Stratégies d'encerclement dans les graphes

Nicolas Nisse

Lab. de Recherche en Informatique, Université Paris-Sud,
91405 Orsay, France.

Journées Pôle ResCom, Lille, 6 – 7 mars 2006

Encerclement dans les graphes

But

Dans un réseau

- contaminé par un gaz toxique, un virus...,
- une équipe d'agents mobiles doit nettoyer le graphe.

Trouver une stratégie qui nettoie le graphe
en utilisant le moins de ressources possible.

Encerclement dans les graphes

But (Alternative)

Dans un réseau

- envahi par un fugitif omniscient et arbitrairement rapide,
- une équipe d'agents mobiles doit capturer le fugitif.

Trouver une stratégie qui capture le fugitif
en utilisant le moins d'agents possible.

Motivations

Applications

- sécurité dans les réseaux de type internet
- maintenance de réseaux de pipelines
- opération de secours dans des souterrains

Aspects fondamentaux

L'encerclement est en étroite relation avec des paramètres statiques des graphes.

- largeur arborescente
- largeur linéaire

Plan

1. Introduction

2. Encerclement
   - Définitions et exemples
   - Complexité et monotonie

3. Connexité

4. Conclusion

Stratégies d' Encerclement, Parson. [GTC,78] Variante de Kirousis et Papadimitriou. [TCS,86]

Séquence de deux opérations élémentaires,...

1. Placer un agent sur un sommet du graphe ;
2. Supprimer un agent d'un sommet du graphe.

...qui doit aboutir à la capture du fugitif

Le fugitif est capturé lorsqu'il occupe (ou croise) un sommet occupé par un agent. Une arête est dite nettoyée, lorsque ses extrémités sont occupées par des agents.

Il faut minimiser le nombre d'agents.

Soit $s(G)$ le nombre minimum d'agents nécessaires pour capturer un fugitif invisible dans le graphe G.

Stratégies d' Encerclement, Parson. [GTC,78] Variante de Kirousis et Papadimitriou. [TCS,86]

Séquence de deux opérations élémentaires,. . .

1. Placer un agent sur un sommet du graphe ;
2. Supprimer un agent d'un sommet du graphe.

. . . qui doit aboutir à la capture du fugitif

Le fugitif est capturé lorsqu'il occupe (ou croise) un sommet occupé par un agent. Une arête est dite nettoyée, lorsque ses extrémités sont occupées par des agents.

Il faut minimiser le nombre d'agents.

Soit $s(G)$ le nombre minimum d'agents nécessaires pour capturer un fugitif invisible dans le graphe G.

Stratégies d' Encerclement, Parson. [GTC,78] Variante de Kirousis et Papadimitriou. [TCS,86]

Séquence de deux opérations élémentaires,. . .

1. Placer un agent sur un sommet du graphe ;
2. Supprimer un agent d'un sommet du graphe.

. . . qui doit aboutir à la capture du fugitif

Le fugitif est capturé lorsqu'il occupe (ou croise) un sommet occupé par un agent. Une arête est dite nettoyée, lorsque ses extrémités sont occupées par des agents.

Il faut minimiser le nombre d'agents.

Soit $s(G)$ le nombre minimum d'agents nécessaires pour capturer un fugitif invisible dans le graphe G.

Stratégies d' Encerclement, Parson. [GTC,78] Variante de Kirousis et Papadimitriou. [TCS,86]

Séquence de deux opérations élémentaires,. . .

1. Placer un agent sur un sommet du graphe ;
2. Supprimer un agent d'un sommet du graphe.

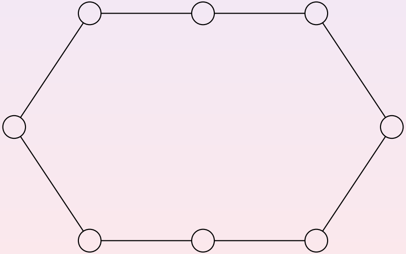
. . . qui doit aboutir à la capture du fugitif

Le fugitif est capturé lorsqu'il occupe (ou croise) un sommet occupé par un agent. Une arête est dite nettoyée, lorsque ses extrémités sont occupées par des agents.

