Examen du module "Méthodes mathématiques pour les neurosciences"

14 janvier 2009

Un exemple de bifurcation de Neimark-Sacker (5 points)

On considère l'équation

$$u_{k+1} = \alpha u_k(1 - u_{k-1}) \tag{1}$$

décrivant la variation dans le temps de la densité $u_k > 0$ d'une population à l'imstant k avec un taux de croissance $\alpha > 0$.
Question 1 (1 point) Montrer que l'équation (1) permet de définir le système dynamique discret de dimension 2

$$x \rightarrow f(x, \alpha) \quad \text{soit} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(1 - x_2)x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Solution :
On introduit $v_k = u_{k-1}$ et on écrit (1)

$$\begin{cases} u_{k+1} &= \alpha u_k(1 - v_k) \\ v_{k+1} &= u_k \end{cases}$$

Question 2 (1 point) Montrer que si $\alpha > 1$ l'équation (2) admet, outre le point fixe de coordonnées $[0, 0]^T$, un autre point fixe $x^0(\alpha)$ dont on donnera les coordonnées.
Solution :
On a le point fixe trivial $[0, 0]^T$ et, si $\alpha > 1$ le point fixe x^0 de coordonnées

$x_1^0(\alpha) = x_2^0(\alpha) = 1 - \frac{1}{\alpha}$.
Question 3 (1 point) Calculer la jacobienne $J(\alpha)$ de (2) en x^0 et ses valeurs propres $\mu_{1,2}(\alpha)$.
Solution :
On trouve facilement que

$$J(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 1-\alpha \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mu_{1,2}(\alpha) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4} - \alpha}$$

Question 4 (2 points) Montrer que le système (2) a une bifurcation de Neimark-Sacker pour $\alpha = \alpha_0 = 2$ au point $x^0(\alpha_0)$. On montrera que les multiplicateurs sont de la forme $\mu_{1,2}(\alpha_0) = e^{\pm i\theta_0}$, avec $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$.
Solution :
Si on pose $\mu_{1,2}(\alpha) = r(\alpha)e^{\pm i\theta(\alpha)}$, on doit vérifier les conditions

$$r'(\alpha_0) \neq 0 \quad e^{ik\theta(\alpha_0)} \neq 1,\ k = 1, 2, 3, 4$$

Inégalité exponentielle de martingale (5 points)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité, $\mathbf{W}_t$ un processus de Wiener standard de dimension d sur cet espace, $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_d) \in \mathbb{L}_d^2(\mathbb{R}^+)$, et T, $\alpha, \beta > 0$.

Soit τ_n le temps d'arrêt défini par :

$$\tau_n = \inf \left\{ t \geq 0 : \left| \int_0^t \mathbf{X}(s)\, d\mathbf{W}_s \right| + \int_0^t |\mathbf{X}(s)|^2\, ds \geq n \right\},$$

et $x_n(t)$ le processus stochastique défini par

$$x_n(t) = \alpha \int_0^t \mathbf{X}(s)\mathbf{1}_{[0,\tau_n]}(s)\, d\mathbf{W}(s) - \frac{\alpha^2}{2} \int_0^t |\mathbf{X}(s)|^2 \mathbf{1}_{[0,\tau_n]}(s)\, ds$$

Question 1 (1 point) Montrer que, p.s., $x_n(t)$ est borné et $\lim_{n\to\infty} \tau_n = \infty$.
Question 2 (2 points) En appliquant la formule d'Itô, montrer que

$$\exp[x_n(t)] = 1 + \alpha \int_0^t \exp[x_n(s)] \mathbf{X}(s) \mathbf{1}_{[0,\tau_n]}(s)\, d\mathbf{W}(s).$$

Solution :
On a

$$dx_n(t) = -\frac{\alpha^2}{2} |\mathbf{X}(t)|^2 \mathbf{1}_{[0,\tau_n]}(t)\, dt + \alpha \mathbf{X}(t) \mathbf{1}_{[0,\tau_n]}(t) d\mathbf{W}_t,$$

et donc, Itô,

$$\exp[x_n(t)] = 1 + \alpha \int_0^t \exp[x_n(s)]\mathbf{X}(s)\mathbf{1}_{[0,\tau_n]}(s)\, d\mathbf{W}(s).$$

