Intégrales stochastiques, formule d'Itô

Olivier FAUGERAS

19 Novembre 2008

Plan

Plan

Plan

Plan

Plan

Plan

Motivation

- On revient sur l'EDS

$$\begin{cases} d\mathbf{X} &= \mathbf{b}(\mathbf{X}, t)\, dt + \mathbf{B}(\mathbf{X}, t) d\mathbf{W} \quad t > 0 \\ \mathbf{X}(0) &= X_0 \end{cases}$$

- que nous réécrirons plus tard sous la forme

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0 + \int_0^t \mathbf{b}(\mathbf{X}, s)\, ds + \int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X}, s) d\mathbf{W} \quad t \geq 0$$

- Il s'agit donc de donner un sens à des intégrales de la forme

$$\int_0^T \mathbf{G}\, d\mathbf{W},$$

pour une large classe de processus **G**

- Une difficulté est que p.s. $t \to W(t, \omega)$ est à variation infinie.

Intégrale de Paley-Wiener-Zygmund

- On se place en dimension 1.
- Si $g \in C^1([0,1],\mathbb{R})$, on définit

$$\int_0^1 g\,dW = -\int_0^1 g'\,W\,dt,$$

une v.a.

Lemme (Propriétés de l'intégrale PWZ)

1. $\mathbb{E}\left[\int_0^1 g\,dW\right] = 0$
2. $\mathbb{E}\left[\left(\int_0^1 g\,dW\right)^2\right] = \int_0^1 g^2\,dt$

On peut étendre la définition à $L^2(0,\,1)$ mais pas à des processus.

Sommes de Riemann

On essaye de définir $\int_0^T W\, dW$.

Définition

On a

1. *Une partition P de $[0,\ T]$:*
   $P = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T\}$.
2. *Le pas $|P|$ de P est $|P| = \max_{0 \le k \le m-1} |t_{k+1} - t_k|$.*
3. *Soit $0 \le \lambda \le 1$ et P une partition de $[0,\ T]$, on définit*

$$\tau_k = (1-\lambda)t_k + \lambda t_{k+1}\ k = 0,\ 1, \cdots, m-1,$$

$$R(P, \lambda) = \sum_{k=0}^{m-1} W(\tau_k)\left(W(t_{k+1}) - W(t_k)\right)$$

Sommes de Riemann

Lemme (Variation quadratique)

Soit $[a, b]$ *un intervalle fermé de* $[0, \infty]$ *et* $P^n = [a = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{m_n}^n = b]$ *des partitions de* $[a, b]$ *telles que* $|P^n| \to 0$ *quand* $n \to \infty$. *On a*

$$\sum_{k=0}^{m_n - 1} (W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n))^2 \to b - a$$

dans $L^2(\Omega)$ *quand* $n \to \infty$.

Ceci justifie en partie l'idée heuristique que $dW \sim (dt)^{1/2}$.

Sommes de Riemann

Eléments de preuve

- On pose $Q_n = \sum_{k=0}^{m_n-1}(W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n))^2$ et on remarque que

$$Q_n - (b-a) = \sum_{k=0}^{m_n-1}(W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n))^2 - (t_{k+1}^n - t_k^n)$$

Sommes de Riemann

- On utilise la propriété d'acroissements indépendants du brownien pour obtenir

$$\mathbb{E}\left[(Q_n-(b-a))^2\right] = \sum_{k=0}^{m_n-1} \mathbb{E}\left[(Y_k^2-1)^2(t_{k+1}^n-t_k^n)^2\right],$$

avec $Y_k = \frac{W(t_{k+1}^n)-W(t_k^n)}{\sqrt{t_{k+1}^n-t_k^n}}$ de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

- Et donc $\mathbb{E}\left[(Q_n-(b-a))^2\right] \leq C(t_{k+1}^n-t_k^n)^2 \leq C|P^n|(b-a)$.

