb{R}^{1,2} \times \mathbb{R}$.
Exemple :

$$\dot{x} = \alpha x - x^3, \quad x, \alpha \in \mathbb{R}$$

C'est la bifurcation de fourche.

Diagrammes de bifurcation

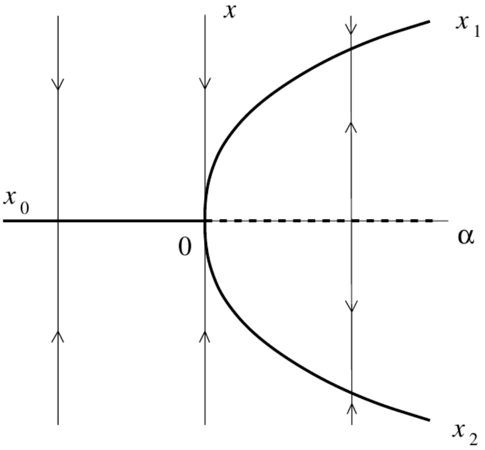


Figure tirée de Kuznetzov, 1995, 1998.

Diagrammes de bifurcation

Les régions de l'espace des paramètres où le portrait de phase du système reste topologiquement équivalent sont séparées par des *frontières de bifurcation* qui sont des variétés régulières de $\mathbb{R}^m$.

Diagrammes de bifurcation

Définition

La codimension *d'une bifurcation est la différence entre la dimension de l'espace des paramètres et la dimension de la frontière de bifurcation correspondante.*

Diagrammes de bifurcation

C'est aussi le nombre de conditions indépendantes qui déterminent la bifurcation.
Exemple : la bifurcation d'Andronov-Hopf est caractérisée par la nullité de la partie réelle d'un couple de valeurs propres complexes conjuguées du déterminant de la matrice jacobienne du système à l'équilibre, sa codimension est 1 : $\mathrm{Re}\lambda_{1,2} = 0$.

Equivalence topologique

Notion centrale en théorie des bifurcations

$$\dot{x} = f(x, \alpha) \quad \dot{y} = g(y, \beta),\ x,\ y \in \mathbb{R}^n,\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}^m$$

Définition

Les deux systèmes sont dits topologiquement équivalents si

1. *Il existe un homéomorphisme p de l'espace des paramètres,* $\beta = p(\alpha)$*.*
2. *Il existe un homéomorphisme* h_α *de l'espace de phase,* $y = h_\alpha(x)$ *transformant les orbites du premier système pour le paramètre* α *en celles du second pour le paramètre* $\beta = p(\alpha)$ *en préservant le sens du temps.*

Remarque : Il existe aussi une notion d'équivalence locale.

Forme normale topologique

On introduit le système dynamique polynomial en ξ :

$$\dot{\xi} = g(\xi, \beta; \sigma), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \beta \in \mathbb{R}^k, \sigma \in \mathbb{R}^l \tag{1}$$

On suppose que

- Pour $\beta = 0$ on a un équilibre en $\xi = 0$.
- Cet équilibre satisfait k conditions de bifurcation (codimension k).
- Les σ_i, $i = 1, \cdots, l$ sont les coefficients, entiers ou réels (modules), des polynomes de (1).

Forme normale topologique

On suppose que le système

$$\dot{x} = f(x, \alpha),\ x \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \in \mathbb{R}^k$$

a pour $\alpha = 0$ un point d'équilibre $x = 0$.

Définition

Le système (1) est une forme normale topologique de ce système si tout système générique de cette forme ayant $x = 0$ comme équilibre et satisfaisant les mêmes conditions de bifurcation pour $\alpha = 0$ est localement topologiquement équivalent au voisinage de l'origine au système (1) pour certaines valeurs des coefficients σ_i.

Forme normale topologique

Générique signifie que le système satisfait un certain nombre de conditions

$$N_i[f] \neq 0, \quad i = 1, \cdots, s$$

où N_i est une fonction algébrique

- des dérivées partielles de $f(x, \alpha)$ par rapport à x évaluées en $x = 0$, $\alpha = 0$, ce sont les conditions de *non dégénérescence*,
- des dérivées partielles de $f(x, \alpha)$ par rapport à α évaluées en $x = 0$, $\alpha = 0$, ce sont les conditions de *transversalité*.

Exemple : la bifurcation d'Andronov-Hopf

Nous montrerons que le système

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dot{\xi}_1 & = & \beta\xi_1 - \xi_2 + \sigma\xi_1(\xi_1^2+\xi_2^2)\\ \dot{\xi}_2 & = & \xi_1 + \beta\xi_2 + \sigma\xi_2(\xi_1^2+\xi_2^2)\end{array}\right.$$

est une forme normale topologique pour cette bifurcation. La condition

$$\frac{d}{d\alpha}\mathrm{Re}\lambda_{1,2}(\alpha)\Big|_{\alpha=0} \neq 0$$

est la condition de transversalité, la condition

$$l_1(0) \neq 0$$

est la condition de non-dégénérescence. l_1 est le premier exposant de Lyapunov.