Question 3 (1 point) En déduire que $\exp[x_n(t)]$ est une martingale positive d'espérance égale à 1 telle que

$$P\left(\sup_{0\leq t\leq T} \exp[x_n(t)] \geq e^{\alpha\beta}\right) \leq e^{-\alpha\beta}$$

Question 4 (1 point) En déduire l'inégalité exponentielle de martingale

$$P\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left[\int_0^t \mathbf{X}(s)\, d\mathbf{W}(s) - \frac{\alpha}{2}\int_0^t |\mathbf{X}(s)|^2\, ds\right] > \beta\right) \leq e^{-\alpha\beta}$$

Solution :
On a immédiatement

$$P\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left[\int_0^t \mathbf{X}(s)\mathbf{1}_{[0,\tau_n]}(s)\, d\mathbf{W}(s) - \frac{\alpha}{2}\int_0^t |\mathbf{X}(s)|^2\mathbf{1}_{[0,\tau_n]}(s)\, ds\right] > \beta\right) \leq e^{-\alpha\beta}$$

et le résultat s'obtient en faisant tendre n vers l'infini.

Un résultat de stabilité exponentielle (11 points)

Le but de ce problème est d'établir un théorème de stabilité de la solution d'une équation différentielle stochastique. Ce résultat est utilisé dans le problème suivant.

Soit B_h la boule ouverte de $\mathbb{R}^d$ de rayon $h > 0$:

$$B_h = \{x \in \mathbb{R}^d,\ |x| < h\}$$

On note $C^{2,1}(B_h, [t_0, \infty[; \mathbb{R}^+)$ l'ensemble des fonctions $V(x,t)$ de $B_h \times [t_0, \infty[$ dans $\mathbb{R}^+$ qui sont deux fois continument différentiables par rapport à la variable x et une fois continument différentiables par rapport à la variable t.
On considère l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} d\mathbf{X} &= \mathbf{b}(\mathbf{X},t)dt + \mathbf{B}(\mathbf{X},t)d\mathbf{W}_t \\ \mathbf{X}(t_0) &= \mathbf{X}_0 \end{cases} \tag{3}$$

$\mathbf{X}_0$ est un point de $\mathbb{R}^d$.

$$\mathbf{b} : \mathbb{R}^d \times [0, T] \to \mathbb{R}^d \quad \mathbf{B} : \mathbb{R}^d \times [0, T] \to \mathbb{M}^{d\times d}$$

satisfont les conditions pour l'existence et l'unicité de la solution, notée $\mathbf{X}(t; t_0, \mathbf{X}_0)$, de (3) et sont telles que

$$\mathbf{b}(0, t) = 0 \quad \mathbf{B}(0, t) = 0 \quad t \geq t_0$$

Ceci implique que (3) admet la solution $\mathbf{X}(t) \equiv 0$, dite triviale, correspondant à la valeur initiale $\mathbf{X}_0 = 0$. Cette solution est dite presque sûrement exponentiellement stable si

$$\limsup \frac{1}{t} \log |\mathbf{X}(t; t_0, \mathbf{X}_0)| = 0 \quad \text{p.s.} \quad \forall\, \mathbf{X}_0 \in \mathbb{R}^d$$

On admettra que si $\mathbf{X}_0 \neq 0$,

$$P(\mathbf{X}(t; t_0, \mathbf{X}_0 \neq 0) \text{ sur } t \geq t_0) = 1$$

c'est-à-dire que presque toutes les trajectoires de la solution $\mathbf{X}(t; t_0, \mathbf{X}_0)$ correspondant à la valeur initiale non nulle $\mathbf{X}_0$ ne passent pas par l'origine.