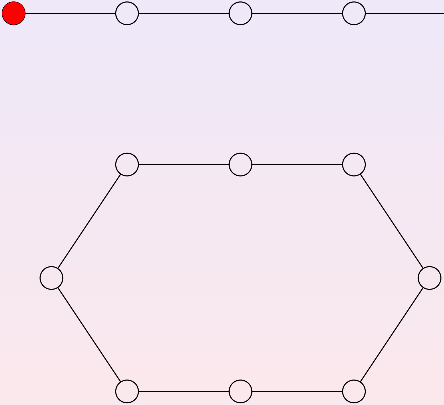
Il faut minimiser le nombre d'agents.

Soit $s(G)$ le nombre minimum d'agents nécessaires pour capturer un fugitif invisible dans le graphe G.

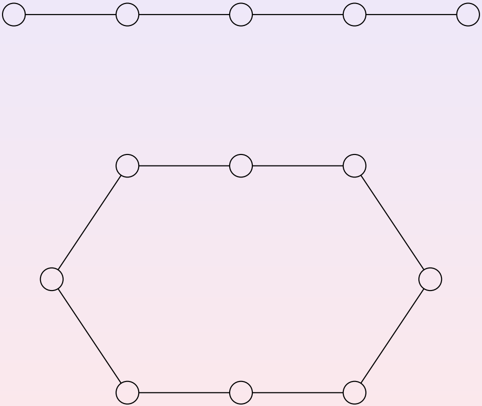
Exemples simples : le chemin et l'anneau



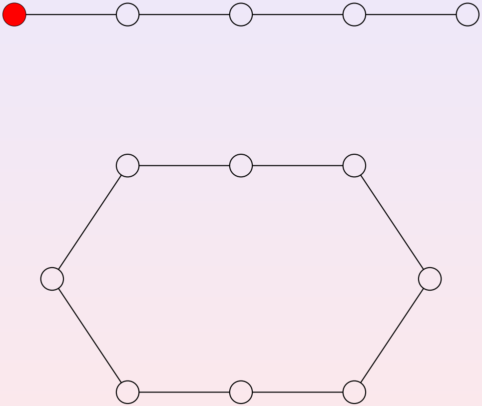
Exemples simples : le chemin et l'anneau



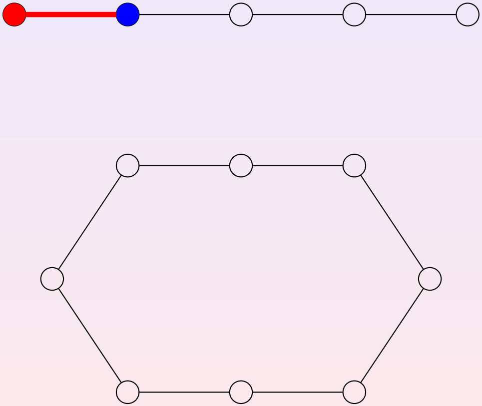
Exemples simples : le chemin et l'anneau



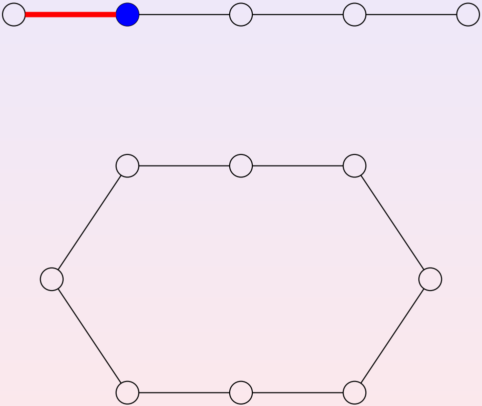
Exemples simples : le chemin et l'anneau