Sommes de Riemann

Lemme

Soit P^n une partition de $[0, T]$, $0 \leq \lambda \leq 1$ fixé, et

$$R_n = \sum_{k=0}^{m_n-1} W(\tau_k^n)(W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n)).$$

Alors $\lim_{n\to\infty} R_n = \frac{W(T)^2}{2} + \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) T$ *dans* $L^2(\Omega)$.
La limite dépend du choix des τ_n^k *tels que* $t_n^k \leq \tau_n^k \leq t_{n+1}^k$,
$\tau_n^k = (1-\lambda)t_k^n + \lambda t_{k+1}^n$.

Sommes de Riemann

Eléments de preuve :

- On écrit

$$R_n = \frac{W^2(T)}{2} - \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m_n-1}(W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n))^2}_{A}$$

$$+ \underbrace{\sum_{k=0}^{m_n-1}(W(\tau_k^n) - W(t_k^n))^2}_{B}$$

$$+ \underbrace{\sum_{k=0}^{m_n-1}(W(t_{k+1}^n) - W(\tau_k^n))(W(\tau_k^n) - W(t_k^n))}_{C}$$

Sommes de Riemann

- On remarque que $A \to T/2$ et que $B \to \lambda T$ dans $L^2(\Omega)$.
- Puis, en utilisant la propriété d'acroissements indépendants du brownien

$$\mathbb{E}\left[\left[\sum_{k=0}^{m_n-1}(W(t_{k+1}^n)-W(\tau_k^n))(W(\tau_k^n)-W(t_k^n))\right]^2\right]$$
$$=\sum_{k=0}^{m_n-1}\lambda(t_{k+1}^n-t_k^n)(1-\lambda)(t_{k+1}^n-t_k^n)$$
$$\leq \lambda(1-\lambda)T|\,P^n\,|$$

Sommes de Riemann

- La définition de l'intégrale d'Itô (voir plus bas), correspond au choix $\lambda = 0$ soit

$$\int_s^r W dW = \frac{W^2(r) - W^2(s)}{2} - \frac{r-s}{2},$$

- alors que l'intégrale de Stratonovich (voir TD) correspond au choix $\lambda = 1/2$ soit

$$\int_s^r W \circ dW = \frac{W^2(r) - W^2(s)}{2}$$

Quelques définitions

Définition

1. *La σ-algèbre $\mathcal{W}(t) = \mathcal{A}(W(s) \mid 0 \leq s \leq t)$ est l'histoire du mouvement brownien jusqu'au temps t (inclus).*
2. *La σ-algèbre $\mathcal{W}^+(t) = \mathcal{A}(W(s) - W(t) \mid s \geq t \geq 0)$ est le futur du mouvement brownien au delà du temps t.*

Définition (Filtration)

Une famille $\mathcal{F}(\cdot)$ de σ-algèbres $\subseteq \mathcal{A}$ est dite non-anticipative (par rapport à $W(\cdot)$) si

1. *$\mathcal{F}(t) \supseteq \mathcal{F}(s)$ pour tout $t \geq s \geq 0$,*
2. *$\mathcal{F}(t) \supseteq \mathcal{W}(t)$ pour tout $t \geq 0$,*
3. *$\mathcal{F}(t)$ est indépendante de $\mathcal{W}^+(t)$ pour tout $t \geq 0$.*

Quelques définitions

Définition (Processus adaptés)

Un processus $G(\cdot)$ à valeurs réelles est dit non-anticipant ou adapté à la filtration $\mathcal{F}(\cdot)$ si pour tout temps $t \geq 0$, $G(t)$ est $\mathcal{F}(t)$-mesurable.

On a en pratique besoin d'une notion un peu plus forte

Définition (Processus progressivement mesurable)

Un processus $G(\cdot)$ à valeurs réelles est dit progressivement mesurable par rapport à la filtration $\mathcal{F}(\cdot)$ si pour tout temps $t \geq 0$ et tout $\omega \in \Omega$ l'application $(t, \omega) \to G(t, \omega)$ est $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}(t)$ mesurable ($\mathcal{B}([0, t])$ est l'ensemble des boréliens de $[0, t]$).