On définit aussi l'opérateur différentiel L associé à (3) :

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_i b_i(\mathbf{X}, t) \frac{\partial}{\partial X_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} [\mathbf{B}(\mathbf{X}, t)\mathbf{B}^T(\mathbf{X}, t)]_{ij} \frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_j}$$

On suppose enfin qu'il existe une fonction $V \in C^{2,1}(B_h, [t_0, \infty[; \mathbb{R}^+)$ et des constantes réelles $p > 0$, $c_1 > 0$, c_2 et $c_3 \geq 0$ telles que pour tout $\mathbf{X} \neq 0$ et $t \geq t_0$

1. $c_1 |\mathbf{X}|^p \leq V(\mathbf{X}, t)$,
2. $L\,V(\mathbf{X}, t) \leq c_2 V(\mathbf{X}, t)$,
3. $|V_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}, t)\mathbf{B}(\mathbf{X}, t)|^2 \geq c_3 V^2(\mathbf{X}, t)$.

Question 1 (2 points) On note $\mathbf{X}(t)$ la solution $\mathbf{X}(t; t_0, \mathbf{X}_0)$, $\mathbf{X}_0 \neq 0$. Montrer que

$$d(\log V(\mathbf{X}(t), t)) = \left(\frac{LV(\mathbf{X}(t), t)}{V(\mathbf{X}, t)} - \frac{1}{2} \frac{|V_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}(t), t)\mathbf{B}(\mathbf{X}(t), t)|}{V^2(\mathbf{X}, t)} \right) dt + \frac{V_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}(t), t)\mathbf{B}(\mathbf{X}(t), t)}{V(\mathbf{X}(t), t)} d\mathbf{W}_t$$

Solution :
On applique d'abord la formule d'Itô à V :

$$dV(\mathbf{X}(t),t) = LV(\mathbf{X},t)dt + V_{\mathbf{X}}\mathbf{B}d\mathbf{W}$$

puis à $\log V$

$$d(\log V) = \frac{dV}{V} - \frac{1}{2}\frac{|V_{\mathbf{X}}\mathbf{B}|^2}{V^2}dt$$

Question 2 (1 point) En déduire la majoration suivante

$$\log V(\mathbf{X}(t),t) \leq \log V(\mathbf{X}(t_0),t_0) + c_2(t-t_0) + M(t) - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} \frac{|V_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}(s),s)\mathbf{B}(\mathbf{X}(s),s)|^2}{V^2(\mathbf{X}(s),s)}\,ds,$$

où

$$M(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{V_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}(s),s)\mathbf{B}(\mathbf{X}(s),s)}{V(\mathbf{X}(s),s)}\,d\mathbf{W}_s$$

est une martingale continue telle que $M(t_0) = 0$.
Solution :
Il suffit d'utiliser l'hypothèse 2).
Question 3 (2 points) Soit $0 < \varepsilon < 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$P\left(\sup_{t_0 \leq t \leq t_0+n}\left[M(t) - \frac{\varepsilon}{2}\int_{t_0}^{t}\frac{|V_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}(s),s)\mathbf{B}(\mathbf{X}(s),s)|^2}{V^2(\mathbf{X}(s),s)}\,ds\right] > \frac{2}{\varepsilon}\log n\right) \geq \frac{1}{n^2}$$

Solution :
Appliquer le résultat de stabilité exponentielle.
Question 4 (2 points) En déduire que pour presque tout $\omega \in \Omega$ il existe $n_0(\omega)$ tel que pour tout $t_0 \leq t \leq t_0 + n$, $n \geq n_0$ on ait

$$\log V(\mathbf{X}(t),t) \leq \log V(\mathbf{X}(t_0),t_0) - \frac{1}{2}[(1-\varepsilon)c_3 - 2c_2](t-t_0) + \frac{2}{\varepsilon}\log n$$

Solution :
D'après le lemme de Borel-Cantelli, pour presque tout $\omega \in \Omega$ il existe $n_0(\omega)$ tel que pour tout $t_0 \leq t \leq t_0 + n$, $n \geq n_0$ on a

$$M(t) \leq \frac{2}{\varepsilon}\log n + \frac{\varepsilon}{2}\int_{t_0}^{t}\frac{|V_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}(s),s)\mathbf{B}(\mathbf{X}(s),s)|^2}{V^2(\mathbf{X}(s),s)}\,ds,$$

et le résultat se déduit de l'hypothèse 3).
Question 5 (3 points) Déduire de l'hypothèse 1) que

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log V(\mathbf{X}(t), t) \leq -\frac{c_3 - 2c_2}{2p}$$