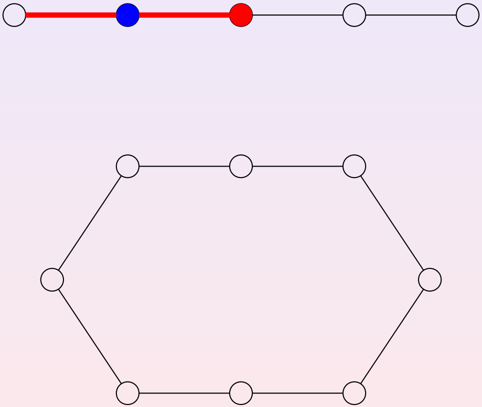
Exemples simples : le chemin et l'anneau



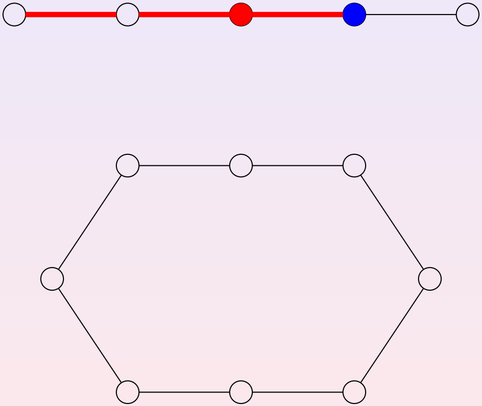
Exemples simples : le chemin et l'anneau



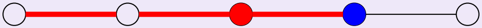
Exemples simples : le chemin et l'anneau



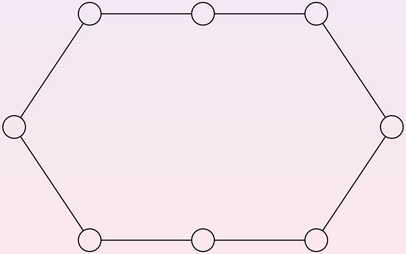
Exemples simples : le chemin et l'anneau



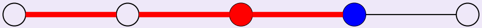
Exemples simples : le chemin et l'anneau



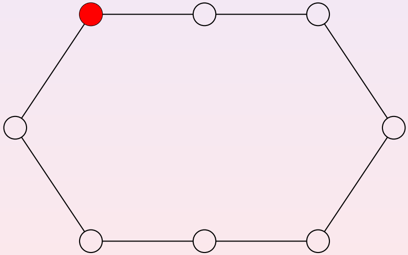
s(Chemin)=2



Exemples simples : le chemin et l'anneau

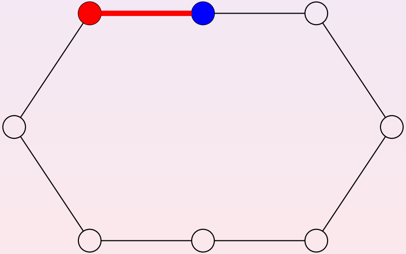


s(Chemin)=2

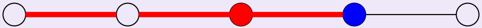


Exemples simples : le chemin et l'anneau

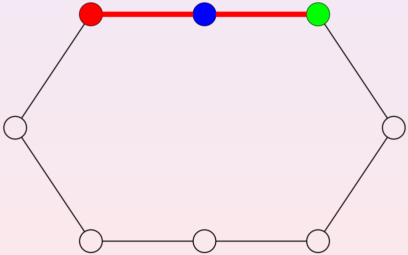
s(Chemin)=2



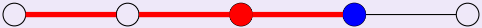
Exemples simples : le chemin et l'anneau



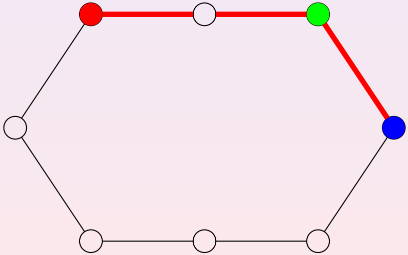
s(Chemin)=2



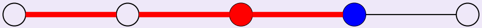
Exemples simples : le chemin et l'anneau



