# Examen du module “Méthodes mathématiques pour les neurosciences”

Olivier Faugeras

16 décembre 2009

**Exercice 1 : Pont Brownien (5 points)** On se place dans un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et on se donne $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien. On definit le processus appelé *pont Brownien* (*Brownian bridge*) par : $b_t := B_t - tB_1$ pour $t \in [0,1]$.

1. Montrer que $b$ est un processus Gaussien centré de covariance $\mathbb{E}(b_t b_s) = s \wedge t - st$ pour tout $(s,t) \in [0,1]^2$.
   Preuve: $tB_1$ a même loi que $B_{t^2}$, donc $B_t - tB_1$ a même loi que $B_t - B_{t^2}$, c'est-à-dire, par définition du brownien, que c'est une gaussienne centrée (de variance $t - t^2$). Pour calculer la covariance, il suffit de développer et d'utiliser $\mathbb{E}(B_t B_s) = s \wedge t$.

2. Montrer que les processus $(b_t)_{t\in[0,1]}$ et $B_1$ sont indépendants.
   Preuve: $\mathbb{E}(b_t B_1) = \mathbb{E}(B_t B_1 - tB_1 B_1) = t \wedge 1 - t = 0 = \mathbb{E}(b_t)\mathbb{E}(B_1)$ La factorisation de l'espérance suffit à prouver l'indépendance car les variables sont gaussiennes.

3. Montrer que $(b_t)_{t\in[0,1]}$ est un pont brownien $\rightarrow (b_{1-t})_{t\in[0,1]}$ est un pont Brownien.
   Preuve: Comme un processus gaussien est caracterisé par sa moyenne et sa covariance, il suffit de calculer $\mathbb{E}(b_{1-t}b_{1-s}) = \mathbb{E}(B_{1-t}B_{1-s}) - (1-t)\mathbb{E}(B_1 B_{1-s}) - (1-s)\mathbb{E}(B_1 B_{1-t}) + (1-t)(1-s) = (1-t) \wedge (1-s) - (1-t)(1-s)$.

4. Montrer que $X_t = (1+t)b_{t/(t+1)}$ pour $t \in [0,1]$ est un mouvement Brownien.
   Preuve: On remarque tout d'abord que la fonction qui à $t$ associe $t/(t+1)$ est croissante sur $[0,1]$ et vaut $\frac{1}{2}$ en 1. $b_{t/(t+1)}$ est donc bien défini et on voit que $X_t$ est un processus gaussien, centré, continu. Il reste à calculer la covariance: $\mathbb{E}(X_t X_s) = (1+t)(1+s)\mathbb{E}(B_{t/(t+1)}B_{s/(s+1)}) - s(1+t)\mathbb{E}(B_1 B_{t/(t+1)}) - t(1+s)\mathbb{E}(B_1 B_{s/(s+1)}) + ts\mathbb{E}(B_1^2) = t \wedge s$.

5. Montrer que $b_t = (1-t)B_{t/(1-t)}$ est un pont Brownien.
   Preuve: On remarque tout d'abord que la fonction qui à $t$ associe $t/(1-t)$ est croissante sur $[0,1)$. $b_t$ est un processus gaussien centré, pour prouver que c'est un pont brownien il reste à calculer sa covariance. Si $t < s$, $\mathbb{E}(b_t b_s) = (1-t)(1-s)\mathbb{E}(B_{t/(1-t)}B_{s/(1-s)}) = (1-t)(1-s)\frac{t}{1-t} = (1-s)t = t \wedge s - st$. De même si $t > s$, $\mathbb{E}(b_t b_s) = (1-t)s = t \wedge s - st$.

6. On considère l'équation différentielle stochastique $dx(t) = \frac{b-x(t)}{1-t}dt + dB(t)$ pour $t \in [0,1)$ avec $x(0) = a$. En utilisant la formule de la variation de la constante (voir cours), montrer que $x(t) = (1-t)a + bt + (1-t)\int_0^t \frac{dB(s)}{1-s}$. Montrer que $x(t)$ est un pont brownien pour $a = b = 0$..