Que peut-on dire de la stabilité exponentielle presque sûre de la solution triviale de (3).
Solution :
Pour presque tout $\omega \in \Omega$, si $t_0 + n - 1 \leq t \leq t_0 + n$ et $n \geq n_0$ on a

$$\frac{1}{t} \log V(\mathbf{X}(t), t) \leq -\frac{t - t_0}{2t}[(1-\varepsilon)c_3 - 2c_2] + \frac{\log V(\mathbf{X}(t_0), t_0) + \frac{2}{\varepsilon}\log n}{t_0 + n - 1}$$

On en déduit que

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log V(\mathbf{X}(t), t) \leq -\frac{1}{2}[(1-\varepsilon)c_3 - 2c_2] \quad \text{p.s.},$$

donc, en utilisant l'hypothèse 1)

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log |\mathbf{X}(t)| \leq -\frac{(1-\varepsilon)c_3 - 2c_2]}{2p} \quad \text{p.s.},$$

et pour tout $\varepsilon > 0$, d'où le résultat.

Réseaux de neurones stochastiques (8 points)

Le but de ce problème est d'étudier quelques propriétés de stabilité de réseaux de neurones stochastiques.
On considère un ensemble de n neurones représentés par leurs potentiels de membrane $u_i(t)$, $i = 1, \cdots, n$ et $t \geq 0$. On se donne n fonctions lipschitziennes $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, n$ telles que

$$ug_i(u) \geq 0 \quad \text{et} \quad |g_i(u)| \leq 1 \wedge \beta_i|u| \;\forall u \in \mathbb{R} \tag{4}$$

La dynamique des neurones s'écrit

$$\begin{cases} \dot{u}_i(t) &= -b_i u_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} g_j(u_j(t)) \quad 1 \leq i \leq n \\ u_i(0) &= u_i^0 \quad 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

On introduit le vecteur de dimension n, $\mathbf{u}(t) = [u_1(t), \cdots, u_n(t)]^T$, la matrice diagonale $\bar{\mathbf{B}} = \text{diag}(b_1, \cdots, b_m)$, la matrice $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$, le vecteur $\mathbf{g}(\mathbf{u}) = [g_1(u_1), \cdots, g_n(u_n)]^T$, et on écrit

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\mathbf{u}}(t) & = & -\bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) + \mathbf{A}\mathbf{g}(\mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{u}(0) & = & \mathbf{u}_0 \end{array} \right. \tag{5}$$

Question 1 (1 point) Montrer que l'équation différentielle (5) admet une solution unique $\mathbf{u}(t)$ sur un intervalle ouvert contenant 0 telle que $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$.
Solution :
Il suffit d'appliquer le théorème d'existence de Cauchy.
Question 2 (1 point) On perturbe l'équation (5) de la manière suivante

$$\left\{ \begin{array}{rcl} d\mathbf{X}(t) & = & [-\bar{\mathbf{B}}\mathbf{X}(t) + \mathbf{A}\mathbf{g}(\mathbf{X}(t))]dt + \mathbf{B}(\mathbf{X}(t))\, d\mathbf{W}_t \quad t \geq 0 \\ \mathbf{X}(0) & = & \mathbf{X}_0 \end{array} \right. \tag{6}$$

$\mathbf{W}_t$ est un mouvement brownien standard de dimension m et $\mathbf{B}(\mathbf{X})$ est une fonction localement lipschitzienne $\mathbf{B} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{M}^{n\times m}$.
Montrer que l'équation différentielle stochastique (6) admet une solution unique définie pour $t \geq 0$ égale à $\mathbf{X}_0$ pour $t = 0$.
Solution :
Il suffit d'appliquer le théorème d'existence et d'unicité d'une e.d.s.
Question 3 (2 points) Supposons qu'il existe une matrice symétrique définie positive $\mathbf{Q} = (q_{ij})_{n\times n}$ et deux réels μ et $\rho \geq 0$ tels que

$$2\mathbf{X}^T\mathbf{Q}[-\bar{\mathbf{B}}\mathbf{X} + \mathbf{A}\mathbf{g}(\mathbf{X})] + \text{trace}[\mathbf{B}^T(\mathbf{X})\mathbf{Q}\mathbf{B}(\mathbf{X})] \leq \mu\mathbf{X}^T\mathbf{Q}\mathbf{X},$$

et

$$|\mathbf{X}^T\mathbf{Q}\mathbf{B}(\mathbf{X})|^2 \geq \rho(\mathbf{X}^T\mathbf{Q}\mathbf{X})^2$$

pour tout $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$. Montrer que la solution de (6) est telle que

