Théorie des jeux

Odile Pourtallier

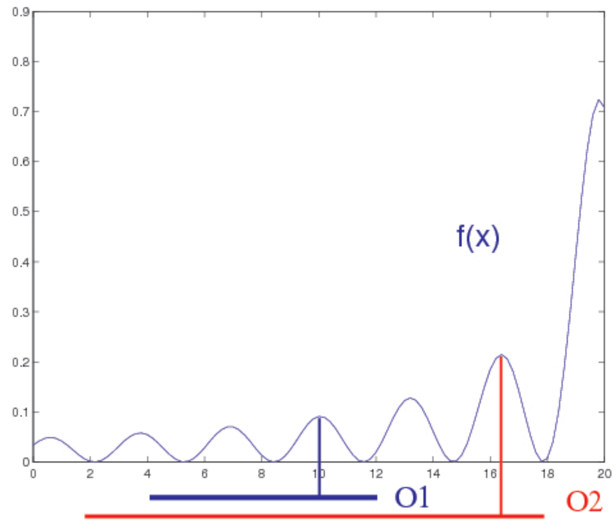
INRIA Sophia Antipolis Méditerranée

odile.pourtallier@inria.fr

Mastère OSE, Novembre 2017

Une propriété d'optimisation

Supposons que $\Omega_1 \subset \Omega_2$, alors, pour toute fonction réelle f définie sur Ω_2 on a



$$\max_{x \in \Omega_1} f(x) \leq \max_{x \in \Omega_2} f(x)$$

Le maximum d'une fonction peut être amélioré en élargissant l'ensemble sur lequel on fait la maximisation. Il ne peut être détérioré.

Exemple 1 : réseau

(télécom, routier, électrique)

- Objectif : routage (véhicules, données, électricité...) dans un réseau de façon à minimiser/maximiser un critère donné.
  Exemple : minimiser le temps de transport d'un lieu à un autre.
- Propriété précédente :
  "Ajouter une route à un réseau routier ne peut pas conduire à une augmentation du temps de transport"

Néanmoins les exemples suivants semblent contredire l'assertion précédente

NYTimes 25/12/1990 : What if They Closed 42d Street and Nobody Noticed?

www.nytimes.com/1990/12/25/health/what-if-they-closed-42d-street-and-nobody-noticed.html

ON Earth Day this year, New York City's Transportation Commissioner decided to close 42d Street, which as every New Yorker knows is always congested. "Many predicted it would be doomsday," said the Commissioner, Lucius J. Riccio. "You didn't need to be a rocket scientist or have a sophisticated computer queuing model to see that this could have been a major problem."

But to everyone's surprise, Earth Day generated no historic traffic jam. Traffic flow actually improved when 42d Street was closed.

I. Une propriété d'optimisation

En 1969, la ville de Stuttgart a entrepris un énorme projet d'investissement au centre ville, prés de Schlossplatz, afin de réduire les embouteillages. Néanmoins, le projet n'a pas donné les résultats attendus.

Une route nouvellement construite a dû être fermée pour améliorer le trafic

W. Knödel, *Graphentheoretische Methoden und ihre Anwerdungen,* Springer, Berlin, 1969.

Exemple connu sous le vocable de **Paradoxe de Braess**

Comment l'expliquer ?

I. Une propriété d'optimisation

Le temps, T_i de parcours de l'automobiliste i dépend de **son choix** r_i, mais aussi du choix des autres automobilistes $r_1, r_2, \cdots, r_N$.

- **Chaque automobiliste** prend sa décision de façon indépendante sur la base de l'état de la circulation c.à.d sur la base des choix des autres automobilistes.
- **Chaque automobiliste** i cherche à minimiser son temps de parcours, c.à.d la solution du problème :

$$\forall i = 1, \cdots N, \qquad \min_{r_i} T_i(r_1 \cdots, r_i, \cdots r_N)$$

On a N **problèmes interdépendants.**

Dans une vision "optimisation", les décisions sont prises par un unique agent.
La prise de décision est centralisée.

Le problème à résoudre serait du type :

$$\min_{r_1, r_2, \ldots, r_N} \sum_{i=1}^{N} T_i(r_1, \cdots, r_N) = \min_{r_1, r_2, \ldots, r_N} T_G(r_1, \cdots, r_N)$$

Minimiser un temps global/moyen de parcours.

Théorie des jeux :
Etude des situations d'interactions entre des agents ayant chacun un objectif (critère) propre.

- Peut on centraliser le processus de décision (modélisation du problème) ?
- Quels comportements dans le cas décentralisé (non coopératif) ?
  $\longrightarrow$ Théorie des jeux non coopératifs
- Quelles incitations pour joindre un groupement ? (accords de coopération)
- Comment aggréger les préférences des agents ?
  $\longrightarrow$ Théorie du choix social (systèmes de vote)
- Comment partager les bénéfices générés par une coopération ?
  $\longrightarrow$ Théorie des jeux coopératifs

■ Travaux fondateurs :

- 1944, von Neumann, Morgenstern, *Theory of games and economic behavior*
- 1950, Shapley, *Cooperative games*
- 1951, J.Nash, *Non cooperative games*
- 1945, R. Isaacs, *Differential game*

■ Bonne source de prix Nobel !

- 1994, **John Harsanyi, John Nash, Reinhard Selten** : Équilibres pour les jeux non coopératifs,
- 2005, **Thomas Schelling, Robert Aumann** : Théorie de la décision interactive
- 2007, **Leonid Hurwicz, Eric Maskin, Roger Myerson** : Utilisation de la théorie des jeux dans l'analyse du fonctionnement des marchés.
- 2012, **Lloyd Shapley, Alvin Roth** : Méthodes d'assignation optimale
- 2014 **Jean Tirole** : Analyse de la puissance du marché et de la régulation

Jeu sous forme normale (stratégique)

■ Jeu non coopératif sous forme normale

C'est la donnée des éléments suivants:

- Un ensemble de joueurs (agents) $\{J_i, i \in \mathcal{I} = \{1, 2, 3, \ldots, I\}\}$
- Pour $J_i,\ i \in \mathcal{I}$, un ensemble U_i de stratégies, actions, choix....
- Pour $J_i,\ i \in \mathcal{I}$, une fonction d'évaluation (ou fonction d' utilité, critère, coût, paiement...),

$$\varphi_i : (U_1 \times U_2 \ldots \times U_I) \longrightarrow I\!R,$$

que J_i veut maximiser ou minimiser.

Exemples

- **Modèle d'oligopole de Cournot.**
  I firmes (joueurs)cherchent à déterminer la quantité de biens qu'elles doivent chacune produire (stratégie) afin de maximiser leurs bénéfices individuels (critère).
  Interaction : le bénéfice d'une firme, dépend de son choix propre, mais aussi de celui des autres par l'intermédiaire du prix de vente du bien sur le marché.

- **Routage dans un réseau.**
  Chaque usager (joueur) cherche à minimiser son temps de transport (critère)en choisissant au mieux son itinéraire (stratégie).
  Interaction : son temps de transport dépend de son itinéraire, mais aussi des choix des autres usagers via l'encombrement du réseau.

- **Gestion d'une ressource renouvelable (poissons, bois...)**
  Un ensemble d'agents (joueurs) exloitent une ressource renouvellable. Ils doivent choisir le taux d'exploitation de la ressource (stratégie) afin de maximiser leur revenus (critère).
  Interaction : Si la somme des taux d'exploitation est haute (supérieure au taux de renouvèlement de la ressource) le stock va se raréfier et les revenus (hauts dans un premier temps) vont baisser.

- **Election** Une fois le mode du scrutin établi (suffrage direct/indirect, choix des électeurs, nombre de tours, des circonscriptions....), chaque électeur (joueurs)décide de son vote (stratégie) afin de maximiser sa satisfaction (critère)concernant l'issue du vote.

- **Prix de l'électricité sur un marché spot.** Les agents (producteurs, traders) (joueurs)font des offres de type "quantité - prix" (stratégie) sur les marché spot d'électricité. Le prix de fixing, ainsi que les offres honorées dépendent de la demande ainsi que de l'ensemble de toutes les offres faites sur ce marché.
  Interaction : prix fixé à partir de l'aggrégation de toutes les offres sur le marché.

Cas particuliers : jeux matriciels

- Si $U_i,\ i \in \mathcal{I} = \{J_1, \cdots, J_I\}$ sont des ensembles finis, on parle de jeu fini.
- Si de plus $I = 2$, on peut représenter le jeu par sa matrice de jeu A :

Si $U_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et $U_2 = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$

alors A est la matrice $n \times m$ définie par

$$A_{i,j} = (\varphi_1(x_i, y_j), \varphi_2(x_i, y_j))$$

On parle de jeu matriciel.

III. Jeu sous forme normale

Joueur 2 (min/max)

Joueur 1 (min/max)

Stratégies J1 $\downarrow$ J2 $\rightarrow$	x_1	x_2	$\cdots \quad x_j \quad \cdots$	x_{n_1}
y_1	.,.	.,.	.,.	.,.
$\vdots$ y_j $\vdots$	.,.	.,.	$\varphi_1(y_i, x_j)$, $\varphi_2(y_i, x_j)$	.,.
y_{n_2}	.,.	.,.	.,.	.,.

- **Exemple:** Le dilemme du prisonier (Luce and Raifa, 1957)

Paul et Quentin sont suspectés d'un crime et sont interrogés séparément.

Si les deux avouent ils sont tous les deux condamnés à 10 ans de prison.
Si l'un avoue le crime tandis que l'autre nie, celui qui a avoué écope de 20 ans de prison tandis que l'autre est libéré.
Si les deux nient ils sont tous les deux condamnés à 15 ans.

Paul (min)

Quentin (min)

	Avoue	Nie
Avoue	10,10	20,0
Nie	0,20	15,15

IV. Solution d’un jeu

Solution d’un jeu :

Sous ensemble de profile de stratégies (une par joueur) vérifiant certaines propriétés.

Quelles sont les bonnes propriétés ?

Stratégie dominée - Stratégie dominante

- **Exemple** : vaccination contre la grippe ?