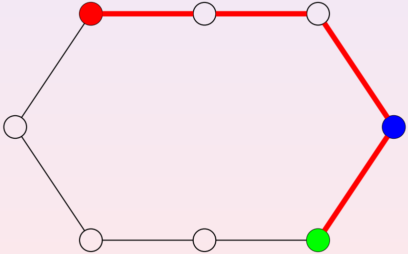
s(Chemin)=2



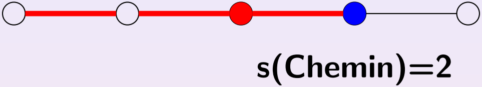
Exemples simples : le chemin et l'anneau

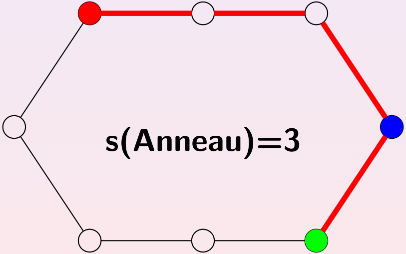


s(Chemin)=2

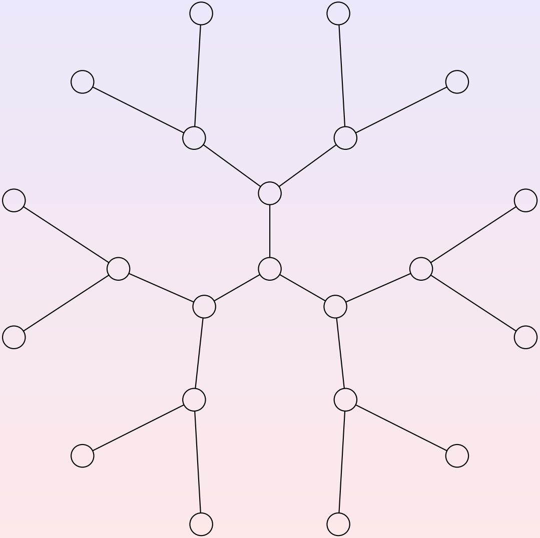


Exemples simples : le chemin et l'anneau