   Preuve: Rappel: Soit l'equation différentielle stochastique linéaire scalaire $dx(t) = (a(t)x(t) + c(t))dt + (b(t)x(t) + d(t))dB(t)$ avec pour valeur initiale $x(t_0) = x_0$, l'équation homogène associée est $dx(t) = a(t)x(t)dt + b(t)x(t)dB(t)$, dont la solution fondamentale est $\Phi(t) = exp[\int_{t_0}^t (a(s) - \frac{1}{2}b(s)^2)ds + \int_{t_0}^t b(s)dB(s)]$. La solution explicite de l'équation d'origine est alors donnée par $x(t) = \Phi(t)(x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1}[c(s) - b(s)d(s)]ds + \int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1}d(s)dB(s))$
   Dans notre cas $a(t) = -1/(1-t)$, $c(t) = b/(1-t)$, $b(t) = 0$, $d(t) = 1$ et $t_0 = 0$. La solution

fondamentale est donc $\Phi(t) = exp[\int_0^t (-1/(1-s)ds] = exp(log(1-t)) = 1-t$.
La solution est donc: $x(t) = (1-t)[x_0 + b\int_0^t ds/(1-s)^2 + \int_0^t dB(s)/(1-s)] = (1-t)a + bt + (1-t)\int_0^t dB(s)/(1-s)$.
Pour $a = b = 0$, on a $x(t) = (1-t)\int_0^t dB(s)/(1-s)$, qui est un processus gaussien centré. Il reste à calculer sa covariance. Supposons $t < s$. $\mathbb{E}[x(t)x(s)] = (1-t)(1-s)\mathbb{E}[(\int_0^t dB(u)/(1-u))(\int_0^s dB(v)/(1-v))] = (1-t)(1-s)\mathbb{E}[(\int_0^t dB(u)/(1-u))^2 + (\int_0^t dB(u)/(1-u))(\int_t^s dB(v)/(1-v))]$. D'après les propriétés de l'intégrale stochastique, on a alors: $\mathbb{E}[x(t)x(s)] = (1-t)(1-s)\int_0^t du/(1-u)^2 = (1-t)(1-s)[1/(1-t) - 1] = t - ts = t \wedge s - ts$.

**Exercice 2 : Modèle d'activité à une population de neurones (5 points)**
On considère le modèle d'activité suivant:

$$\dot{x} = -x + S(\rho + cx), \tag{1}$$

où $x \in \mathbb{R}$ représente l'activité du neurone, $\rho \in \mathbb{R}$ est un courant extérieur et $c \in \mathbb{R}$ un paramètre qui caractérise la nonlinéarité du système. La fonction $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par:

$$S(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

1. Vérfier que la fonction $S$ satisfait l'équation différentielle: $y' = (1-y)y$.

2. **Dynamique du neurone dans deux cas extrêmes** :

   (a) Démontrer que l'équation (1) avec la condition initiale $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$ admet une unique solution définie sur $\mathbb{R}^+$.
   **Réponse:**
   On commence par montrer l'existence et l'unicité d'une solution sur un intervalle contenant 0 avec le théorème de Cauchy-Lipschitz. On applique le théorme "des bouts" pour étendre la solution à $\mathbb{R}^+$ tout entier.

   (b) Montrer que les solutions sont bornées pour tout temps.
   **Réponse:**
   On intgre sur $[0, t]$, l'équation (1):

   $$x(t) = e^{-t}x_0 + \int_0^t e^{u-t} S(\rho + cx(u))du$$
   $$\Rightarrow |x(t)| \leq e^{-t}|x_0| + 1 - e^{-t} \leq |x_0| + 1$$

   (c) Montrer que dans le cas $\rho \to -\infty$ l'activité du neurone est triviale au sens où: $x(t) \to 0$ lorsque $t \to +\infty$. Comment interpréter ce résultat du point de vue des neurosciences?
   **Réponse:**
   On sait que $S(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$. On vient de voir que pour tout temps, $x$ est bornée, donc $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $\rho + cx(t) \underset{\rho\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Donc $\forall \epsilon > 0$, $\exists \rho_0 > 0$, tel que $\forall \rho > \rho_0$, $|S(\rho + cx(u))| < \epsilon$ pour tout $u \geq 0$. Et donc, $\forall t \geq 0$:

   $$|x(t)| \leq e^{-t}|x_0| + \epsilon \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

   Interprétation: comportement inhibiteur.

   (d) Montrer que dans le cas $\rho \to +\infty$ l'activité du neurone est triviale au sens où: $x(t) \to 1$ lorsque $t \to +\infty$. Comment interpréter ce résultat du point de vue des neurosciences?
   **Réponse:**
   On peut adapter la démonstration précdente à ce nouveau cas, ou bien directement invoquer le théoréme de dépendance par rapport aux paramìtres dans le cadre des ODEs.
   Interprétation: comportement excitateur.
   A partir de maintenant, $c \neq 0$ et $\rho$ sont considérés comme des paramètres de bifurcation.

