

Méthodes Mathématiques pour les Neurosciences
Mathematical Methods for Neuroscience
Master MVA et filière Math-Info ENS-Ulm

Olivier Faugeras

Nous présentons dans ce cours quelques outils mathématiques qui interviennent de manière systématique dans de nombreux problèmes de modélisation en neurosciences. Les prérequis sont une bonne connaissance du calcul différentiel et du calcul des probabilités dans le cadre de la théorie de la mesure. Sans trahir la rigueur mathématique, le cours s'efforcera de mettre en valeur l'applicabilité aux neurosciences des concepts présentés.

Le cours sera complété par des séances d'exercices et de programmation sous Scilab, Matlab ou Maple.

We present a number of mathematical tools that are central to modeling in neuroscience. The prerequisites to the course are a good knowledge of differential calculus and probability theory from the viewpoint of measure theory. The thrust of the lectures is to show the applicability to neuroscience of the mathematical concepts without giving up mathematical rigor.

The concepts presented in the lectures will be illustrated by exercise sessions and programming assignments in Scilab, Matlab, or Maple.

Electrophysiologie des neurones : modèles à conductances et leurs réductions, modèles intègre et tire.

Electrophysiology of neurons: conductance models and their reductions, integrate and fire models.

Introduction aux systèmes dynamiques : orbites et portraits de phases, variétés invariantes, équivalence de systèmes dynamiques, classification topologique des équilibres, bifurcations et leurs formes normales topologiques, stabilité structurelle.

Introduction to dynamic systems: orbits and phase portraits, invariant manifolds, equivalence of dynamic systems, topological classification of equilibria, bifurcations and their topological normal forms, structural stability.

Bifurcations : déploiement universel et codimension, le pli, la bifurcation de Hopf, la bifurcation pli d'un cycle limite, la bifurcation de Bogdanov-Takens, la bifurcation de Bautin, la fronce.

Bifurcations: universal unfolding and codimension, the fold, Andronov-Hopf bifurcation, fold bifurcation of limit cycles, Bogdanov-Takens bifurcation, the Bautin bifurcation, the cusp.

Application à l'excitabilité neuronale : neurones de classes 1, 2 et 3, neurones intégrateurs et neurones résonateurs, modulation lente.

Application to neuronal excitability: classes 1, 2 and 3 of neurons, integrators versus resonators, slow modulation.

Le bruit blanc et le mouvement brownien : construction du mouvement brownien, régularité des trajectoires, propriété de Markov. Application à la modélisation du bruit synaptique.

White noise and Brownian motion: construction of the Brownian motion, regularity of the trajectories, Markov property. Application to synaptic noise modeling.

Intégrale stochastique : l'intégrale d'Itô, la formule d'Itô.

The stochastic integral: Itô integral, Itô's formula.

Equations différentielles stochastiques : définitions, existence et unicité de la solution, équations linéaires. Application aux modèles de neurones intègre et tire.

Stochastic differential equations: definitions, existence and uniqueness of the solution, linear equations. Application to integrate and fire models.

Compléments : temps d'arrêts et formules de Feynman-Kac, équation de Fokker-Planck. Application à la description de l'évolution du potentiel de membrane neuronal et des statistiques de trains d'impulsions nerveuses.

Complements: stopping times and Feynman-Kac formulae, Fokker-Planck equation. Application to the time evolution of the membrane potential and the statistics of spike trains.

Bibliographie sommaire :

A few references:

Wulfram Gerstner et W. Kistler, Spiking neuron models, Cambridge University Press, 2002.

Yuri A. Kuznetsov, Elements of applied bifurcation theory.

Eugène Izhikevich, Dynamical systems in neuroscience: the geometry of excitability and bursting, MIT Press, 2006.

Jean-Pierre Françoise, Oscillations en biologie, Springer, 2000.

Lawrence C. Evans, An introduction to stochastic differential equations, <http://math.berkeley.edu/~evans/SDE.course.pdf>

Jean-François Le Gall, Mouvement brownien et calcul stochastique, <http://www.dma.ens.fr/~legall/DEA96.pdf>

Date et lieu des cours et des TPs :

When and where:

Les cours et les TPs ont lieu à l'Ecole Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm, Paris Vème, salle R, passage Rouge.

Lectures and problem sessions will be given at Ecole Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm, Paris Vème, salle R, passage Rouge.

| | |
|-------------|-----------------------------|
| 3/10 cours | 13h30-16h30, TP 16h45-18h45 |
| 10/10 cours | 13h30-16h30, TP 16h45-18h45 |
| 17/10 cours | 13h30-16h30, TP 16h45-18h45 |
| 24/10 cours | 13h30-16h30 |
| 14/11 cours | 13h00-16h00 |
| 15/11 | TP 16h45-18h45 |
| 21/11 cours | 13h30-16h30, TP 16h45-18h45 |
| 28/11 cours | 13h00-16h00 |
| 30/11 | TP 16h45-18h45 |
| 5/12 examen | 13h30-16h30 |