Stratégies de la population { vaccination, pas de vaccination}
Stratégies du virus {mutation , pas de mutation }

La mutation rend le vaccin inopérant.
Évaluation pour la population : taux de grippes graves (à minimiser)

Population

Virus

	vaccination	pas de vaccination
pas de mutation	x , 1%	x , 2%
mutation	x , 2%	x , 2%

IV. Solution d'un jeu

Si les autorités sont rationnelles (et ne prennent en compte que le critère “santé”), elles rendront la vaccination obligatoire. La population est dans tous les cas mieux protégée. La stratégie "pas de vaccination" est dite dominée par la stratégie "vaccination".

- **Autre exemple:**

Joueur 2 (max)

Joueur 1 (max)

	a	b	c	d
A	(1,3)	(3,2)	(2,4)	(0,8)
B	(2,1)	(4,2)	(3,6)	(3,5)
C	(1,0)	1,1)	(0,5)	(2,2)

Si J_1 est rationnel, il ne choisira jamais sa stratégie A. Ses performances sont meilleures avec B qu'avec A, quoi que fasse J_2.
La stratégie A peut donc être éliminée des choix possibles de J_1.
On dit que A est une stratégie dominée (ici par la stratégie B).

La stratégie B domine la stratégie C. On dit que B est une stratégie dominante. C'est la meilleure stratégie pour le critère donné.

■ **Définitions :**

Une stratégie $A \in U_i$ du joueur i, (maximiseur) **domine (faiblement)** sa stratégie $B \in U_i$ si quel que soit le comportement des autres joueurs, les performances de i sont meilleures (**ou identiques**) avec A qu'avec B" :

$$\varphi_i(A, \mathbf{X}_{-i}) > \varphi_i(B, \mathbf{X}_{-i}), \quad \forall \mathbf{X}_{-i} \in \mathbf{U}_{-i}$$

$$(\varphi_i(A, \mathbf{X}_{-i}) \geq \varphi_i(B, \mathbf{X}_{-i}), \quad \forall \mathbf{X}_{-i} \in \mathbf{U}_{-i} \quad \text{et au moins 1 stricte })$$

Une stratégie A du joueur i est **dominante (strictement/faiblement)** si elle domine (strictement/faiblement) toutes les autres stratégies de ce joueur.

$$\varphi_i(A, \mathbf{X}_{-i}) \quad > \quad \varphi_i(X_i, \mathbf{X}_{-i}), \quad \forall X_i \in U_i, \ \forall \mathbf{X}_{-i} \in \mathbf{U}_{-i}$$
$$(\geq) \quad \text{et au moins 1 stricte}$$

Notation : $X_{-i} = (X_1, \cdots X_{i-1}, X_{i+1}, \cdots X_I)$,
$(A, X_{-i}) = (X_1, \cdots X_{i-1}, A, X_{i+1}, \cdots X_I)$;

■ Choix des joueurs :

Un joueur ne choisit pas une stratégie dominée,
Si un joueur a une stratégie dominante, l'adopter est rationnel.

La stratégie "vaccination" domine la stratégie "pas de vaccination".

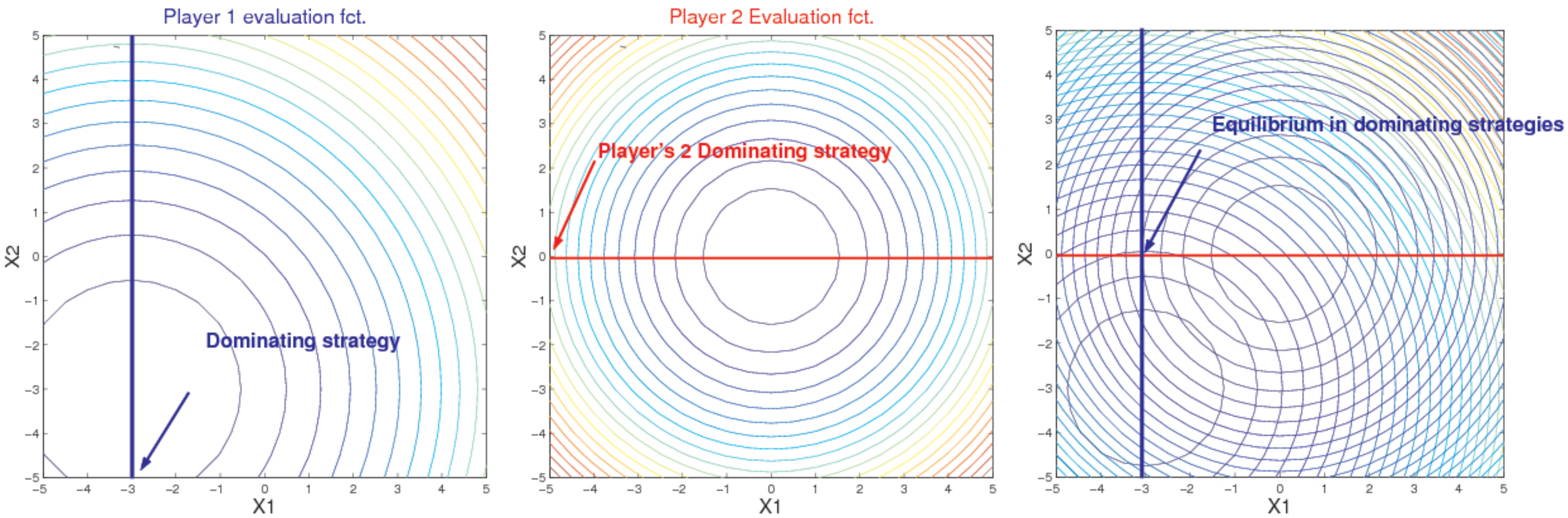
L'analyse des stratégies dominantes fournit une réponse à la question.

Équilibre en stratégies dominantes

Une issue $(X_1^d, \cdots, X_I^d)$ est un **équilibre en stratégies dominantes**, si pour tout joueur J_i, X_i^d est une stratégie dominante de J_i.

Graphiquement pour deux joueurs:

$$\varphi_1 = -(X_1+3)^2 - (X_2+3)^2 \text{ et } \varphi_2 = -X_1^2 - X_2^2$$



Propriété

Si $(X_1^d, \cdots, X_I^d)$ est un équilibre en stratégies dominantes, alors aucun joueur ne gagne en modifiant sa stratégie : Pour tout J_i, toute stratégie $Y \neq X_i^d$ de J_i.

$$\varphi_i(X_1^d, \cdots, X_I^d) \geq \varphi_i(X_1^d, \cdots, X_{i-1}^d, Y, X_{i+1}^d, \cdots, X_I^d).$$

- **Exemple 1 : dilemne du prisonnier**

Paul (min)

Quentin (min)

	Avouer	Nier
Avouer	10,10	20,0
Nier	0,20	15,15

Pour les deux joueurs “Nier” est une stratégie dominante, et (Nier,Nier) est donc un équilibre en stratégies dominantes.

■ Exemple 2 : Enchère de Vickrey ou "au second prix"

Enchère sous pli fermé où le bien (indivisible) est attribué au plus offrant mais au prix donné par le deuxième plus offrant.

Pour un enchérisseur, la stratégie qui consiste à miser la valeur (subjective) qu'il attribue au bien est une stratégie dominante.

Preuve :
Notations : on note N le nombre de participants à la vente et pour tout participant i, v_i la valeur subjective du bien pour ce participant et p_i l'enchère qu'il fait. On peut bien sûr avoir $p_i \neq v_i$.

Le gain de l'acheteur k qui remporte l'objet (c.à.d celui qui propose le prix le plus haut) est donné par :

$$\varphi_k(p_1, \cdots, p_N) = v_k - prix.paye = v_k - \max_{i \neq k} p_i.$$

Pour les autres le gain est nul. Ils ne gagnent ni ne perdent rien.

On cherche à montrer que la stratégie du joueur J_i qui consiste à faire l'enchère $\overline{s}_i = v_i$ est une stratégie dominante. Pour cela il faut montrer qu'elle domine toute autre stratégie du joueur J_i.

Soit donc une autre stratégie $s'_i \neq v_i$ de J_i, montrons qu'elle est dominée par la stratégie $\overline{s}_i$. Pour cela il faut que pour tout choix $s_{-i} = (s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i, \ldots, s_I)$ des autres joueurs on ait

$$g_i(s_{-i}; \overline{s}_i) \geq g_i(s_{-i}; s_i'). \tag{1}$$

Notons $m_i = \sup_{j \neq i} s_j$. Remarquons que m_i est la plus forte enchère des adversaires du joueur J_i. Si J_i fait une enchère plus haute que m_i il va remporter l'objet, le payer m_i, et son gain sera $v_i - m_i$. Si il fait une enchère plus basse que m_i il ne va pas remporter l'objet, et son gain sera nul. La quantité m_i est donc une quantité importante, dans la mesure où elle détermine complètement le gain du jeu pour le joueur J_i.

I– Considérons d'abord le cas où $s_i' > \overline{s}_i = v_i$.

Ia) Supposons que $m_i > s_i' > v_i$. Le joueur J_i ne remporte pas l'objet ni avec la stratégie s_i', ni avec la stratégie $\overline{s}_i = v_i$. Donc on a des gains nuls dans les deux cas, c'est à dire

$$g_i(s_{-i}; \overline{s}_i) = g_i(s_{-i}; s_i'),$$

donc en particulier l'inégalité (1) est satisfaite.

Ib) Supposons que $s_i' > m_i > v_i$. Dans ce cas le joueur J_i remporte l'objet avec sa stratégie s_i' et son gain est alors

$$g_i(s_{-i}; s_i') = v_i - m_i < 0.$$

Pour la stratégie $\overline{s}_i = v_i$, J_i ne remporte pas l'objet, et donc son gain est nul. On a donc

$$g_i(s_{-i}; \overline{s}_i) = 0 > g_i(s_{-i}; s_i').$$

L'inégalité (1) est donc encore vérifiée.