3. **Bifurcation pli**:

   (a) Donner les conditions que doivent vérifier $(x, c, \rho)$ pour que l'équation (1) présente une bifurcation pli.
   **Réponse** :
   On note $f(x, c, \rho)$ la fonction $-x+S(\rho+cx)$. La condition d'équilibre donne $S(\rho+cx) = x$. La condition de pli est $f_x = 0$ soit $cS'(\rho + cx)) = 1$. Les conditions de transversalité sont $f_c = xS'(\rho + cx) \neq 0$ et $f_\rho = S'(\rho + cx) \neq 0$. La condition de généricité est $f_{x^2} = c^2S''(\rho + cx) = c^2S(\rho + cx)(1 - S(\rho + cx))(1 - 2S(\rho + cx)) \neq 0$

   (b) On impose maintenant $0 < x < 1$. Montrer que les conditions trouvées à la question précédentes peuvent se réécrire:

$$c = \frac{1}{x(1-x)} \tag{2}$$

$$\rho = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) - \frac{1}{1-x} \tag{3}$$

   **Réponse:**
   La condition de pli: $cS'(\rho + cx)) = 1$ plus le fait que $S$ vérifie léquation différentielle: $y' = (1-y)y$, donne: $\frac{1}{c} = (1 - S(\rho + cx))S(\rho + cx)$. Mais, l'on a: $S(\rho + cx) = x$. Ce qui donne bien la condition (2).
   De plus, $S(x) = y \Leftrightarrow x = \log\left(\frac{y}{1-y}\right)$, d'où $S(\rho + cx) = x \Leftrightarrow \rho + cx = \log\left(\frac{x}{1-x}\right)$ et en utilisant (2) on obtient (3).

   (c) Montrer que $c$ prend la valeur 4 et $\rho$ la valeur -2 pour une certaine valeur $x^*$ de $x$ que l'on calculera.
   **Réponse:**
   $x^* = \frac{1}{2}$.

   (d) Montrer que l'une des conditions trouvées en a) n'est plus vérifiée en $(x^*, 4, -2)$.
   **Réponse** :
   On a $f_{x^2}(x^*, 4, -2) = 0$.

4. **Bifurcation fronce**:

   (a) Montrer qu'au point $(x^*, 4, -2)$ l'équation (1) présente une bifurcation fronce.
   **Réponse** :
   Il faut vérifier que $f_{x^3}(x^*, 4, -2) \neq 0$ (généricité) et que $f_c f_{x\rho} - f_\rho f_{xc} \neq 0$ (transversalité). On a $f_{x^3} = c^3S'''(c + \rho x) = c^3S(1-S)[(1-S)(1-2S) - S(1-2S) - 2S(1-S)]$ qui est bien différent de 0 puisque $S = 1/2$.

   (b) On introduit des coordonnées locales $x = x^* + \tilde{x}$, $\rho = -2 + \tilde{\rho}$ et $c = 4 + \tilde{c}$ de telle sorte que l'origine $(\tilde{x}, \tilde{c}, \tilde{\rho}) = (0, 0, 0)$ coincide avec le point de fronce. Montrer que le modèle peut être écrit sous la forme suivante:

$$\dot{\tilde{x}} = a + b\tilde{x} - \frac{4}{3}\tilde{x}^3 + O\big((\tilde{x}, \tilde{c}, \tilde{\rho})^3\big)$$

   où:

$$a = \frac{\tilde{\rho}}{4} + \frac{\tilde{c}}{8} \text{ et } b = \frac{\tilde{c}}{4}.$$

   **Réponse:**
   La forme normale d'une bifurcation de type fronce est donnée par: $\dot{\tilde{x}} = a + b\tilde{x} + \sigma\tilde{x}^3$ (c'est du cours), où:

$$\sigma = \frac{1}{6} f_{x^3}(x^*, 4, -2) = -\frac{4}{3}$$

$$a = \tilde{c} f_c(x^*, 4, -2) + \tilde{\rho} f_\rho(x^*, 4, -2) = \frac{\tilde{\rho}}{4} + \frac{\tilde{c}}{8}$$
$$b = \tilde{c} f_{cx}(x^*, 4, -2) + \tilde{\rho} f_{\rho x}(x^*, 4, -2) = \frac{\tilde{c}}{4}$$

**Exercice 3 : Modèle de Wilson-Cowan (5 points)**
On considère le modèle d'activité à deux populations, dit de Wilson-Cowan :

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + S(\rho_x + ax - by) \\ \dot{y} = -y + S(\rho_y + cx - dy) \end{cases} \tag{4}$$

pour des paramètres $a, b, c$ et $d$ fixés et $\rho_x, \rho_y$ des paramètres de bifurcation. $S$ est la même fonction que celle définie à l'exercice précédent.

1. Reprendre la question 2.a) de l'exercice 2) pour une condition de Cauchy $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
   **Réponse:**
   On applique à nouveau Cauchy-Lipschitz.