Quelques définitions

Définition

On note $\mathbb{L}^2(0, T)$ *l'ensemble des processus réels progressivement mesurables* $G(\cdot)$ *tels que*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T G^2 dt\right] < \infty$$

De même $\mathbb{L}^1(0, T)$ *est l'ensemble des processus réels progressivement mesurables* $G(\cdot)$ *tels que*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |G| dt\right] < \infty$$

Quelques définitions

Définition

Un processus $G(\cdot)$ de $\mathbb{L}^2(0,T)$ est dit constant par morceaux s'il existe une partition P de $[0,T]$ telle que

$$G(t) \equiv G_k,\ t_k \leq t < t_{k+1},\ k = 0, \cdots, m-1$$

Noter que chaque G_k est $\mathcal{F}(t_k)$-mesurable puisque G est adapté.

Quelques définitions

Définition (Intégrale d'Itô)

Soit $G(\cdot)$ un processus constant par morceaux de $\mathbb{L}^2(0, T)$

$$\int_0^T G\, dW = \sum_{k=0}^{m-1} G_k(W(t_{k+1}) - W(t_k))$$

est l'intégrale d'Itô de G sur $[0, T]$.

Quelques définitions

Lemme (Propriétés de l'intégrale d'Itô pour des processus constants par morceaux)

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ *et tous* $G, H \in \mathbb{L}^2(0, T)$ *constants par morceaux on a*

1. $\int_0^T aG + bH\, dW = a \int_0^T G\, dW + b \int_0^T H\, dW$
2. $\mathbb{E}\left[\int_0^T G\, dW\right] = 0$
3. $\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T G\, dW\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T G^2\, dt\right]$

Quelques définitions

- Le point i) est facile à vérifier.
- Pour ii) on écrit

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T G dW\right] = \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{E}\left[G_k (W(t_{k+1}) - W(t_k))\right],$$

et on utilise le fait que G_k est $\mathcal{F}(t_k)$-mesurable donc indépendant de $\mathcal{W}^+(t_k)$ alors que $W(t_{k+1}) - W(t_k)$ est $\mathcal{W}^+(t_k)$-mesurable.

Quelques définitions

- Pour iii) on a

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T GdW\right)^2\right] =$$
$$\sum_{k,j=1}^{m-1} \mathbb{E}\left[G_j G_k (W(t_{j+1}) - W(t_j))(W(t_{k+1}) - W(t_k))\right]$$

- Si $j < k$ on utilise l'indépendance de $W(t_{k+1}) - W(t_k)$ et de $G_j G_k (W(t_{j+1}) - W(t_j))$ ce qui permet de conclure.

Quelques définitions

Lemme (Approximation par des processus constants par morceaux)

Soit $G \in \mathbb{L}^2(0, T)$, il existe une suite G^n de processus constants par morceaux bornés de $\mathbb{L}^2(0, T)$ tels que

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}\left[\int_0^T |G - G^n|^2 \, dt\right] = 0$$

Définition

On définit alors

$$\int_0^T G \, dW = \lim_{n \to \infty} \int_0^T G^n \, dW \quad dans \quad \mathbb{L}^2(0, T)$$

Quelques définitions

Théorème (Propriétés de l'intégrale d'Itô)

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et tous $G, H \in \mathbb{L}^2(0, T)$ on a

1. $\int_0^T aG + bH \, dW = a \int_0^T G \, dW + b \int_0^T H \, dW$
2. $\mathbb{E}\left[\int_0^T G \, dW\right] = 0$
3. $\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T G \, dW\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T G^2 \, dt\right]$
4. $\mathbb{E}\left[\int_0^T G \, dW \; \int_0^T H \, dW\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T GH \, dt\right]$

Quelques définitions

i), ii) et iii) découlent facilement des propriétés correspondantes des processus constants par morceaux.
iv) découle de la relation $2ab = (a+b)^2 - a^2 - b^2$.

Motivation

- Soient $Y_1, Y_2, \cdots$ des v.a. réelles indépendantes de moyenne nulle et $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$ leur somme.
- Quel est notre meilleure estimation de S_{n+k} étant données les valeurs de $S_1, \ldots, S_n$?
- La réponse est S_n car $\mathbb{E}\left[S_{n+k} \mid S_1, \cdots, S_n\right] = S_n$.