Ic) Supposons que $s_i' > v_i > m_i$. J_i remporte l'objet avec les deux stratégies, et les gains sont

$$g_i(s_{-i}; \overline{s}_i) = v_i - m_i = g_i(s_{-i}; s_i').$$

L'inégalité (1) est donc encore vérifiée.

II– Considérons maintenant le cas où $s_i' < \overline{s}_i = v_i$.

IIa) Supposons que $m_i > v_i > s_i'$. Dans ce cas le joueur J_i ne remporte l'objet ni avec la stratégie s_i', ni avec la stratégie v_i. Donc on a des gains nuls dans les deux cas, c'est à dire

$$g_i(s_{-i}; \overline{s}_i) = g_i(s_{-i}; s_i') = 0,$$

donc en particulier l'inégalité (1) est satisfaite.

IIb) Si $v_i > m_i > s_i'$. Le joueur J_i remporte l'objet avec sa stratégie $\overline{s}_i = v_i$, et son gain est alors

$$g_i(s_{-i}; \overline{s}_i) = v_i - m_i > 0.$$

Avec sa stratégie s_i' il ne remporte pas l'objet et son gain est alors nul. La relation (1) est vérifiée.

IIc) Si $v_i > s_i' > m_i$. Le joueur remporte l'objet avec les 2 stratégies s_i' et $\overline{s}_i = v_i$, les gains sont

$$g_i(s_{-i}; \overline{s}_i) = v_i - m_i = g_i(s_{-i}; s_i')$$

et l'inégalité (1) est vérifiée.

■ Exemple 3 : sur la vaccination. Suite...

On s'est aperçu que le vaccin peut avoir des effets secondaires graves, avec un taux de survenue de 0.1%. Le jeu se modifie ainsi :

Population

Virus

	vaccination	pas de vaccination
pas de mutation	x ,1.1%	x , 2%
mutation	x , 2.1 %	x , 2 %

On n'a plus de stratégie dominante... et plus de réponse à la question.

Les notions de stratégie dominante, et donc d'équilibre en stratégies dominantes sont des notions trop fortes : il n'y a pas d'existence pour de nombreux jeux.

Il faut donc avoir des notions moins fortes.

Stratégies prudentes (wise - safe)

- Vous devez vous rendre très rapidement dans une ville juste de l'autre coté d'une rivière.
  Deux possibilités :

– Utiliser un vieux pont bélabré mais très bien situé. Il fait gagner beaucoup de temps en l'absence de rafale de vent mais en cas de rafales, c'est la chute assurée !

– Utiliser un pont très moderne, mais situé à plusieurs kilomètres. Le temps, long, sera néanmoins réduit en cas de vent car peu de personnes circulent alors.
Au moment de choisir, vous n'avez pas d'information concernant le vent.

Matrice du jeu :

		Vous	
		Pont solide	Pont délabré
Météo	Rafales	x , 8	x , $+\infty$
	Temps calme	x , 10	x , 1

Qu'allez vous faire ?

On pourrait reécrire l’histoire de la façon suivante :

Joueurs : hasard/population

Pont solide $\rightarrow$ mixte énergie verte, énergie fossile
Pont délabré $\rightarrow$ tout nucléaire
Yes/no $\rightarrow$ accident grave (Tchernobyl, Fukushima) / pas d’accident

Évaluation pour la population : impact environnemental/santé

- **Stratégie prudente :** comportement d'un joueur pessimiste - adverse au risque

Une stratégie x_i^s est dite **prudente** si

Pour un minimiseur J_i, elle minimise la perte maximale possible.

$$\max_{\mathbf{x}_{-i}\in\mathbf{U}_{-i}} \varphi_i(x_i^s, \mathbf{x}_{-i}) = \min_{x_i\in U_i} \max_{\mathbf{x}_{-i}\in\mathbf{U}_{-i}} \varphi_i(x_i, \mathbf{x}_{-i}) = \alpha_i$$

α_i est la perte maximale risquée si J_i adopte la stratégie prudente x_i^s.

Pour un maxmiseur J_i, elle maximise le gain minimal possible.

$$\min_{\mathbf{x}_{-i}\in\mathbf{U}_{-i}} \varphi_i(x_i^s, \mathbf{x}_{-i}) = \max_{x_i\in U_i} \min_{\mathbf{x}_{-i}\in\mathbf{U}_{-i}} \varphi_i(x_i, \mathbf{x}_{-i}) = \beta_i$$

β_i est le gain minimal garanti si J_i adopte la stratégie prudente x_i^s.

Existence :
Tout jeu avec ensemble de stratégies compact et fonction d'évaluation continue a au moins une stratégie prudente pour chaque joueur.
Tout jeu fini a au moins une stratégie prudente pour chaque joueur.

Remarque :
Seule la connaissance de sa propre fonction d'évaluation est nécéssaire pour déterminer ses stratégies prudentes. Il n'est pas nécéssaire de connaitre la fonction d'évaluation des autres joueurs.

Propriété

Soit $\mathbf{x}^s = (x_1^s, x_2^s, \ldots, x_I^s)$ un vecteur de stratégies prudentes pour des maximiseurs,
$(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_I)$ le vecteur des paiements minimaux garantis. $\beta_i = \max_{x_i} \min_{\mathbf{x}_{-i}} \varphi_i(x_i, x_{-i}))$.

Soit $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_I)$ le vecteur des paiements associés au vecteur de stratégies : $\gamma_i = \varphi_i(x_1^s, x_2^s, \ldots, x_I^s)$.

On a

$$\beta_i \leq \gamma_i, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, I.$$

Examples (max)

(5,5)	(1 , 0)
(0 , 1)	(10, 10)

$$\beta_1 = \beta_2 = 1, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 5.$$

■ Exemple

– Dilemme du prisonier : $(Nier)$ est une stratégie prudente pour chacun des joueurs. En Niant les joueurs sont sûrs de ne pas passer plus de 15 ans en prison.....

– "Pierre-Feuille-ciseaux"

	P	F	C
P	(0,0)	(-1 , 1)	(1 , -1)
F	(1,-1)	(0 , 0)	(-1, 1)
C	(-1,1)	(1 , -1)	(0 , 0)

Toutes les stratégies sont prudentes. Le gain minimal garanti est -1.... En utilisant une stratégie prudente, le joueur est sûr de ne pas faire plus mal que ... perdre !

Un modèle économique simple

Monopole :

- Une usine F_1 produit un bien donné en quantité x_1.
- Prix unitaire P du bien dépend de la quantité x du biens présents sur le marché.

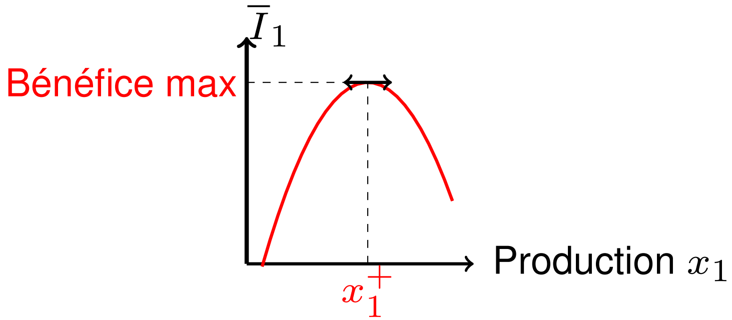
$$P(x) = (A - Bx)$$

- Le coût marginal de production pour l'usine est C,
- Si F_1 a le monopole sur le marché, son bénéfice, $\bar{I}_1(x_1)$, de F_1 est

$$\bar{I}_1(x_1) = (A - Bx_1)x_1 - Cx_1.$$

- **Problème :** déterminer la quantité x_1^+ qui maximise le bénéfice de F_1,

$$x_1^+ \in \arg\max_{x_1 \geq 0} \bar{I}_1(x_1) \qquad \text{(Problème d'optimisation)}$$



- Le niveau de production optimal est $x_1^+ = \frac{1}{2}\frac{A-C}{B}$

et produit le bénéfice

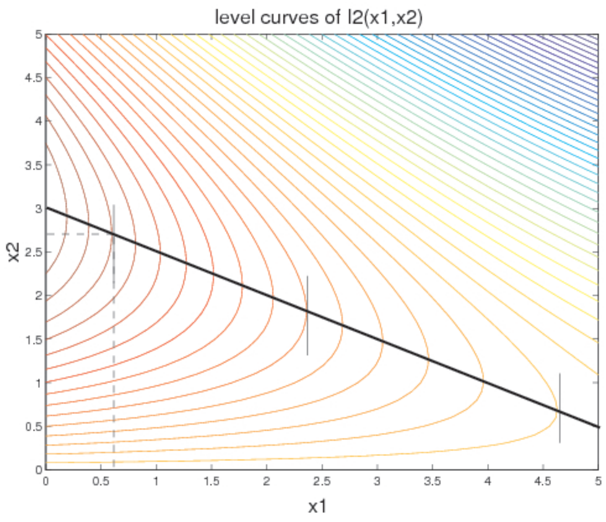
$$\bar{I}_1(x_1^+) = \frac{1}{4}\frac{(A-C)^2}{B}$$

Duopole

- Une nouvelle usine F_2 entre sur le marché. Elle observe la quantité x_1 de biens produits par F_1. Si F_2 produit une quantité x_2, son bénéfice sera

$$I_2(x_1, x_2) = (A - B(x_1 + x_2))x_2 - Cx_2.$$

$\longrightarrow$ Problème : Quelle quantité doit produire F_2 pour maximiser son bénéfice ?



$$x_2^+(x_1) \in \arg\max_{x_2 \geq 0} I_2(x_1, x_2), \Longrightarrow x_2^+(x_1) = \frac{1}{2}\frac{A - C - Bx_1}{B}.$$

Pour $x_1 = x_1^+$ on obtient

$$x_2^+(x_1^+) = x_2^0 = \frac{1}{4}\frac{A-C}{B} \quad \text{et} \quad I_2(x_1^+, x_2^0) = \frac{1}{16}\frac{(A-C)^2}{B}$$

.

La fin de l'histoire ?

NON !