2. Soit $(x^*, y^*)$ un point d'équilibre du système (4). Montrer que la matrice jacobienne associée au système (4) peut s'écrire:

$$L = \begin{pmatrix} -1 + ax^*(1 - x^*) & -bx^*(1 - x^*) \\ cy^*(1 - y^*) & -1 - dy^*(1 - y^*) \end{pmatrix}$$

   **Réponse:**
   On utilise les mêmes arguments que dans la question 3.b) de l'exercice 2): $x^* = S(\rho_x + ax^* - by^*)$ et $y^* = S(\rho_y + cx^* - dy^*)$ et $\dot{S} = (1 - S)S$.

3. Quelles conditions portant sur la trace, le déterminant et la partie réelle des valeurs propres de $L$ doivent vérifier les paramètres pour que le système présente une bifurcation de Andronov-Hopf ? Montrer que dans ce cas on a :

$$y^*_\pm(x^*) = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4[2 - ax^*(1 - x^*)]/d}}{2}$$

   **Réponse:**
   Si l'on note $\tau$ la trace et $\delta$ le déterminant. On doit avoir: $\delta < 0, \tau = 0$(la partie réelle doit s'annuler pour une certaine valeur des paramètres et sa différentielle doit être non nulle).

$$\tau = -2ax^*(1 - x^*) - dy^*(1 - y^*)$$

   Si on note $\lambda$ une valeur propre de $L$ alors, $\Re\lambda = \frac{\tau}{2}$. Et donc $\Re\lambda = 0$ donne: $-ax^*(1 - x^*) - \frac{1}{2}dy^*(1 - y^*) = 0$, qui est polynôme du second egré en $y^*$ et ses racines sont:

$$y^*_\pm(x^*) = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4[2 - ax^*(1 - x^*)]/d}}{2}$$

4. En considérant $x^*$ comme une variable, donner les expressions de $\rho_x(x^*)$ et de $\rho_y(x^*)$.
   **Réponse:**
   $x^* = S(\rho_x + ax^* - by^*) \Leftrightarrow \rho_x + ax^* - by^* = \log\left(\frac{x^*}{1-x^*}\right)$ d'où:

$$\rho_x = -ax^* + \log\left(\frac{x^*}{1 - x^*}\right) + by^*$$

De même:

$$\rho_y = -cx^* + \log\left(\frac{y^*}{1-y^*}\right) + dy^*$$

5. Quelles conditions doit-on avoir pour que le système exhibe une bifurcation pli ?
   **Réponse:**
   $\delta = 0$. Reprendre les conditions de la question 3.a) de l'exercice 2).

6. Quelles conditions doit-on avoir pour que le système exhibe une bifurcation de Bogdanov-Takens ?
   **Réponse:**
   Pour avoir une bifurcation de Bogdanov-Takens, il faut qu'il y ait en même temps, une bifurcation pli et une bifurcation de Hopf.

**Exercice 4 : Modèle de Wilson-Cowan avec retard (8 points)**
On prend le même modèle qu'à l'exercice précédent et on introduit des termes de retard.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + S(\rho_x + ax(t-\tau_1) - by(t-\tau_2)) \\ \dot{y}(t) = -y(t) + S(\rho_y + cx(t-\tau_2) - dy(t-\tau_1)) \end{cases} \tag{5}$$

1. Montrer que les points d'équilibre du système avec retard sont les mêmes que ceux du système sans retard (4).
   **Réponse:**
   Comme on cherche les points d'équilibre, ce sont des points stationaires, donc ce sont les mêmes que ceux du système sans retard.

2. Montrer que le système linéarisé de (5) au voisinage d'un point fixe $(x^*, y^*)$ s'écrit:

$$\begin{cases} \dot{u} = -u + ax^*(1-x^*)u(t-\tau_1) - bx^*(1-x^*)v(t-\tau_2) \\ \dot{v} = -v + cy^*(1-y^*)u(t-\tau_2) - dy^*(1-y^*)v(t-\tau_1) \end{cases} \tag{6}$$

   **Réponse:**
   Il s'agit d'une linéarisation classique.

3. On cherche des solutions de (6) sous la forme $(u, v) = (\bar{u}, \bar{v})e^{\lambda t}$. Quelle relation doit vérifier $\lambda$ pour que l'amplitude $(\bar{u}, \bar{v})$ soit différente de $(0, 0)$. On mettra cette relation sous la forme $\mathcal{E}(\lambda) = 0$.
   **Réponse:**
   On remplace dans (6):

$$\begin{cases} \lambda\bar{u} = -\bar{u} + ax^*(1-x^*)e^{-\lambda\tau_1}\bar{u} - bx^*(1-x^*)e^{-\lambda\tau_2}\bar{v} \\ \lambda\bar{v} = -\bar{v} + cy^*(1-y^*)e^{-\lambda\tau_2}\bar{u} - dy^*(1-y^*)e^{-\lambda\tau_1}\bar{v} \end{cases}$$