Définition

Définition (Martingale discrète)

Soit $\{X_n\}_{k=1}^{\infty}$ *une suite de v.a. réelles telles que* $\mathbb{E}\left[\mid X_i \mid\right] < \infty$, $i \geq 1$, *si*

$$X_k = \mathbb{E}\left[X_j \,|\, X_1, \cdots, X_k\right] \ p.s. \forall j \geq k,$$

on dit que $\{X_n\}_{k=1}^{\infty}$ *est une martingale (discrète).*

Définition

Définition (Martingale continue)

Soit $X(\cdot)$ un processus à valeurs réelles tel que $\mathbb{E}\left[|X(t)|\right] < \infty$ pour tout $t \geq 0$

1. *Si*
$$X(s) = \mathbb{E}\left[X(t) \,|\, \mathcal{F}^X(s)\right] \text{ p.s.} \forall t \geq s \geq 0,$$
on dit que $X(\cdot)$ est une martingale.
2. *Si*
$$X(s) \leq \mathbb{E}\left[X(t) \,|\, \mathcal{F}^X(s)\right] \text{ p.s.} \forall t \geq s \geq 0,$$
on dit que $X(\cdot)$ est une sous martingale.

Définition

Théorème

1. *Si* $\{X_n\}_{k=1}^{\infty}$ *est une sous-martingale alors*

$$P\left(\max_{1\leq k\leq n} X_k \geq \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}\left[X_n^+\right]$$

pour tout $n = 1, \cdots$ *et* $\lambda > 0$.

2. *Si* $\{X_n\}_{k=1}^{\infty}$ *est une martingale alors*

$$\mathbb{E}\left[\max_{1\leq k\leq n} \mid X_k \mid^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\left[\mid X_n \mid^p\right]$$

Définition et théorème

Définition (Intégrale d'Itô indéfinie)

Soit $G \in \mathbb{L}^2(0, T)$ *et*

$$I(t) = \int_0^t G\, dW \quad 0 \leq t \leq T$$

l'intégrale indéfinie de G *par rapport au mouvement brownien* W*. On a* $I(0) = 0$*.*

Théorème

1. *Si* $G \in \mathbb{L}^2(0, T)$, $I(\cdot)$ *est une martingale.*
2. *Il existe une modification de* $I(\cdot)$ *avec des trajectoires continues p.s.*

Eléments de preuve

- Il existe une suite G^n de processus constants par morceaux de $\mathbb{L}^2(0, T)$ convergeant vers G. On définit $I^n(t) = \int_0^t G^n dW$, $0 \leq t \leq T$.
- On considère la partition correspondant à G^n et écrit :

$$I^n(t) = \sum_{i=0}^{k-1} G_i^n(W(t_{i+1}^n) - W(t_i^n)) + G_n^k(W(t) - W(t_k^n)), \quad t_k^t \leq t \leq t_{k+1}^n$$

  $I^n(\cdot)$ a donc p.s. des trajectoires continues.
- $I^n(\cdot)$ est une martingale (point i)) donc $\mid I^n - I^m \mid^2$ est une sous-martingale.

Eléments de preuve

- Donc

$$P\left(\sup_{0\leq t\leq T} \mid I^n(t) - I_m(t) \mid > \varepsilon\right) = P\left(\sup_{0\leq t\leq T} \mid I^n(t) - I_m(t) \mid^2 > \varepsilon^2\right)$$
$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\mathbb{E}\left[\mid I^n(T) - I_m(T) \mid^2\right]$$
$$= \frac{1}{\varepsilon^2}\mathbb{E}\left[\int_0^T \mid G^n - G^m \mid^2 dt\right]$$