L'introduction par F_2, de la quantité x_2^0 de biens sur le marché a modifié le prix unitaire P du bien sur le marché, et donc le bénéfice de F_1 qui devient

$$\begin{aligned} I_1(x_1^+, x_2^0) &= (A - B(x_1^+ + x_2^0))x_1^+ - Cx_1^+ \\ &= \frac{1}{8}\frac{(A-C)^2}{B} \end{aligned}$$

et

$$\frac{1}{8}\frac{(A-C)^2}{B} < \frac{1}{4}\frac{(A-C)^2}{B} \quad !!!!$$

Si F_1 maintient sa quantité x_1^+ de monopole, son bénéfice est moindre après l'introduction de F_2.
F_1 a-t-elle un meilleur niveau ce production dans cette nouvelle situation ?

- Nouveau problème à résoudre pour F_1:

$$x_1^1 \in \arg\max_{x \geq 0} I_1(x, x_2^0)$$

- Il vient :

$$x_1^1 = \frac{3}{8}\frac{A-C}{B},$$

d'où le nouveau bénéfice de F_1

$$I_1(x_1^1, x_2^0) = \frac{9}{64}\frac{(A-C)^2}{B}, \qquad (\frac{1}{4} > \frac{9}{64} > \frac{1}{8}).$$

Plus faible qu'en monopole, plus haut que précédemment.

F_2 observe la quantité x_1^+ of F_1 s'adapte au mieux ,

$$\rightarrow \quad x_2^0 \in \arg\max_x I_2(x_1^+, x)$$

cela entraine une baisse du bénéfice de F_1.

F_1 observe la quantité x_2^0 de F_2 s'adapte au mieux :

$$\rightarrow \quad x_1^1 \in \arg\max_x I_1(x, x_2^0)$$

cela entraine une baisse du bénéfice de F_2.

$$\vdots$$

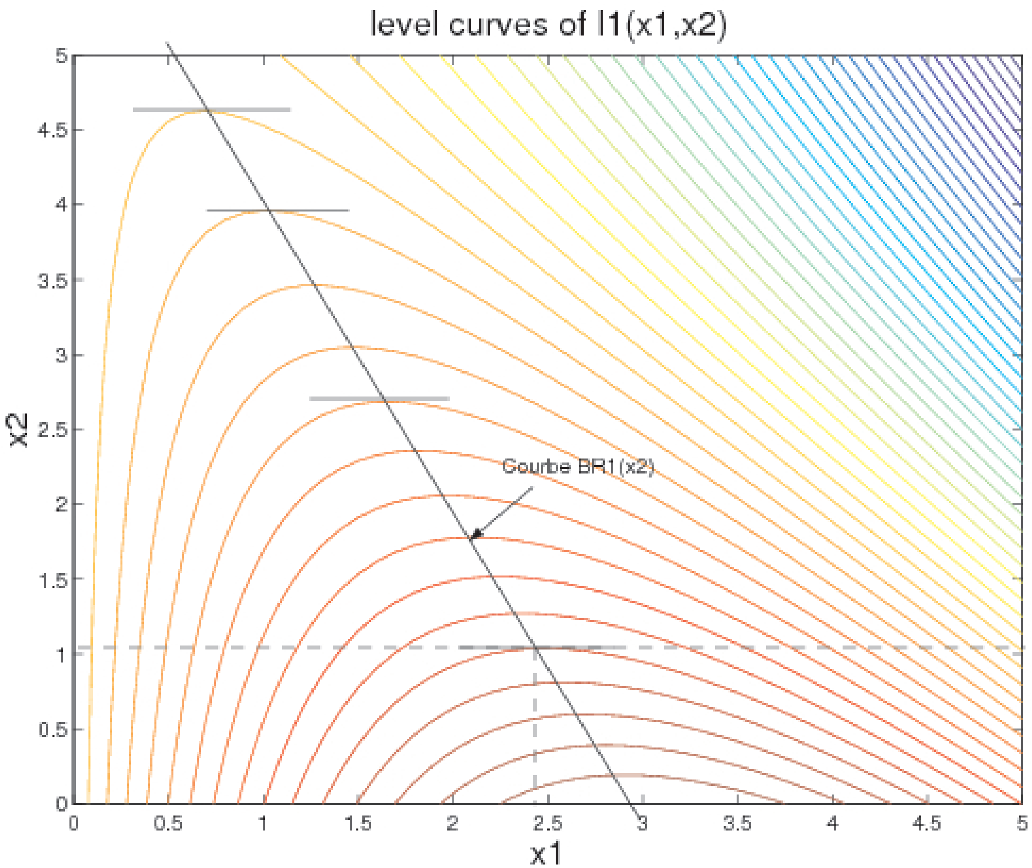
F_2 observe la quantité x_1^n of F_1 et s'adapte au mieux,

$$\rightarrow \quad x_2^n \in \arg\max_x I_2(x_1^n, x)$$

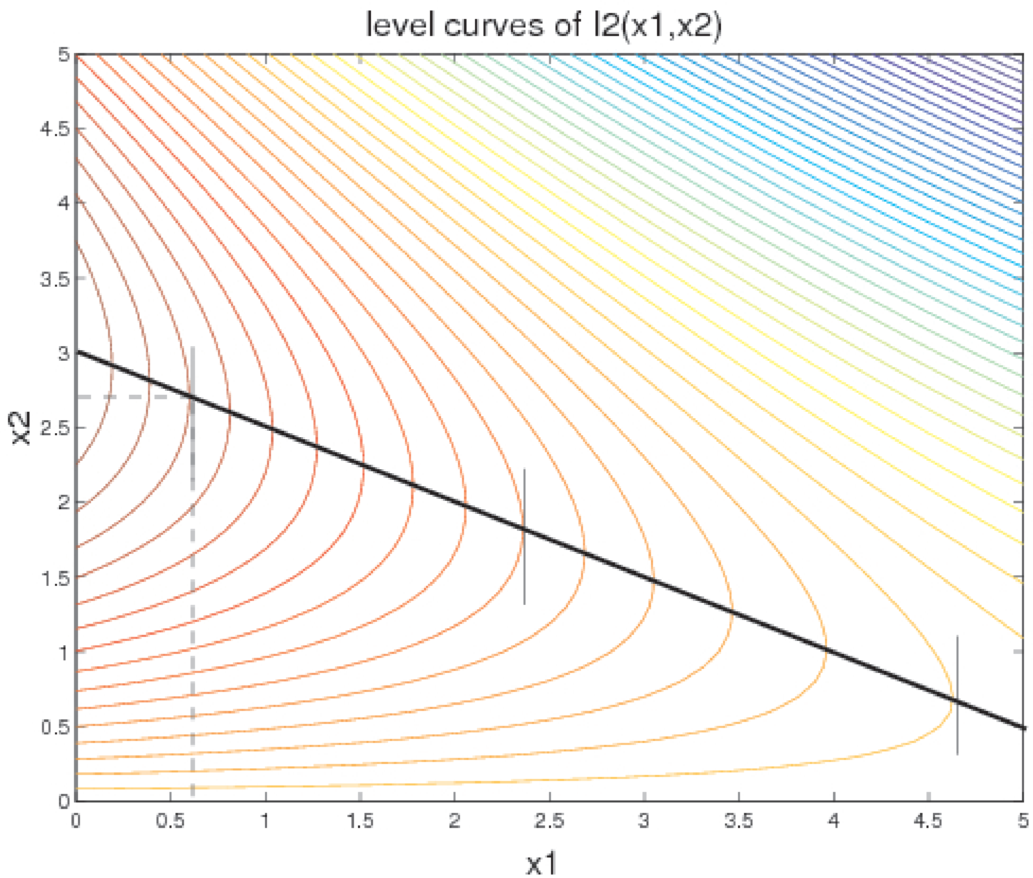
cela entraine une baisse du bénéfice de F_1.

F_1 observe la quantité x_2^{n-1} of F_2 et réagit au mieux,

$$\rightarrow \quad x_1^n \in \arg\max_x I_1(x, x_2^{n-1})\ldots$$



level curves of I1(x1,x2)
Courbe BR1(x2)
x1
x2



level curves of I2(x1,x2)
x1
x2

On observe :

$$x_i^n = \alpha_i^n \frac{A - C}{B},$$

et

	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
α_1^n		0.375	0.343	0.335	0.333	0.333
α_2^n	0.250	0.312	0.328	0.332	0.333	0.333

A la limite, notons :

$$x_1^* = \lim_{n \to +\infty} x_1^n$$

et

$$x_2^* = \lim_{n \to +\infty} x_2^n$$

A la convergence, nous avons :

Les quantités (actions, choix, stratégies) (x_1^*, x_2^*) satisfont

$$\left\{\begin{array}{l} x_1^* \in \arg\max_x I_1(x, x_2^*) \\ \\ x_2^* \in \arg\max_x I_2(x_1^*, x) \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} \partial_1 I_1(x_1^*, x_2^*) = 0 \\ \partial_2 I_2(x_1^*, x_2^*) = 0 \end{array}\right.$$

En d'autres termes,

si F_1 choisit x_1^*, le mieux que F_2 puisse faire est de choisir x_2^*.
x_2^* est la meilleure réaction de F_2 face au choix x_1^* de F_1.

Réciproquement,

Si F_2 choisit x_2^*, le mieux que F_1 puisse faire est de choisir x_1^*.
x_1^* est la meilleure réaction de F_1 face au choix x_2^* de F_2.

L'issue est stable : ni F_1 ni F_2 n'ont intérêt de dévier.