Stabilité structurelle des équilibres hyperboliques

Soit x_0 un équilibre hyperbolique du système

$$\dot{x} = f(x),\ x \in \mathbb{R}^n,\ f \text{ régulière}$$

Perturbons le avec $\varepsilon \in \mathbb{R}$:

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x),\ x \in \mathbb{R}^n,\ g \text{ régulière}$$

Les nouveaux équilibres sont solution de

$$F(x, \varepsilon) = f(x) + \varepsilon g(x) = 0,\ F(x_0, 0) = 0,\ F_x(x_0, 0) = A_0$$

Stabilité structurelle des équilibres hyperboliques

Puisque x_0 est hyperbolique pour f, $det(A_0) \neq 0$, le théorème des fonctions implicites nous donne l'existence d'une fonction régulière $x = x(\varepsilon)$, $x(0) = x_0$ telle que $F(x(\varepsilon), \varepsilon) = 0$ pour ε suffisamment petit.
La matrice jacobienne A_ε du système perturbé

$$A_\varepsilon = \left(\frac{df(x)}{dx} + \varepsilon \frac{dg(x)}{dx} \right) \Big|_{x=x(\varepsilon)}$$

dépend de manière régulière de ε et coincide avec A_0 pour $\varepsilon = 0$.

Stabilité structurelle des équilibres hyperboliques

- A_ε n'a pas de valeurs propres imaginaires pures pour ε suffisamment petit.
- $n_-(\varepsilon)$ et $n_+(\varepsilon)$ sont constants pour ces valeurs de ε.
- Le théorème sur l'équivalence topologique locale des équilibres hyperboliques nous permet de conclure.

Stabilité structurelle

Définition (Stabilité structurelle stricte)

Le système $\dot{x} = f(x),\ x \in \mathbb{R}^n$ est strictement structurellement stable dans l'ouvert U si et seulement si tout système suffisamment proche pour la norme C^1 lui est topologiquement équivalent dans U.

Remarque : on peut avoir des problèmes avec des équilibres hyperboliques sur ∂U ou des cycles hyperboliques tangents à ∂U.

Stabilité structurelle

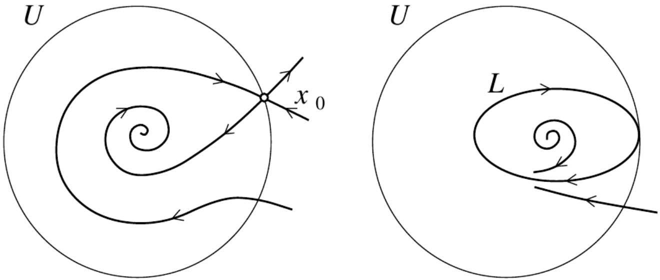


Figure tirée de Kuznetzov, 1995, 1998.

Stabilité structurelle

Définition (Stabilité structurelle à la Andronov)

Le système $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ défini dans un ouvert $D \subset \mathbb{R}^n$ est structurellement stable dans un ouvert $D_0 \subset D$ si pour tout système suffisamment proche dans D pour la norme C^1 il existe des ouverts $U, V \subset D$ et $D_0 \subset U$ tels que ce système soit topologiquement équivalent dans U au système de départ dans V.

Stabilité structurelle

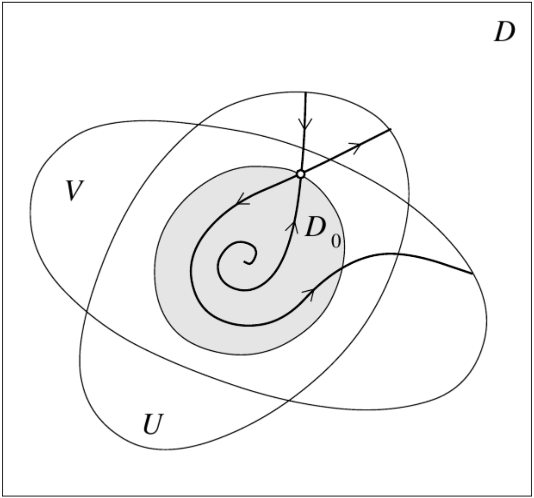


Figure tirée de Kuznetzov, 1995, 1998.

Stabilité structurelle

On a le

Théorème (Andronov et Pontryagin, 1937)

Un système $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$, f régulière, est structurellement stable dans un ouvert $D_0 \subset \mathbb{R}^2$ si et seulement si

- *Il a un nombre fini d'équilibres et de cycles limites dans D_0, tous hyperboliques.*
- *Il n'y a pas de trajectoires homoclines ou hétéroclines de cols.*

Stabilité structurelle

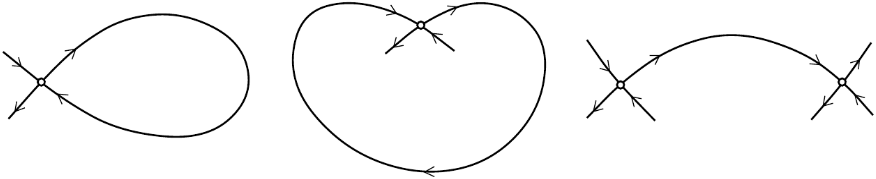


Figure tirée de Kuznetzov, 1995, 1998.