   On a donc un système, qui admet donc une solution non nulle si le déterminant s'annulle $\mathcal{E}(\lambda) = 0$ où:

$$\mathcal{E}(\lambda) = det\begin{pmatrix} \lambda + 1 - ax^*(1-x^*)e^{-\lambda\tau_1} & bx^*(1-x^*)e^{-\lambda\tau_2} \\ -cy^*(1-y^*)e^{-\lambda\tau_2} & \lambda + 1 + dy^*(1-y^*)e^{-\lambda\tau_1} \end{pmatrix}$$

4. On note :

$$\kappa_1 = ax^*(1-x^*) \quad \kappa_2 = dy^*(1-y^*) \quad \kappa_3 = bcx^*(1-x^*)y^*(1-y^*)$$

   Quelle relation doit lier $\kappa_1, \kappa_2$ et $\kappa_3$ pour que $\lambda = 0$ soit la solution de $\mathcal{E}(\lambda) = 0$ ?
   **Réponse:**
   la relation est $(1-\kappa_1)(1+\kappa_2) + \kappa_3 = 0$.

5. Dans cette question on considère un système purement inhibitif : $a = c < 0$ et $b = d > 0$ avec $\rho_x = \rho_y$. On se place également dans le cas où $S(x) = H(x)$, avec $H$ la fonction de Heaviside. On cherche une solution synchronisée qui soit $T$-périodique, c'est à dire: $u(t) = v(t) = u(t+T)$. On paramétrise cette solution en terme de deux temps fondamentaux $T_1$ et $T_2$. $T_1$ représente le temps passé sur la partie décroissante de la trajectoire et $T_2$ le temps passé sur la phase croissante. On note également $A_+$ (resp. $A_-$) le maximum (resp. minimum) de la trajectoire.

   (a) Montrer que $A_- = A_+ e^{-T_1}$ et $A_+ = 1 + (A_- - 1)e^{-T_2}$.
   **Réponse:**
   Lorsque l'on est en $A_+$ en $t_0$, alors la dynamique est $\dot{x} = -x$, de telle sorte que $A_- = A_+ e^{-T_1}$. Inversement, lorsque l'on est en $A_-$ en $t_0$, alors la dynamique est: $\dot{x} = -x + 1$, de telle sorte que: $A_+ = A_- e^{-T_2} + 1 - e^{-T_2} = 1 + (A_- - 1)e^{-T_2}$.

   (b) Montrer que $\rho_x$ doit satisfaire les deux équations suivantes: $\rho_x = -aA_+ e^{-(T_1-\tau_1)} + bA_+ e^{-(T_1-\tau_2)}$ et $\rho_x = -a(1 + (A_- - 1)e^{-(T_2-\tau_1)}) + b(1 + (A_- - 1)e^{-(T_2-\tau_2)})$.
   **Réponse:**
   On a nécesssairement comme conditions nécessaires de compatibilité:

$$\rho_x + aA_+ e^{-(T_1-\tau_1)} - bA_+ e^{-(T_1-\tau_2)} = 0$$

$$\rho_x + a(1 + (A_- - 1)e^{-(T_2-\tau_1)}) - b(1 + (A_- - 1)e^{-(T_2-\tau_2)}) = 0$$

   (c) Montrer alors que:

$$T_1 = \ln\left(\frac{s + \rho_x + a - b}{\rho_x}\right) \text{ et } T_2 = \ln\left(\frac{\rho_x - s}{\rho_x + a - b}\right)$$

   avec $s = -ae^{\tau_1} + be^{\tau_2}$.
   **Réponse:**
   Il suffit de résoudre les deux équations précédentes pour trouver les expressions de $T_1$ et $T_2$.

   (d) Calculer la période ainsi que l'amplitude totale $A = A_+ - A_-$ en fonction de $a, b, s$.
   **Réponse:**
   $T = T_1 + T_2$ et $A = A_+ - A_- = \frac{a+b+s}{s}$.