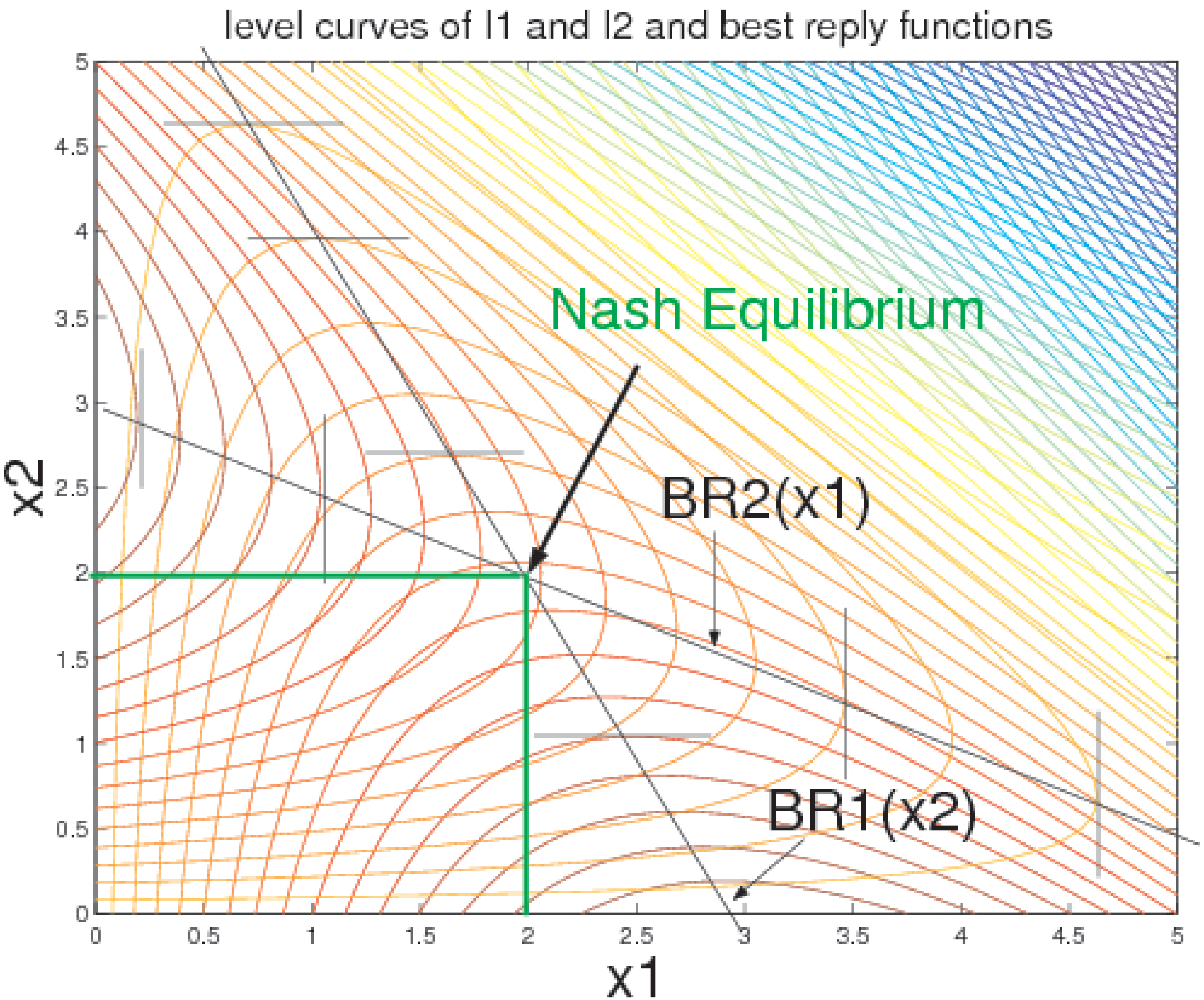
(x_1^*, x_2^*) est un équilibre de Cournot, ou (après 1950) un Equilibre de Nash.

■ Definition

Un profile de stratégies $\mathbf{X} = (\mathbf{X_1^*}, \mathbf{X_2^*}, \ldots, \mathbf{X_I^*})$ est un équilibre de Nash si

$$\begin{cases} X_1^* \in \arg\max_{X \in U_1} \varphi_1(X, X_2^*, \ldots, X_I^*) \\ X_2^* \in \arg\max_{X \in U_2} \varphi_2(X_1^*, X, \ldots, X_I^*) \\ \ldots \\ X_I^* \in \arg\max_{X \in U_I} \varphi_I(X_1^*, X_2^*, \ldots, X) \end{cases}$$

X_i^* est la meilleure startégie de i face aux stratégies X_j^* des autres joueurs.


level curves of I1 and I2 and best reply functions
Nash Equilibrium
BR2(x1)
BR1(x2)
x1
x2
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5

■ Propriétés - cohérence par rapport aux notions précédentes

Si $\mathbf{X}^d = (X_1^d, X_2^d, \ldots, X_I^d)$ est un vecteur de stratégies dominantes alors $\mathbf{X}^d$ is un équilibre de Nash.

Soit un équilibre de Nash $\mathbf{X}^* = (X_1^*, X_2^*, \ldots, X_I^*)$ (pour maximiseurs),
Soit $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_I)$ le vecteur des gains associés :

$$\mu_i = \varphi_i(X_1^*, X_2^*, \ldots, X_I^*)$$

Soit $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_I)$ les gains minimaux garantis :

$$\beta_i = \max_{X_i} \min_{X_{-i}} \varphi_i(X_i, X_{-i}).$$

Alors

$$\beta_i \leq \mu_i, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, I.$$

Cohérence par rapport au processus d'élimination des stratégies dominées

- **Exemple**

Joueur 2 (max)

Joueur 1 (max)

	a	b	c	d
A	(1,3)	(3,2)	(2,0)	(0,1)
B	(2,1)	(4,2)	(3,6)	(1,7)
C	(1,1)	(7,3)	(4,5)	(2,2)

Pour J_2 : pas de stratégie dominante ni dominée. Pour J_1: B domine strictement A.
Si J_1 est rationnel il ne va pas choisir A

Si J_2 est rationnel, et si J_2 sait que J_1 est rationnel, il sait que J_1 ne choisira pas A.
J_2 peut donc considérer le jeu suivant :

Joueur 2 (max)

Joueur 1 (max)

	a	b	c	d
B	(2,1)	(4,2)	(3,6)	(1,7)
C	(1,1)	(7,3)	(4,5)	(2,2)

et constater qu'il a deux stratégies dominées, a et b, qu'il peut donc éliminer.

Si J_1 est rationnel,
si J_1 sait que J_2 est rationnel,
si J_1 sait que J_2 sait que J_1 est rationnel,
si J_2 sait que J_1 sait que J_2 sait que J_1 est rationnel,
Alors ils peuvent considérer le jeu suivant :

Joueur 2 (max)

Joueur 1 (max)

	c	d
B	(3, 6)	(1,7)
C	(4, 5)	(2,2)

Si J_2 sait que J_1 sait que....

Le processus converge, et sous l'hypothèse que la rationalité est une information publique, les joueurs adoptent les stratégies C pour J_1 et c pour J_2, ce qui leur donnent respectivement les paiements 4 et 5.

Joueur 2 (max)

Joueur 1 (max)

	a	**b**	**c**	**d**
A	(1,3)	(3,2)	(2,0)	(0,1)
B	(2,1)	(4,2)	(3,6)	1,7)
C	(1,1)	(7,3)	(4,5)	(2,2)

L'issue (C, c) est un équilibre de Nash du jeu.

- Le **processus d'élimination des stratégies strictement dominées** consiste à éliminer de façon itérative les stratégies strictement dominées des joueurs.
- Si ce processus converge vers une unique issue, on dit que le jeu est soluble par élimination des stratégies strictement dominées.
- Si le jeu est soluble, on obtient une issue stable (Équilibre de Nash)
- Si le jeu est soluble, quel que soit l'ordre dans lequel on élimine les stratégies **strictement** dominées, on obtient le même équilibre.

Attention : On perd l'indépendance par rapport à l'ordre d'élimination si on élimine les stratégies faiblement dominées. Exemple :

Joueur 2 (max)

Joueur 1 (max)

	a	**b**	**c**
A	(1,2)	(2,3)	(2,3)
B	(2,2)	(2,1)	(3,2)
C	(2,1)	(0,0)	(1,0)

Si on commence par J_1 il reste les stratégies B et C pour J_1, et a pour J_2
Si on commence par J_2 il reste les stratégies B pour J_1, et a pour J_2

- **Remarque :** Information nécessaire au le joueur i :
  pour éliminer une stratégie dominée : sa fonction d'évaluation, pour utiliser le processus d'élimination successives des stratégies dominées : les fonctions d'évaluation de tous les joueurs.

■ Récréation basée sur l'information publique de la rationalité

Dans un monastère vivent un certain nombre de moines. Les règles dans ce monastère sont trés strictes, les moines ne doivent pas se parler, et ils ne se voient qu'une seule fois par jour lors du déjeuner, ils n'ont ni vitre ni miroir. Une maladie, non contagieuse, et dont le seul symptome est un point rouge sur le frond sévit dans la région.

Un jour une ambulance spécialisée pour le traitement de cette maladie vient stationner devant le couvent.

Il ne se passe rien le premier jour, ni le deuxième ni le troisième. L'ambulance est toujours là.

Au bout du 50 ème jour des moines malades sortent pour voir les médecins. Combien y en a t il ?

- 1 jour: Il y a au moins un malade, sinon l'ambulance ne serait pas là.
  S'il n'y avait qu'un unique malade, celui ci ne verrait aucun malade, et saurait donc qu'il est malade. Le premier jour, un moine sortirait donc pour aller se faire soigner.

  S'il ne se passe rien le premier jour, c'est qu'il y a plus d'un malade.

- 2-ième jour: Il y a au moins 2 malades. S'il n'y en a que 2, alors chaque malade verrait uniquement un malade, et en déduierait qu'il est aussi malade. 2 moines sortieraient le 2 ème jour pour se faire soigner.

  S'il ne se passe rien le deuxième jour, c'est qu'il y a plus de 2 malades.

...

- n-ième jour : il y a au moins n malades (sinon n-1 moines seraient sortis la veille).
  S'il y en a n, les n moines malades connaissent exactement n-1 autres malades.
  Les n malades sortieraient donc le jour n.

...

- 50-ième jour: comme il ne s'est rien passé la veille, les moines qui connaissent exactement 49 malades en déduisent qu'ils sont 50 à être malades et sortent.