Eléments de preuve

- On choisit $\varepsilon = 1/2^k$ et on en conclut l'existence de n_k tel que $P\left(\sup_{0 \leq t \leq T} | I^n(t) - I_m(t) | > 1/2^k\right) \leq 1/k^2$ pour $m,\ n \geq n_k$. On peut supposer la suite n_k croissante.
- On applique le lemme de Borel-Cantelli à la suite d'événements $A_k = \{ \sup_{0 \leq t \leq T} | I^{n_{k+1}}(t) - I^{n_k}(t) | > 1/2^k \}$

Définition

Définition

Soit $X(\cdot)$ processus à valeurs réelles tel que

$$X(r) = X(s) + \int_s^r F dt + \int_s^r G dW$$

pour $F \in \mathbb{L}^1(0, T)$ et $G \in \mathbb{L}^2(0, T)$ et $0 \le s \le r \le T$. On dit que $X(\cdot)$ admet la différentielle stochastique

$$dX = F\, dt + G\, dW$$

pour $0 \le t \le T$.

Intégrale d'Itô

Théorème

Soit $X(\cdot)$ un processus ayant pour différentielle stochastique

$$dX = F\,dt + G\,dW$$

pour $F \in \mathbb{L}^1(0,T)$ et $G \in \mathbb{L}^2(0,T)$. Soit $u : \mathbb{R} \times [0,T] \to \mathbb{R}$ continue et telle que les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ existent et soient continues. Si $Y(t) = u(X(t), t)$, alors $Y(\cdot)$ a pour différentielle stochastique

$$\begin{aligned} dY &= \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x}\,dX + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,G^2\,dt \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} F + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,G^2\right) dt + \frac{\partial u}{\partial x} G dW \end{aligned}$$

Exemples d'application de la formule d'Itô

Soit $X(\cdot) = W(\cdot)$ et $u(x) = x^m$ $m \geq 2$, alors

$$d(W^m) = mW^{m-1}dW + \frac{1}{2}m(m-1)W^{m-2}dt$$

Exemples d'application de la formule d'Itô

Soit $X(\cdot) = W(\cdot)$ et $u(x,t) = e^{\lambda x - \frac{\lambda^2}{2}t}$. Alors

$$d\left(e^{\lambda W(t) - \frac{\lambda^2}{2}t}\right) = \lambda Y dW$$

Eléments de preuve de la formule d'Itô

Lemme

On a

1. $d(W^2) = 2WdW + dt.$
2. $d(tW) = Wdt + tdW$

Elements de preuve :
On a déjà démontré i) (lemme).

Eléments de preuve de la formule d'Itô

Pour ii)

- On écrit (par définition) et dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$

$$\int_0^r t dW = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{m_n-1} t_k^n (W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n))$$

- De même, puisque $t \to W(t)$ est continue p.s.

$$\int_0^r W dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{m_n-1} W(t_{k+1}^n)(t_{k+1}^n - t_k^n)$$

  Noter qu'on peut choisir t_{k+1}^n puisqu'il s'agit d'une approximation de Riemann ordinaire.

- On ajoute ces deux relations.

Eléments de preuve de la formule d'Itô

Théorème

Si

$$\left\{\begin{array}{lcl} dX_1 & = & F_1 dt + G_1 dW \\ & & \qquad\qquad 0 \leq t \leq T \\ dX_2 & = & F_2 dt + G_2 dW \end{array}\right.$$

pour $F_i \in \mathbb{L}^1(0, T)$, $G_i \in \mathbb{L}^2(0, T)$, $i = 1, 2$, *alors*

$$d(X_1 X_2) = X_2 dX_1 + X_1 dX_2 + G_1 G_2 dt$$

On écrit aussi

$$\int_s^r X_2 dX_1 = X_1(r)X_2(r) - X_1(s)X_2(s) - \int_s^r X_1 dX_2 - \int_s^r G_1 G_2 dt$$

Eléments de preuve de la formule d'Itô

Eléments de preuve

- On fait d'abord les hypothèses que F_i et G_i ne dépendent pas du temps et sont $\mathcal{F}(0)$-mesurables et que $X_1(0) = X_2(0) = 0$. Ce qui permet, en utilisant le lemme précédent, de conclure

$$
\begin{aligned}
&\int_0^r X_2 dX_1 + X_1 dX_2 + G_1 G_2 dt \\
=&F_1 F_2 r^2 + (G_1 F_2 + G_2 F_1) r W(r) + G_1 G_2 W^2(r) \\
=&X_1(r) X_2(r)
\end{aligned}
$$

C'est le cas $s = 0$, $X_i(0) = 0$ et F_i constants.