**Problème : Modèle de champ neuronal de V1 (17 points)**
On considère que l'aire visuelle V1 est représentée par l'espace $\mathbb{R}^2$ et que les neurones (ou plus précisement les masses neurales) qui la constituent sont sensibles à l'orientation $\theta \in [0, \pi[$ d'un contour situé dans son champ récepteur. Ces neurones sont donc paramétrés comme des points du produit $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ et leur état est une fonction $V : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 \times [0, \infty[ \to \mathbb{R}$ qu'on peut voir comme un potentiel de membrane moyen, noté $V(\mathbf{r}, \theta, t)$. Ces neurones sont connectés par des poids synaptiques $w(\mathbf{r}, \theta; \mathbf{r}', \theta')$ à valeurs réelles.

On considère dans la suite que la variation temporelle du potentiel de membrane est donnée par l'équation intégro-différentielle, dite équation de champ neural, suivante

$$\frac{\partial V(\mathbf{r}, \theta, t)}{\partial t} = -\alpha V(\mathbf{r}, \theta, t) + \frac{\mu}{\pi} \int_0^\pi \int_{\mathbb{R}^2} w(\mathbf{r}, \theta; \mathbf{r}', \theta') S(V(\mathbf{r}', \theta', t))\, d\mathbf{r}'\, d\theta' + I_{\mathrm{e}}(\mathbf{r}, \theta, t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} F(V(\mathbf{r}, \theta, t)) \tag{7}$$

La fonction $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction sigmoïdale satisfaisant $S(0) = 0$, par exemple

$$S(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} - \frac{1}{2}$$

La fonction $I : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 \times [0, \infty[ \to \mathbb{R}$ est un courant extérieur.
Le paramètre $\alpha > 0$ contrôle la vitesse à laquelle $V$ décroit en l'absence de courant extérieur et

d'interaction.
Le paramètre $\mu$ contrôle l'excitabilité de $V1$. $w(\mathbf{r},\theta;\mathbf{r}',\theta')$ est le poids de la connexion entre le neurone $q'=(\mathbf{r}',\theta')$ et $q=(\mathbf{r},\theta)$.

L'architecture fonctionnelle de V1 est encodée dans les poids synaptiques qui sont la somme de deux contributions

1. Les connexions "verticales", locales, à l'intérieur d'une masse neurale
$$w(\mathbf{r},\theta;\mathbf{r}',\theta') = w_{\text{loc}}(\theta-\theta')\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'),$$
où la fonction $w_{\text{loc}}(\varphi)$ est une fonction paire, et $\delta$ est la distribution (ou fonction) de Dirac.

2. Les connexions "horizontales" latérales entre deux masses neurales contribuent à la connectivité totale par le terme $w(\mathbf{r},\theta;\mathbf{r}',\theta') = w_{\text{lat}}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',\theta)\delta(\theta-\theta')$

**Question 1** (0.5 point)
Donner une interprétation de la connectivité latérale en terme d'angles.
**Réponse**
Ne sont connectés latéralement que les neurones $(\mathbf{r},\theta)$ et $(\mathbf{r}',\theta)$.
**Question 2** (2 points)
On impose en plus que neurones $(\mathbf{r},\theta)$ et $(\mathbf{r}',\theta)$ ne soient connectés que si l'angle du vecteur $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ est égal à $\theta$ modulo $\pi$. Montrer que ceci peut s'écrire
$$w_{\text{lat}}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',\theta) = w_{\text{lat}}(s)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'-se_\theta),$$
où $e_\theta$ est le vecteur unité dans la direction $\theta$, et $w_{\text{lat}}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction paire.
Donner une interprétation géométrique de la définition de $w_{\text{lat}}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',\theta)$ et du réel $s$. Pouvez-vous donner un choix possible pour $w_{\text{lat}}(s)$ ?
**Réponse**
Ne sont connectés que les neurones $(\mathbf{r},\theta)$ et $(\mathbf{r}',\theta)$ tels que $\mathbf{r}-\mathbf{r}'=se_\theta$.
**Question 3** (2 points)
On note $\hat{w}(r_{-\theta}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ la fonction $w_{\text{lat}}(s)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'-se_\theta)$, où $r_\varphi$ représente la rotation de $\mathbb{R}^2$ d'angle $\varphi$. Justifier cette notation.
Montrer que le terme intégral de (7) s'écrit comme la somme d'une intégrale sur $[0,\pi]$ et d'une intégrale sur $\mathbb{R}^2$, qu'on exprimera en fonction de $w_{\text{loc}}(\cdot)$ et de $w_{\text{lat}}(\cdot,\cdot)$.
**Réponse**

$$\frac{\partial V(\mathbf{r},\theta,t)}{\partial t} = -\alpha V(\mathbf{r},\theta,t) + \mu\int_0^\pi w_{\text{loc}}(\theta-\theta')S(V(\mathbf{r},\theta',t))\,\frac{d\theta'}{\pi} + \mu\int_{\mathbb{R}^2} w_{\text{lat}}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',\theta)S(V(\mathbf{r}',\theta,t))\,d\mathbf{r}' + I_{\text{e}}(\mathbf{r},\theta,t)$$