Tout le monde savait qu'il y avait des malades au couvent. L'ambulance n'apprend rien à personne, mais rend publique l'information. Tout que tout le monde sait, il ne se passe rien. Le fait que les moines sortent découle du fait que tout le monde sait que tout le monde sait que tout le monde sait....

■ Conclusion (?)

Quand il existe, l'equilibre de Nash est une issue raisonnable du jeu $\rightarrow$ Solution du jeu

- C'est un équilibre. Aucun joueur ne souhaite unilatéralement en dévier.
- Le gain de chaque joueur (maximiseur) est au moins égal au gain minimal garanti.
- Une équilibre en stratégies dominantes est un équilibre de Nash.

.

OUI Mais...

Inefficience de l'équilibre de Nash

- **Retour sur le problème des 2 firmes :** Décisions prises par une société mère.

Elle choisirait x_1 et x_2, afin de maximiser $I_1((x_1, x_2) + I_2(x_1, x_2))$.

$\longrightarrow$ Problème : Déderminer la paire $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ solution de

$$\max_{x_1,x_2}(I_1(x_1, x_2) + I_2(x_1, x_2)) = \max_{x_1,x_2} P(x_1 + x_2)(x_1 + x_2) - C(x_1 + x_2).$$

$\longrightarrow$ Solution : toute paire $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$, telle que $\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = \frac{1}{2}\frac{A-C}{B}$ le bénéfice total est

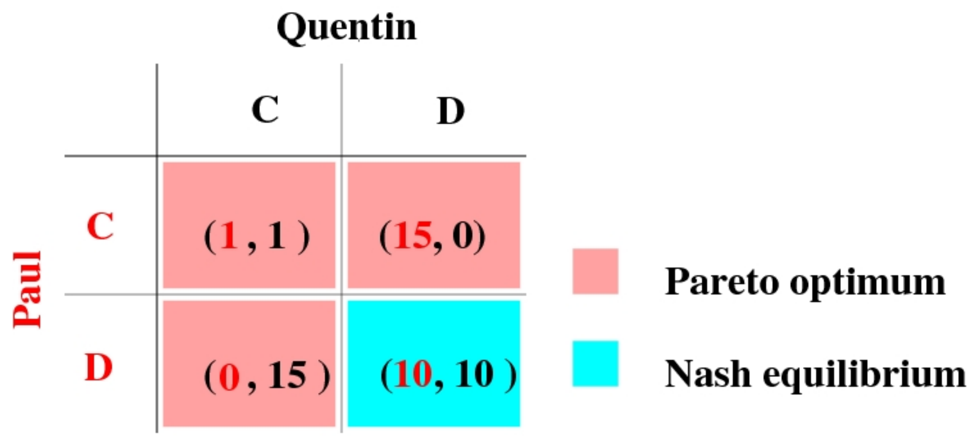
$$\tilde{I} = I_1(\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2) + I_2(\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2) = \frac{1}{4}\frac{(A-C)^2}{B} \geq \frac{2}{9}\frac{(A-C)^2}{B}$$

La centralisation des décisions (un unique décideur) permet d'augmenter le bénéfice total des usines par rapport à la situation où les deux usines prennent leurs décisions de façon indépendante (deux décideurs).

Coopération ?

Utiliser un shémas de décisions centralisées (aggrégation des agents), partager les bénéfices ? (microsoft/apple !!!????)

- **Retour sur le dilemme du prisonier**



Non-monotomnie de l'équilibre de Nash

Paul \ Quentin	C	D
C	(1, 1)	(15 , 5)
D	(5 , 15)	(20 , 20)

Un accroissement des fonctions d'évaluation (ici des règles de la punition) ne conduit pas nécessairement à un accroissement des évaluations à l'équilibre.

60 **VI.** Plus sur les équilibres de Nash.

Quentin

Paul		**C**	**D**	**E**
	C	(1 , 1)	(15, 0)	(15, 0)
	D	(0 , 15)	(10, 10)	(15, 5)
	E	(0 , 15)	(5 , 15)	(11, 11)

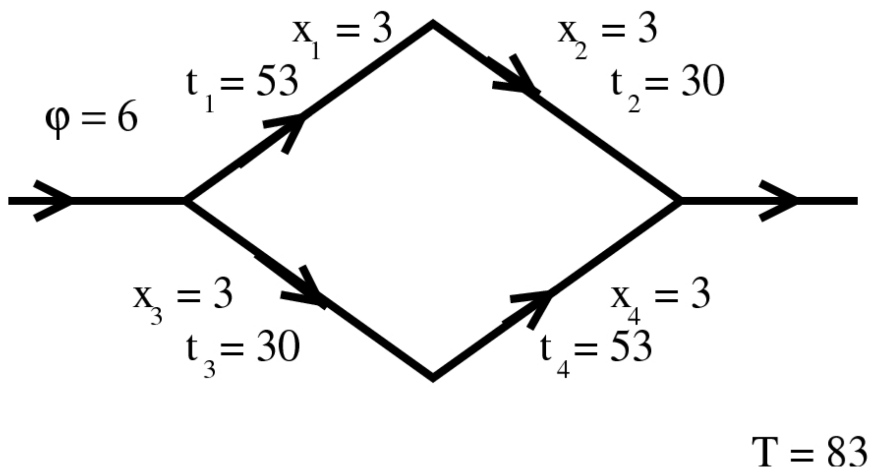
Nash in old game

Nash in new game

Augmenter les ensembles de stratégies (laisser plus de choix aux agents), peut conduire à la déterioration de la situation de tous !

C'est cela qui expliue le paradoxe de Braess Paradox (voir slide 2)

- Un modèle simple de jeu dans un réseau

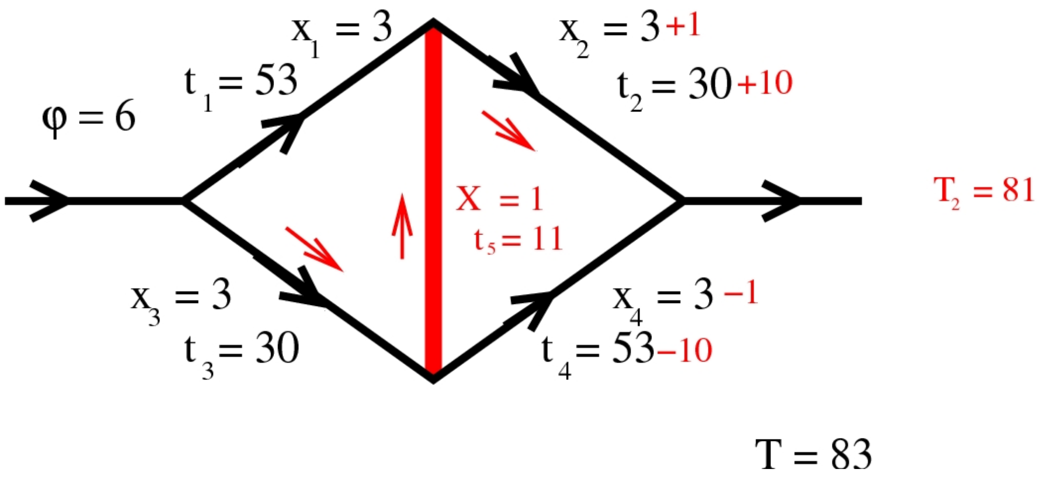


$$
\begin{aligned}
t_1(x_1) &= 50 + x_1\\
t_2(x_2) &= 10x_2\\
t_3(x_3) &= 10x_3\\
t_4(x_4) &= 50 + x_4
\end{aligned}
$$

Equilibre: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 3$
Le temps de parcours pour les chemins (L_1L_2) et (L_3L_4) est 83.

Un lien transversal L_5 est ajouté, avec un temps de parcours donné par la fonction $t_5(x_5) = 10 + x_5$.

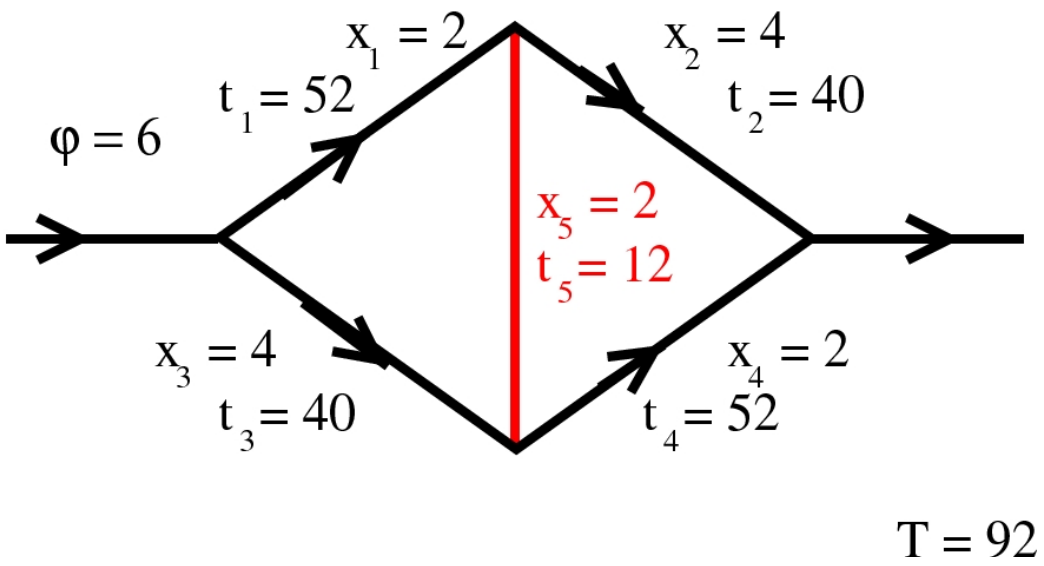
$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 3$ n'est plus un équilibre car si un utilisateur dévie du chemin (L_3L_4) pour choisir $(L_3L_5L_2)$ son temps de parcours devient 81. C'est donc une déviation favorable.



$$t_1(x_1) = 50 + x_1, \quad t_2(x_2) = 10x_2, \quad t_3(x_3) = 10x_3, \quad t_4(x_4) = 50 + x_4, \quad t_5(x_5) = 10 + x_5.$$

Un nouvel équilibre se forme $x_1 = 2, \ x_2 = 4, \ x_3 = 4, \ x_4 = 2, \ x_5 = 2.$

et les nouveaux temps de parcours de chaque chemin sont $92 > 83$!.