Eléments de preuve de la formule d'Itô

- Le cas $s > 0$, $X_i(s)$ arbitraires et F_i constants se traite de la même manière.
- Si F_i et G_i sont constants par morceaux, on applique le résultat précédent sur chaque sous-intervalle.
- Dans le cas général on approxime F_i et G_i par des processus constants par morceaux et on passe à la limite.

Fin du schéma de preuve

- On commence avec $u(x) = x^m$, $m = 0, 1, \cdots$ et on montre que

$$d(X^m) = mX^{m-1}dX + \frac{1}{2}m(m-1)X^{m-2}G^2dt$$

- C'est vrai pour $m = 0, 1$ et $m = 2$ d'après le théorème précédent. On démontre le cas général par récurrence.
- On en conclut que la formule d'Itô est valable pour toutes les fonctions polynomiales.

Fin du schéma de preuve

- On suppose ensuite que $u(x,t) = f(x)g(t)$, f et g des polynomes et on vérifie à l'aide du théorème précédent que la formule d'Itô est vraie dans ce cas.
- Elle est donc vraie pour des combinaisons linéaires de fonctions du type précédent
- On utilise alors la densité des polynomes (Théorème de Stone-Weierstrass).

Généralisation

Proposition

Si on a $dX^i = F^i dt + G^i dW$ *avec* $F^i \in \mathbb{L}^1(0,T)$ *et* $G^i \in \mathbb{L}^2(0,T)$ *pour* $i = 1, \cdots, n$ *et si* $u : \mathbb{R}^n \times [0,T] \to \mathbb{R}$ *est continue ainsi que les dérivées partielles* $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ *et* $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$, $i,j = 1, \cdots, n$, *alors on a*

$$d(u(X^1, \cdots, X^n, t)) = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} dX^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} G^i G^j dt$$

Généralisation

Comment s'en souvenir :

$$d(u(\mathbf{X},t)) = \frac{\partial u}{\partial t}dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} dX^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} dX_i dX_j,$$

on développe et on simplifie alors les termes $dX_i dX_j$ en utilisant les règles $(dt)^2 = 0$, $dtdW = 0$ et $dWdW = dt$

Dimension quelconque

Quelques notations

1. Soit $\mathbf{W}(\cdot) = (W^1(\cdot), \cdots, W^m(\cdot))$ un mouvement brownien de dimension m.
2. Soit $\mathcal{F}(\cdot)$ une famille non-anticipative de σ-algèbres:
   - $\mathcal{F}(t) \supseteq \mathcal{F}(s)$ pour $t \geq s$.
   - $\mathcal{F}(t) \supseteq \mathcal{W}(t) = \mathcal{A}(\mathbf{W}(s) \,|\, 0 \leq s \leq t)$
   - $\mathcal{F}(t)$ est indépendante de $\mathcal{W}^+(t) = \mathcal{A}(\mathbf{W}(s) - \mathbf{W}(t) \,|\, t \leq s < \infty)$

Dimension quelconque

Définition

Un processus stochastique $\mathbf{G} = (G^{ij}))$ *à valeurs dans* $\mathcal{M}^{n \times m}$ *appartient à* $\mathbb{L}^2_{n \times m}(0, T)$ *si* $G^{ij} \in \mathbb{L}^2(0, T)$ *pour* $i = 1, \cdots, n$ *et* $j = 1, \cdots, m$,

Un processus stochastique $\mathbf{F} = (F^1, \cdots, F^n)$ *appartient à* $\mathbb{L}^1_n(0, T)$ *si* $F^i \in \mathbb{L}^1(0, T)$ *pour* $i = 1, \cdots, n$