**Question 4** (3 points)
On considère maintenant l'action du groupe $E(2)$ des déplacements de l'espace euclidien à deux dimensions sur $V1=\mathbb{R}^2\times\mathbb{S}^1$. On définit successivement, pour la translation de vecteur $\mathbf{r}'$, la rotation $r_\psi$ et la réflexion $\kappa$ par rapport à l'axe horizontal, leur action sur le neurone $(\mathbf{r},\theta)$ comme
$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathbf{r}'\cdot(\mathbf{r},\theta) &=& (\mathbf{r}+\mathbf{r}',\theta) \\ r_\psi\cdot(\mathbf{r},\theta) &=& (r_\psi(\mathbf{r}),\theta+\psi) \\ \kappa\cdot(\mathbf{r},\theta) &=& (\kappa(\mathbf{r}),-\theta) \end{array}\right.$$

Soit la fonction $V:\mathbb{R}^2\times\mathbb{S}^1\to\mathbb{R}$ et $\gamma\in E(2)$. On définit l'action de $\gamma$ sur $V$ par
$$\gamma\cdot V(\mathbf{r},\theta) = V(\gamma^{-1}\cdot(\mathbf{r},\theta))$$

Pour les poids synaptiques on a de même

$$\gamma \cdot w(\mathbf{r}, \theta; \mathbf{r}', \theta') = w(\gamma^{-1} \cdot (\mathbf{r}, \theta); \gamma^{-1} \cdot (\mathbf{r}', \theta'))$$

Montrer que les poids synaptiques sont $E(2)$-invariants

**Réponse**

On a

$$w(\mathbf{r}, \theta; \mathbf{r}', \theta') = w_{\text{loc}}(\theta - \theta')\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \hat{w}(r_{-\theta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'))\delta(\theta - \theta')$$

C'est une fonction de $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$, d'où l'invariance par les translations.

Pour les rotations:

$$\begin{aligned} w(r_{-\psi}\mathbf{r}, \theta - \psi; r_{-\psi}\mathbf{r}', \theta' - \psi) = w_{\text{loc}}((\theta - \psi) - (\theta' - \psi))\delta(r_{-\psi}\mathbf{r} - r_{-\psi}\mathbf{r}') \\ \hat{w}(r_{-(\theta-\psi)}(r_{-\psi}\mathbf{r} - r_{-\psi}\mathbf{r}')\delta((\theta - \psi) - (\theta' - \psi)) = \\ w_{\text{loc}}(\theta - \theta')\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \hat{w}(r_{-\theta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'))\delta(\theta - \theta') \end{aligned}$$

Pour la réflexion $\kappa$:

$$\begin{aligned} w(\kappa\mathbf{r}, -\theta; \kappa\mathbf{r}', -\theta') = w_{\text{loc}}(-\theta + \theta')\delta(\kappa\mathbf{r} - \kappa\mathbf{r}') + \hat{w}(r_{\theta}(\kappa\mathbf{r} - \kappa\mathbf{r}'))\delta(-\theta + \theta') = \\ w_{\text{loc}}(\theta - \theta')\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \hat{w}(\kappa r_{-\theta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'))\delta(\theta - \theta') = w(\mathbf{r}, \theta; \mathbf{r}', \theta') \end{aligned}$$

car $w_{\text{loc}}$ est pair, $r_\theta \kappa = \kappa r_{-\theta}$ et $\hat{w}(\kappa\mathbf{r}) = \hat{w}(\mathbf{r})$.

**Question 5** (3 points)

On veut maintenant montrer que l'équation (7) est $E(2)$-équivariante dans le cas $I_{\text{e}} = 0$, c.a.d que la fonction $F$ satisfait la condition $\gamma \cdot F(V) = F(\gamma \cdot V)$. Dans toute la suite on suppose que le courant extérieur $I_{\text{e}}$ est nul.

Montrer d'abord que

$$\gamma \cdot F(V)(\mathbf{r}, \theta, t) = -\alpha V(\gamma^{-1} \cdot (\mathbf{r}, \theta), t) + \frac{\mu}{\pi} \int_0^\pi \int_{\mathbb{R}^2} w(\gamma^{-1}(\mathbf{r}, \theta); \mathbf{r}', \theta') S(V(\mathbf{r}', \theta', t))\, d\mathbf{r}'\, d\theta'$$

Montrer ensuite que c'est égal à $F(\gamma \cdot V)$.

**Réponse**

La première équation découle de la définition de l'action de $E(2)$ sur une fonction définie sur V1.