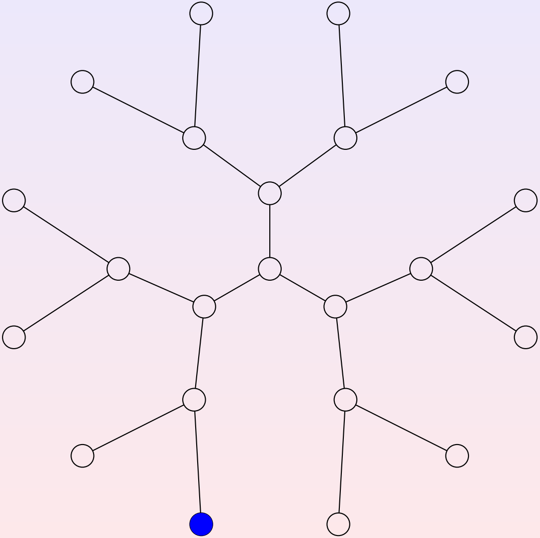




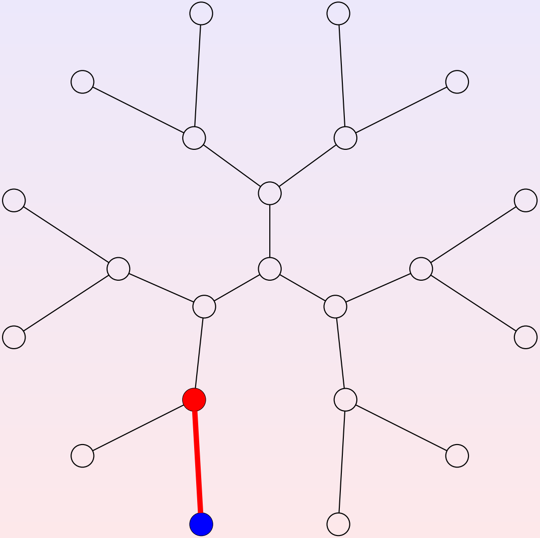
Encerclement dans un arbre



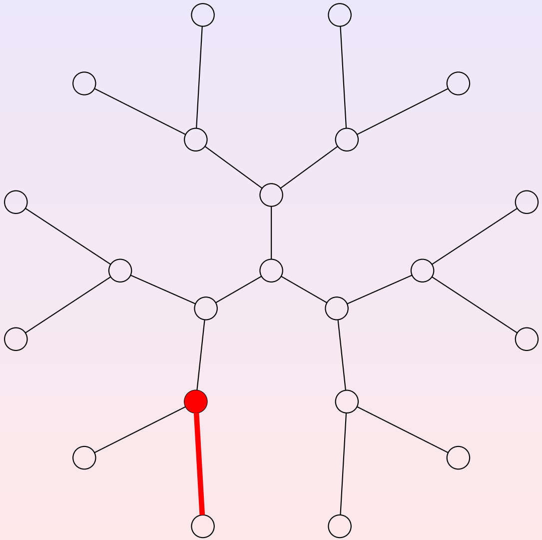
Encerclement dans un arbre



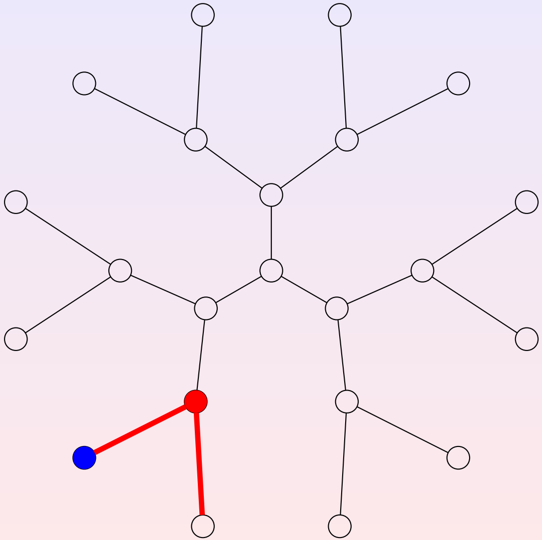
Encerclement dans un arbre



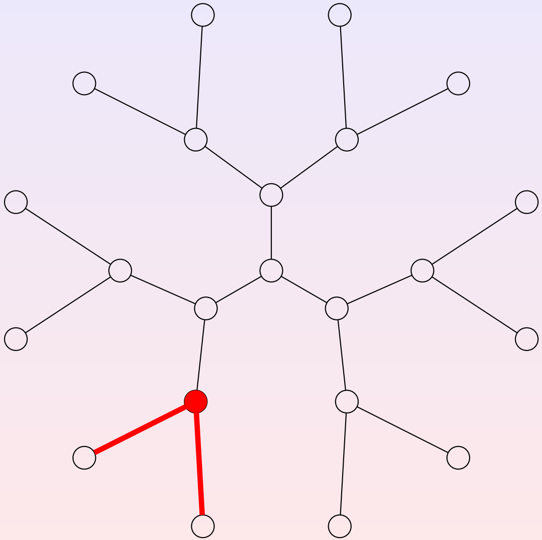