L'ajout d'un lien a conduit à une détérioration pour chaque usager !

$$t_1(x_1) = 50 + x_1, \quad t_2(x_2) = 10x_2, \quad t_3(x_3) = 10x_3, \quad t_4(x_4) = 50 + x_4, \quad t_5(x_5) = 10 + x_5.$$

Non-unicité de l'équilibre de Nash

- **Exemple 1** Chacun des 2 joueurs choissent simultatément un nombre de 1 à 4.
  Si ils ont choisi le même nombre, ils recoivent chacun 10 fois ce nombre.
  Ils ne reçoivent rien dans tous les autres cas.

J_2 (max)

J_1 (max)

	1	2	3	4
1	(10,10)	(0,0)	(0,0)	(0,0)
2	(0,0)	(20,20)	(0,0)	(0,0)
3	(0,0)	(0,0)	(30,30)	(0,0)
4	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(40,40)

4 équilibres de Nash : $(1,1),\ (2,2),\ (3,3),\ (4,4)$.
Si les joueurs sont rationnels ils choisissent l'équilibre $(4,4)$.

■ La bataille des sexes

		Lucie	
		T	O
Paul	T	(12 , 5)	(4 , 4)
	O	(3 , 3)	(5, 12)

Nash Equilibrium

Ici 2 équilibres non équivalents, pas d'équilibre dominant.

L'équilibre de Nash n'existe pas toujours.

- **Feuille, Pierre, ciseaux :**

Paul \ Quentin	P	K	S
P	(0 , 0)	(0 , 1)	(1 , 0)
K	(1 , 0)	(0 , 0)	(0 , 1)
S	(0 , 1)	(1 , 0)	(0 , 0)

Exemple recapitulatif...

Joueur 2

Joueur 1

	A	B	C	D
a	$8, 5$	$3, 2$	$0, 1$	$5, 3$
b	$6, 2$	$5, 3$	$4, 0$	$5, 1$
c	$0, 6$	$2, 6$	$0, 8$	$5, 7$
d	$1, 8$	$6, 8$	$1, 4$	$6, 3$
e	$1, 5$	$0, 6$	$0, 1$	$9, 0$

■ Elimination des stratégies dominées

Premier tour : pour J_1 : c est strictement dominée par d- pas de stratégie dominée pour J_2

Sous information publique de rationnalité des joueurs et des gains des joueurs, on peut se limiter au jeu suivant :

Joueur 1 \ Joueur 2	A	B	C	D
a	$8, 5$	$3, 2$	$0, 1$	$5, 3$
b	$6, 2$	$5, 3$	$4, 0$	$5, 1$
d	$1, 8$	$6, 8$	$1, 4$	$6, 3$
e	$1, 5$	$0, 6$	$0, 1$	$9, 0$

Deuxième tour : Pour J_2 : B domine strictement C, et A domine strictement D ;

Joueur 1 \ Joueur 2	A	B
a	$8, 5$	$3, 2$
b	$6, 2$	$5, 3$
d	$1, 8$	$6, 8$
e	$1, 5$	$0, 6$

Troixième tour : Pour J_1 : a et b dominent strictement e

		Joueur 2	
		A	B
Joueur 1	a	$8, 5$	$3, 2$
	b	$6, 2$	$5, 3$
	d	$1, 8$	$6, 8$

Il n'y a plus de stratégie dominée, ni pour J_1 ni pour J_2. Le processus d'élimination ne peut aller plus loin.

■ Stratégies prudentes

C'est la stratégie du pessimiste : regarde ce que les autres peuvent lui faire de pire, se prémunit (par son choix) des pires issues.

		Joueur 2	
		A	$\boxed{B}$
Joueur 1	a	8, 5	3, 2
	$\boxed{b}$	6, 2	5, 3
	d	1, 8	6, 8

Joueur 1 : Avec a il obtient au pire 3 ; avec b, au pire 5 ; avec d, au pire 1 .
$\max\{3, 5, 1\} = 5$. La stratégie prudente de J_1 est b.
En choisissant b, J_1 est sûr d'avoir au moins 5 (la valeur minimale garantie).

Joueur 2 : Avec A il obtient au pire 2; avec B, au pire 2.
$\max\{2, 2\} = 2$. Deux stratégies prudentes pour J_2 : A et B. Elles lui garantissent la valeur minimale 2.

■ Equilibre de Nash

Stabilité. Chaque joueur regarde ce qu'il peut faire de mieux face aux choix de l'autre joueur.

J_1 : a face à A ; d face à B ; e face à D
J_2 : A face à a ; B face à d ; A ou B face à d ; B face à e.

		Joueur 2	
		A	B
Joueur 1	a	$\boxed{8}, \boxed{5}$	$3, 4$
	b	$6, 2$	$5, \boxed{3}$
	d	$1, 8$	$\boxed{6}, \boxed{8}$

2 Equilibres de Nash : la paire (a, A) qui donne les paiements 8 et 5 pour J_1 et J_2 et la paire (d, B) qui donne les paiements 6 et 8 pour J_1 et J_2. Ces équilibres ne sont pas équivalents.

On vérifie que ces deux paires (a, A) et (d, B) sont les deux seuls équilibres de Nash dans le jeu initial :

Joueur 1 \ Joueur 2	A	B	C	D
a	$\boxed{8}, \boxed{5}$	$3, 2$	$0, 1$	$5, 3$
b	$6, 2$	$5, \boxed{3}$	$\boxed{4}, 0$	$5, 1$
c	$0, 6$	$2, 6$	$0, \boxed{8}$	$5, 7$
d	$1, \boxed{8}$	$\boxed{6}, \boxed{8}$	$1, 4$	$6, 3$
e	$1, 5$	$0, \boxed{6}$	$0, 1$	$\boxed{9}, 0$

Jeux à 2 joueurs, somme nulle

Jeux tels que ce que perd un joueur est gagné par l'autre joueur :

- tranfert d'utilité (e.g. transfert monétaire) d'un joueur à l'autre,
- jeu avec un gagnant et un perdant : échec, "pierre, sciseau, papier"
- jeu de "poursuite-évasion" (militaire, surveillance site industriel...)
- jeu contre la nature (le hasard).

On suppose que les fonctions d'évaluation φ_1, φ_2 vérifient

$$-\varphi_1(X, Y) = \varphi_2(X, Y) = \varphi(X, Y)$$

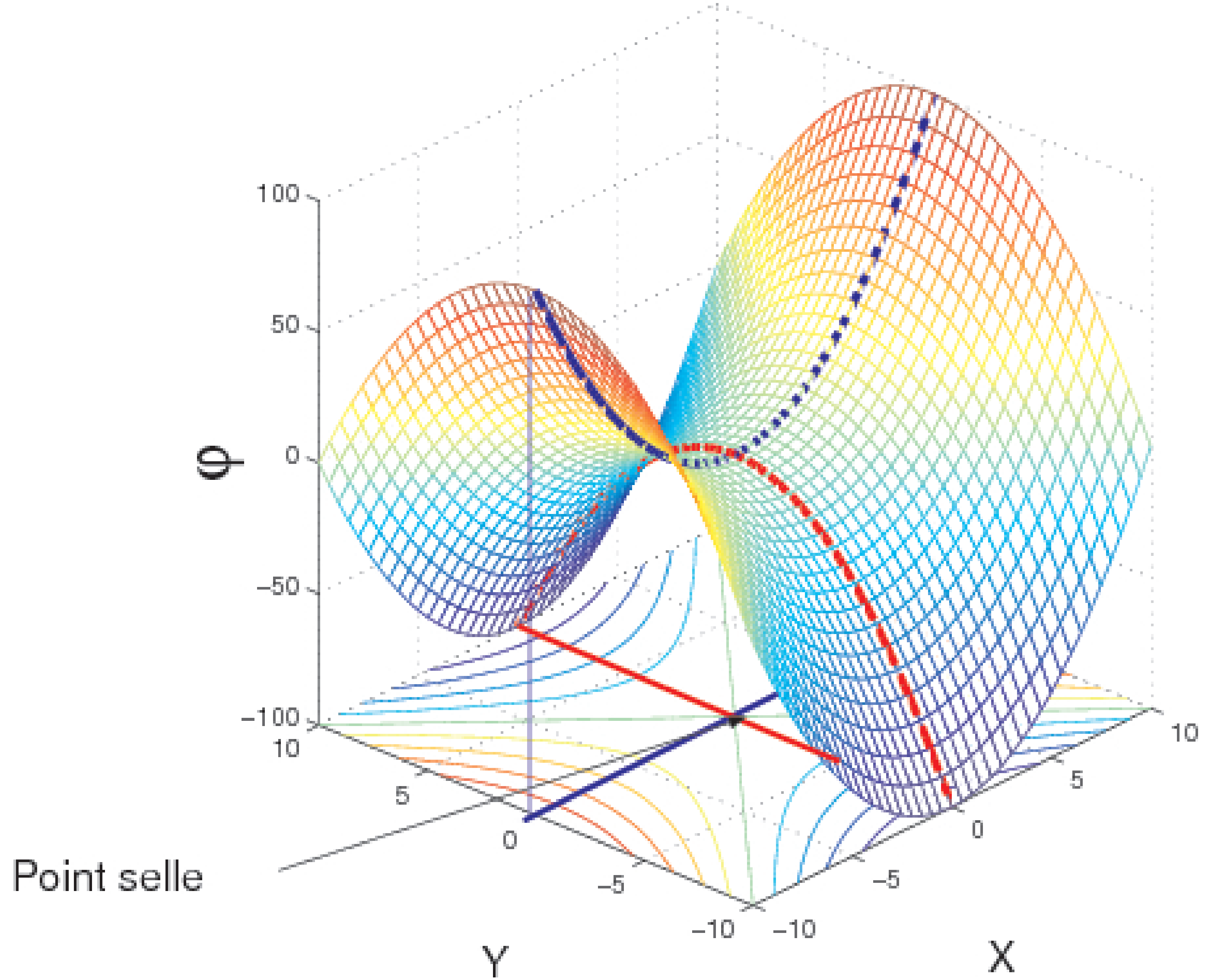
Jour 1choisit X afin de maximiser φ_1, c-à-d minimiser $\varphi \to$ minimiseur

Joueur 2 choisit Y afin de maximiser φ_2, c-à-d maximiser φ
$\to$ maximiseur

(X^*, Y^*) équilibre de Nash si

$$\varphi(X^*, Y) \leq \varphi(X^*, Y^*) \leq \varphi(X, Y^*), \quad \forall X, \forall Y.$$

condition de point selle.