Pour la suite on écrit

$$F(\gamma \cdot V) = -\alpha V(\gamma^{-1} \cdot (\mathbf{r}, \theta), t) + \frac{\mu}{\pi} \int_0^\pi \int_{\mathbb{R}^2} w(\mathbf{r}, \theta; \mathbf{r}', \theta') S(V(\gamma^{-1} \cdot (\mathbf{r}', \theta'), t)\, d\mathbf{r}'\, d\theta'$$

Dans l'intégrale on fait le changement de variable $(\mathbf{r}'', \theta'') = \gamma^{-1} \cdot (\mathbf{r}', \theta')$, on remarque que $d\mathbf{r}''\, d\theta'' = d\mathbf{r}'\, d\theta'$, et on utilise le fait que, du fait de l'$E(2)$-invariance de $w$, $w(\mathbf{r}, \theta; \gamma \cdot (\mathbf{r}'', \theta'')) = w(\gamma^{-1} \cdot (\mathbf{r}, \theta); \mathbf{r}'', \theta'')$.

**Question 6** (2 points)

On va maintenant linéariser (7) au voisinage de la solution $V = 0$ et chercher des solutions de la forme $V(\mathbf{r}, \theta, t) = e^{\lambda t} V(\mathbf{r}, \theta)$. Donner l'expression de l'équation intégro-différentielle que satisfait $V(\mathbf{r}, \theta)$ en développant $S(\cdot)$ au premier ordre.

**Réponse**

On écrit $S(e^{\lambda t} V(\mathbf{r}, \theta)) = S(0) + S'(0) e^{\lambda t} V(\mathbf{r}, \theta) +$ termes d'ordre supérieur $= S'(0) e^{\lambda t} V(\mathbf{r}, \theta) +$ termes d'ordre supérieur. En simplifiant par $e^{\lambda t}$ on obtient

$$\lambda V(\mathbf{r}, \theta) = -\alpha V(\mathbf{r}, \theta) + S'(0)\mu \left( \int_0^\pi w_{\text{loc}}(\theta - \theta') V(\mathbf{r}, \theta') \frac{d\theta'}{\pi} + \int_{\mathbb{R}^2} w_{\text{lat}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \theta) V(\mathbf{r}', \theta)\, d\mathbf{r}' \right)$$

**Question 7** (2,5 points)

On suppose maintenant que la partie spatiale de la solution est une onde plane de vecteur d'onde

$\mathbf{k} = (\rho, \psi)$ en coordonnées polaires, modulée par un facteur de phase $u(\psi - \theta)$, où $u$ est une fonction périodique de période $\pi$.

$$V(\mathbf{r}, \theta) = u(\theta - \psi)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \text{c.c.}$$

où c.c. signifie “complexe conjugué”.
Soit $\kappa_{\mathbf{k}}$ la réflexion par rapport à la droite vectorielle de direction $\mathbf{k}$.

1. Montrer que $\kappa_{\mathbf{k}} \cdot V(\mathbf{r}, \theta) = u(\psi - \theta)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$.

2. En déduire que la fonction $u$ est soit paire, soit impaire.

**Réponse**
Pour le point 1), on a

$$\kappa_{\mathbf{k}} \cdot V(\mathbf{r}, \theta) = V(\kappa_{\mathbf{k}}^{-1} \cdot (\mathbf{r}, \theta)) = V(\kappa_{\mathbf{k}} \cdot (\mathbf{r}, \theta)) = V(\kappa_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}), 2\psi - \theta) =$$
$$u(2\psi - \theta - \psi)e^{i\mathbf{k}\cdot\kappa_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})} = u(\psi - \theta)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

Le point 2) découle du fait que $\kappa_{\mathbf{k}}^2 = 1$.
**Question 8** (2 points)
Ecrire l’équation satisfaite par la fonction $u$ en fonction de $w_{\text{loc}}$ et de la transformée de Fourier en espace de $w_{\text{lat}}$.
**Réponse**
On écrit $V(\mathbf{r}, \theta + \psi) = u(\theta)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ et on substitue dans l’équation de la question 6. On obtient

$$\lambda u(\theta) = -\alpha u(\theta) + \mu S'(0) \left( \int_0^{\pi} w_{\text{loc}}(\theta - \theta')u(\theta')\frac{d\theta'}{\pi} + \tilde{w}_{\text{lat}}(\mathbf{k}, \theta + \psi)u(\theta) \right)$$

avec

$$\tilde{w}_{\text{lat}}(\mathbf{k}, \theta + \psi) = \int_{\mathbb{R}^2} w_{\text{lat}}(\mathbf{r}, \theta + \psi)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\, d\mathbf{r}$$