Encerclement dans un arbre



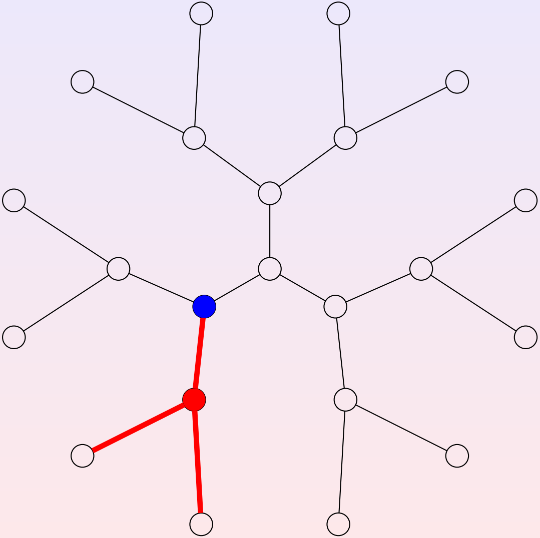
Encerclement dans un arbre



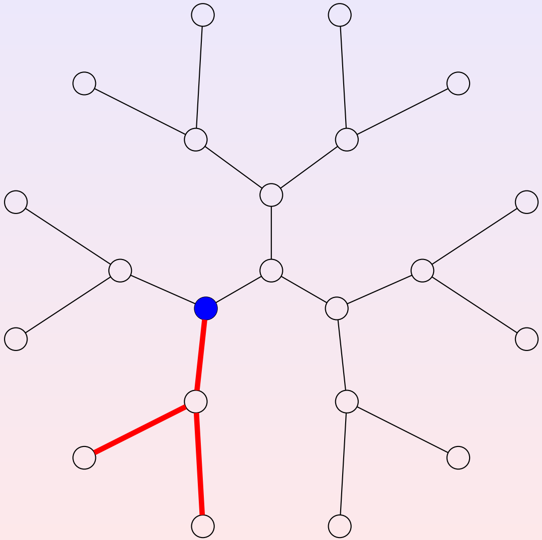
Encerclement dans un arbre



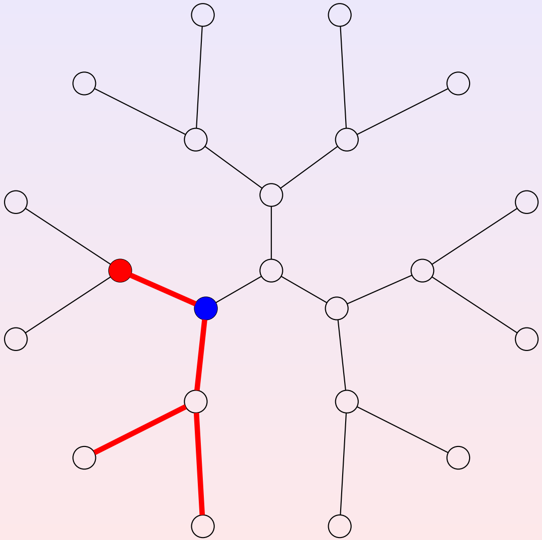
Encerclement dans un arbre



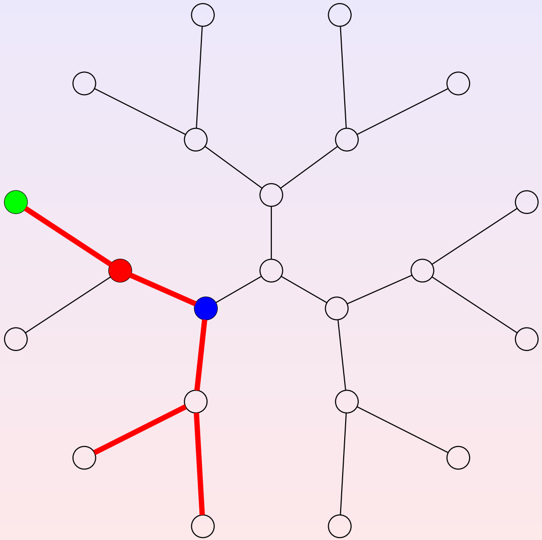