100
50
0
φ
−50
−100
10
5
0
−5
−10
Point selle
Y
−10
−5
0
5
10
X

■ Cas où plusieurs equilibres existent

Supposons ($(\overline{u}, \overline{v})$ et (u^*, v^*)) équilibres de Nash. Alors

- Ils sont équivalents : $\varphi(\overline{u}, \overline{v}) = \varphi(u^*, v^*)$
- La coordination n'est pas nécessaire : $(\overline{u}, v^*)$ and $(u^*, \overline{v})$ sont aussi des équilibres.

■ **Proof.** Les conditions d'équilibre s'écrivent

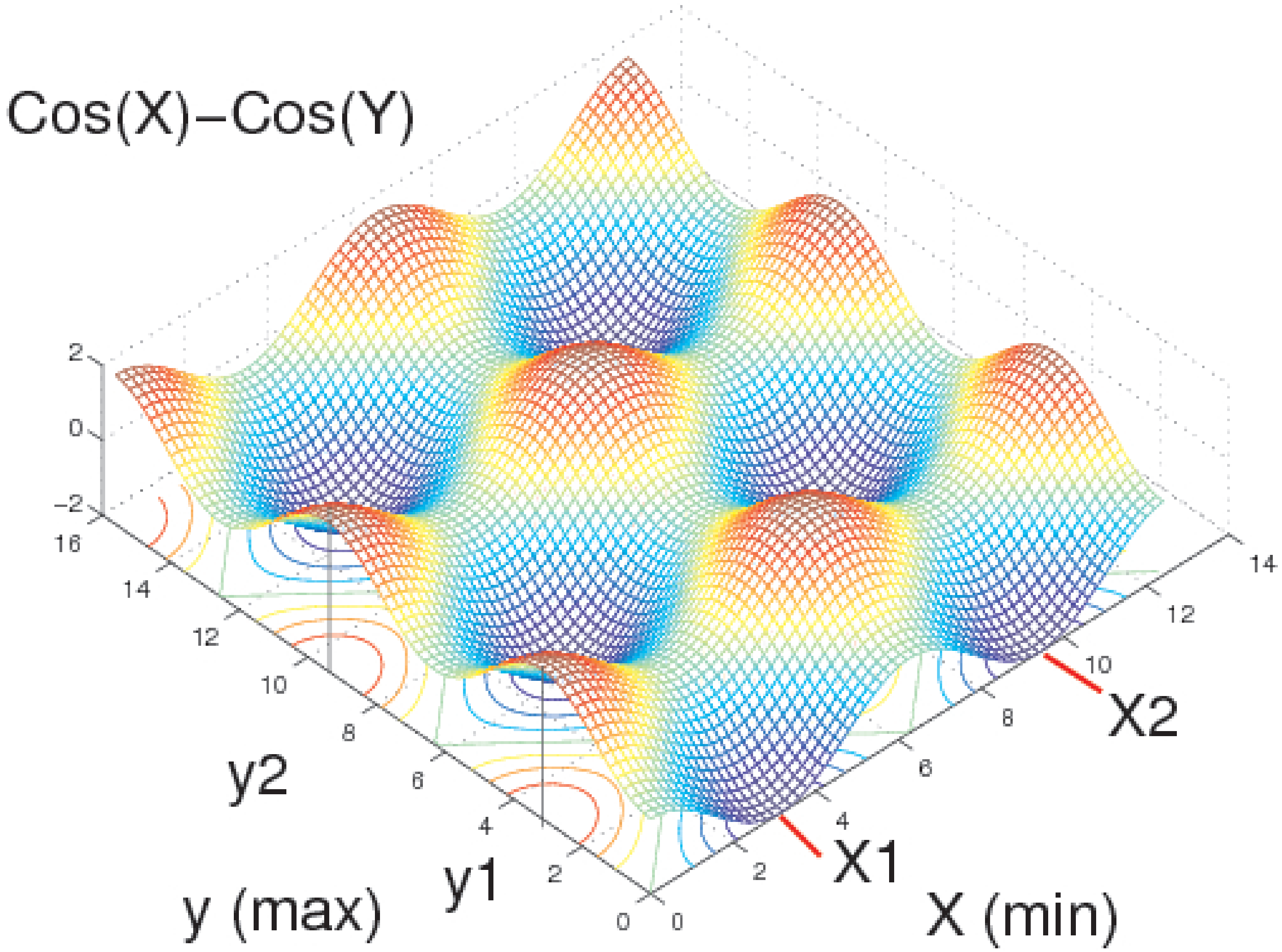
$$\varphi(u, v^*) \geq \varphi(u^*, v^*) \geq \varphi(u^*, v), \text{ et } \varphi(u, \overline{v}) \geq \varphi(\overline{u}, \overline{v}) \geq \varphi(\overline{u}, v), \forall u, v$$

En particulier

$$\varphi(\overline{u}, v^*) \geq \varphi(u^*, v^*) \geq \varphi(u^*, \overline{v}), \text{ et } \varphi(u^*, \overline{v}) \geq \varphi(\overline{u}, \overline{v}) \geq \varphi(\overline{u}, v^*),$$

ce qui implique que

$$\varphi(u, \overline{v}) \geq \varphi(\overline{u}, \overline{v}) = \varphi(u^*, \overline{v}) = \varphi(u^*, v^*) \geq \varphi(u^*, v), \ \forall u, v$$


Cos(X)−Cos(Y)
2
0
−2
16
14
12
10
8
6
4
2
0
0
2
4
6
8
10
12
14
y2
y1
y (max)
X1
X2
X (min)

Jeux à somme nulle et stratégies prudentes

$\overline{u}$ stratégie prudente du minimiseur

$$\max_v \varphi(\overline{u}, v) = \min_u \max_v \varphi(u, v) = \underline{V},$$

$\overline{v}$ stratégie prudente du maximiseur

$$\min_u \varphi(u, \overline{v}) = \max_v \min_u \varphi(u, v) = \overline{V}.$$

En général $\overline{V} \neq \underline{V}$!

■ Example

	min.	
max.	a	b
A	-1	2
B	1	0

– If the maximizer chooses $v = A$ the worst for him is to get "-1", if he chooses $v = B$, the worst is to get "0". So the wise strategy is $v^* = B$, the minimal guaranteed payment is "0"

$$\underline{V} = \max_{v\in\{A,B\}} \min_{u\in\{a,b\}} \varphi(u,v) = \min_{u\in\{a,b\}} \varphi(u,B) = \varphi(b,B) = 0$$

– If the minimizer chooses $u = a$ the worst for him is to get "1", if he chooses $u = b$, the worst is to get "2". So his wise strategy is $u^* = a$, and the maximal risked cost is "1".

$$\overline{V} = \min_{u\in\{a,b\}} \max_{v\in\{A,B\}} \varphi(u,v) = \max_{v\in\{A,B\}} \varphi(a,v) = \varphi(a,B) = 1$$

On observe que

$$\underline{V} = \max_v \min_u \varphi(u,v) \leq \min_u \max_v \varphi(u,v) = \overline{V}$$

C'est une propriété générale. En effet

Pour tout $u, v,$ on a $\min_u \varphi(u,v) \leq \varphi(u,v)$.

On peut prendre le maximum sur v des deux cotés et reconnaitre $\underline{V}$:

Pour tout u on a $\underline{V} = \max_v \min_u \varphi(u,v) \leq \max_v \varphi(u,v),$

d'où en prenant le minimum sur u, et en reconnaissant $\overline{V}$:

$$\underline{V} = \max_v \min_u \varphi(u,v) \leq \min_u \max_v \varphi(u,v) = \overline{V}$$

$\underline{V}$ est la valeur inférieure du jeu; $\overline{V}$ est la valeur supérieure du jeu.

- **Valeur d'un jeu.**
  Jeux tels que $V = \underline{V} = \overline{V}$

Exemple :

		minimizer	
	a	$\boxed{\text{b}}$	c
A	2	-1	2
maximizer $\boxed{\text{B}}$	1	0	2
C	0	-2	-3

Minimiseur, sa perte maximale lorsqu'il joue a est 2 , sa perte maximale s'il joue b est 0 , sa perte maximale s'il joue c est 2 .
Sa stratégie prudente est donc b, et il risque au pire de perdre 0 .

Maximiseur, s'il joue A gain min -1, s'il joue B gain min 0, s'il joue C gain min -3. Sa stratégie prudente est donc B , son paiement minimum garanti est donc 0.

Dans ce jeu $\underline{V} = \overline{V} = 0$. Les stratégies b et B sont prudentes respectivement pour le minimiseur et pour le maximiseur.

On détermine l'équilibre de Nash

$$\begin{array}{ll} MR_{\min}(A) = b & MR_{\max}(a) = A \\ MR_{\min}(B) = b & MR_{\max}(b) = B \\ MR_{\min}(C) = c & MR_{\max}(c) = B \end{array}$$

(b, B) est donc un équilibre de Nash.

Propriété

> Dans un jeu à 2 joueurs et à somme nulle, une paire de stratégies prudentes est un équilibre de Nash, et réciproquement, un équilibre de Nash est constitué de stratégies prudentes.

■ Conclusion pour un jeu à somme nulle.

Les notions de stratégies prudentes et d'Equilibre de Nash se recoupent. La propriété sur les équilibres de Nash multiples montre que la coordonation n'est pas pas nécéssaire.

On parle de stratégies optimales.