Dimension quelconque

Définition

Si $\mathbf{G} \in \mathbb{L}^2_{n\times m}(0, T)$, *alors*

$$\int_0^T \mathbf{G}\, d\mathbf{W}$$

est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ *dont les composantes sont données par*

$$\sum_{j=1}^m \int_0^T G^{ij}\, dW^j$$

Dimension quelconque

En utilisant les approximations par des processus constants par morceaux on démontre que si $\mathbf{G} \in \mathbb{L}^2_{n\times m}(0, T)$, alors

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \mathbf{G}\, d\mathbf{W}\right] = 0,$$

et

$$\mathbb{E}\left[\left|\int_0^T \mathbf{G}\, d\mathbf{W}\right|^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T |\mathbf{G}|^2 dt\right],$$

avec $|\mathbf{G}|^2 = \sum_{i,j}(G^{ij})^2$.

Dimension quelconque

Définition

Soit $\mathbf{X}(\cdot) = (X^1(\cdot), \cdots, X^n(\cdot))$ *un processus stochastique à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$ *tel quel*

$$\mathbf{X}(r) = \mathbf{X}(s) + \int_s^r \mathbf{F}(t)dt + \int_s^r \mathbf{G}\, d\mathbf{W}$$

pour un $\mathbf{F} \in \mathbb{L}^1_n(0, T)$ *et un* $\mathbf{G} \in \mathbb{L}^2_{n\times m}(0, T)$*. On dit que* $\mathbf{X}$ *satisfait l'équation différentielle stochastiques*

$$d\mathbf{X} = \mathbf{F}dt + \mathbf{G}d\mathbf{W}$$

Dimension quelconque

Théorème (Formule d'Itô en dimension n)

Soit $\mathbf{X}(\cdot)$ *un processus ayant pour différentielle stochastique*

$$d\mathbf{X} = \mathbf{F}\,dt + \mathbf{G}\,dmW$$

pour $\mathbf{F} \in \mathbb{L}^1_n(0, T)$ *et* $\mathbf{G} \in \mathbb{L}^2_{n \times n}(0, T)$. *Soit* $u : \mathbb{R}^n \times [0, T] \to \mathbb{R}$ *continue et telle que les dérivées partielles* $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ *et* $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j}$ $(i, j = 1, \cdots, n)$ *existent et soient continues. Si* $\mathbf{Y}(t) = u(\mathbf{X}(t), t)$, *alors* $\mathbf{Y}(\cdot)$ *a pour différentielle stochastique*

$$d\mathbf{Y} = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dX^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j} \sum_{l=1}^{m} G^{il} G^{jl}\, dt$$

Eléments de preuve

Lemme

Soient $W(\cdot)$ et $\bar{W}(\cdot)$ deux processus browniens indépendants de dimension 1. Alors

$$d(W\bar{W}) = W\,d\bar{W} + \bar{W}\,dW$$

Eléments de preuve

Eléments de preuve

1. On définit $X(t) = \frac{W(t)+\bar{W}(t)}{\sqrt{2}}$ et on montre que c'est un processus brownien.
2. On utilise alors le fait que $W\bar{W} = X^2 - \frac{1}{2}W^2 - \frac{1}{2}\bar{W}^2$ et la formule de la différentielle du carré du brownien.

Eléments de preuve

On démontre aussi le lemme.

Lemme

Si

$$\begin{cases} dX_1 &= F_1 dt + \sum_{k=1}^m G_1^k dW^k \\ dX_2 &= F_2 dt + \sum_{l=1}^m G_2^l dW^l \end{cases}$$

pour $F_i \in \mathbb{L}^1(0,T)$, $G_i^k \in \mathbb{L}^2(0,T)$, $i = 1, 2$ *et* $k = 1, \cdots, n$ *alors*

$$d(X_1 X_2) = X_2 dX_1 + X_1 dX_2 + \sum_{k=1}^m G_1^k G_2^k dt$$

La preuve est une modification de celle en dimension 1 et utilise le fait nouveau que

$$d(W^i W^j) = W^i dW^j + W^j dW^i + \delta_{ij} dt$$