Encerclement dans un arbre



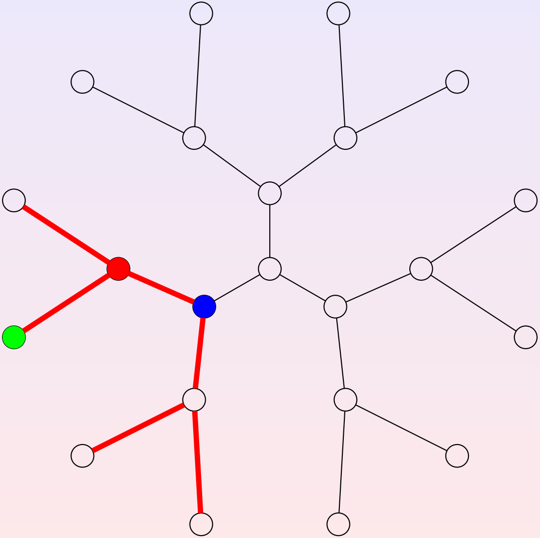
Encerclement dans un arbre



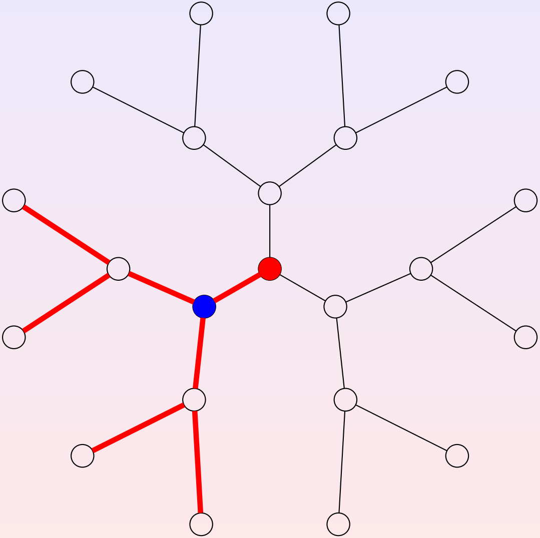
Encerclement dans un arbre



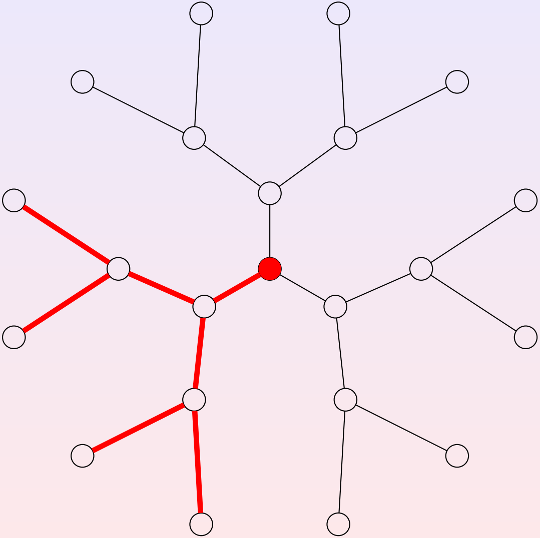
Encerclement dans un arbre



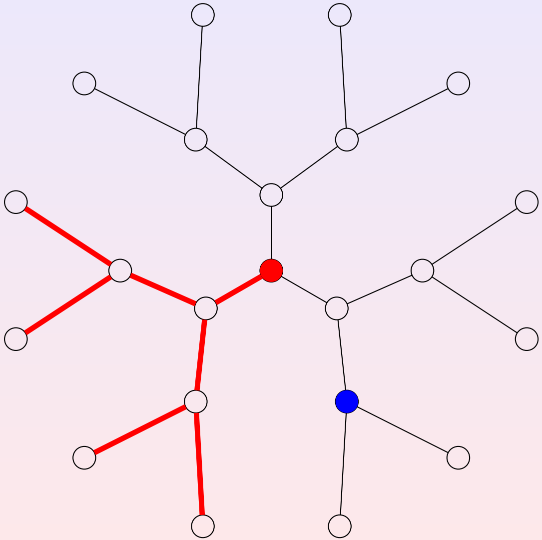