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log |\mathbf{X}(t; \mathbf{X}_0)| \leq -(\rho - \frac{\mu}{2}) \quad \text{p.s.}$$

Que peut-on dire de la stabilité exponentielle presque sûre du réseau de neurones ?
Solution :
Le résultat découle de l'exercice "Un résultat de stabilité exponentielle" en posant $V(\mathbf{X}, t) = \mathbf{X}^T\mathbf{Q}\mathbf{X}$.

Question 4 (3 points) On suppose que les conditions (4) sont satisfaites et on fait l'hypothèse qu'il existe une matrice diagonale définie positive $\mathbf{Q} = \mathrm{diag}(q_1, \cdots, q_n)$ et deux réels $\mu > 0$ et $\rho \geq 0$ tels que, pour tout $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$

$$\mathrm{trace}[\mathbf{B}^T(\mathbf{X})\mathbf{Q}\mathbf{B}(\mathbf{X})] \leq \mu \mathbf{X}^T\mathbf{Q}\mathbf{X}$$

et

$$|\mathbf{X}^T\mathbf{Q}\mathbf{B}(\mathbf{X})|^2 \geq \rho(\mathbf{X}^T\mathbf{Q}\mathbf{X})^2.$$

Soit $\mathbf{H} = (h_{ij})_{n\times n}$ la matrice symétrique définie par

$$h_{ij} = \begin{cases} 2q_i[-b_i + (0 \vee a_{ii})\beta_i] & \text{si} \quad i = j \\ q_i|a_{ij}|\beta_j + q_j|a_{ji}|\beta_i & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

Montrer que la solution de l'équation (6) est telle que

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log|\mathbf{X}(t; \mathbf{X}_0)| \leq -\left(\rho - \frac{1}{2}\left[\mu + \frac{\lambda_{max}(\mathbf{H})}{\min_i q_i}\right]\right) \quad \text{p.s.}$$

si $\lambda_{max}(\mathbf{H}) \geq 0$ et

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log|\mathbf{X}(t; \mathbf{X}_0)| \leq -\left(\rho - \frac{1}{2}\left[\mu + \frac{\lambda_{max}(\mathbf{H})}{\max_i q_i}\right]\right) \quad \text{p.s.}$$

dans le cas contraire.

Solution :

On majore $2\mathbf{X}^T\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{g}(\mathbf{X})$ à l'aide de (4).

$$2\mathbf{X}^T\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{g}(\mathbf{X}) = 2\sum_{i,j=1}^{n} x_i q_i a_{ij} g_j(x_j) \leq 2\sum_i q_i(0\vee a_{ii})x_i g_i(x_i) + 2\sum_{i\neq j}|x_i|q_i|a_{ij}|\beta_j x_j \leq$$
$$2\sum_i q_i(0 \vee a_{ii})x_i^2 + \sum_{i\neq j}|x_i|(q_i|a_{ij}|\beta_j + q_j|a_{ji}|\beta_i)|x_j|$$

On en déduit que

$$2\mathbf{X}^T\mathbf{Q}[-\bar{\mathbf{B}}\mathbf{X} + \mathbf{A}\mathbf{g}(\mathbf{X})] \leq [|X_1|, \cdots, |X_n|]\mathbf{H}[|X_1|, \cdots, |X_n|]^T \leq \lambda_{max}(\mathbf{H})|\mathbf{X}|^2$$

Dans le cas où $\lambda_{max}(\mathbf{H}) \geq 0$ on a

$$\lambda_{max}(\mathbf{H})|\mathbf{X}|^2 \leq \frac{\lambda_{max}(\mathbf{H})}{\max_i q_i}\mathbf{X}^T\mathbf{Q}\mathbf{X}.$$

La réponse découle alors de la question 3.

Question 5 (1 point) Que peut-on dire de la stabilité exponentielle de l'équation (6) ?