Encerclement dans un arbre



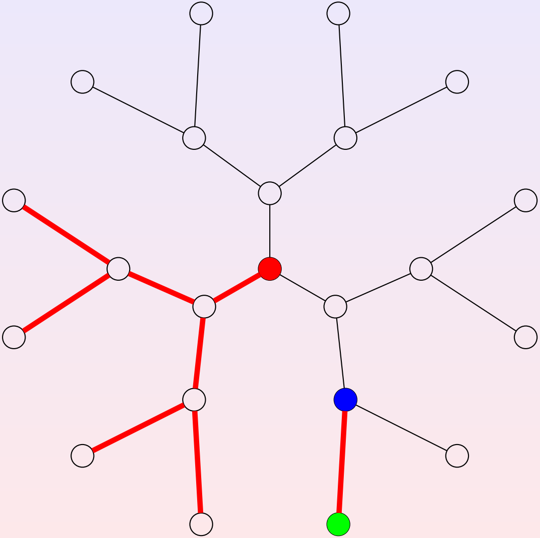
Encerclement dans un arbre



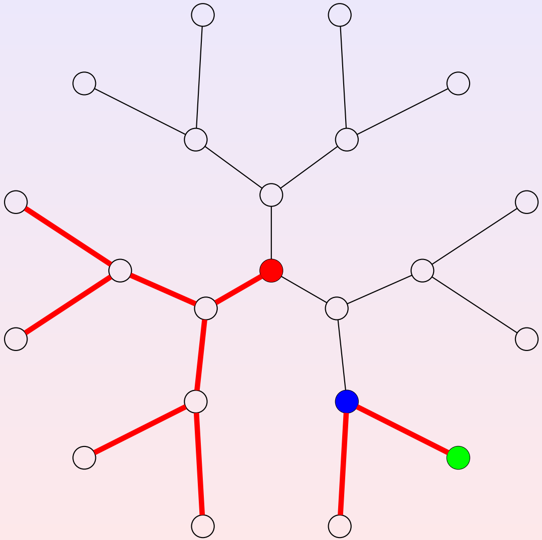
Encerclement dans un arbre



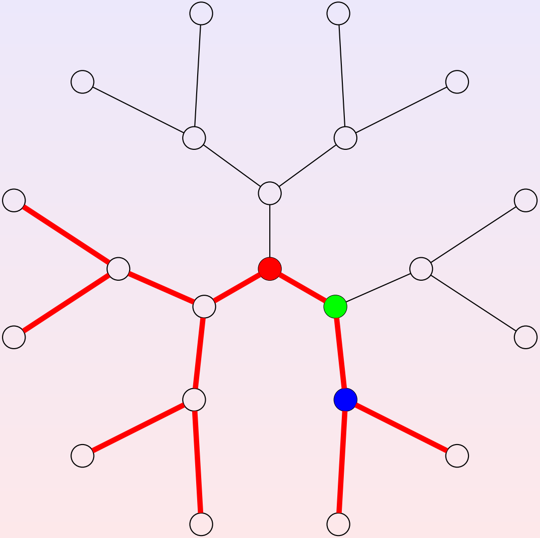
Encerclement dans un arbre



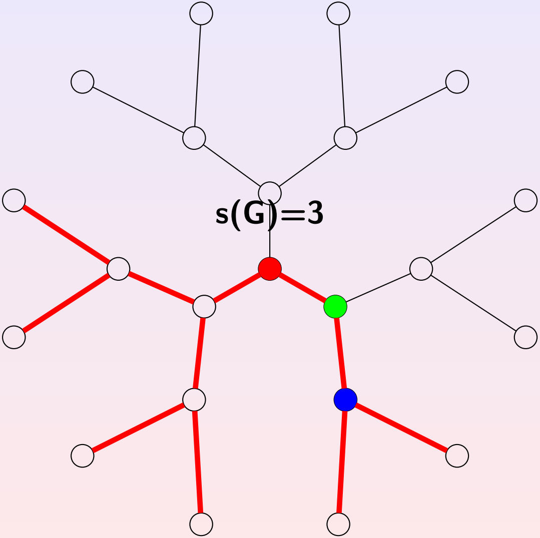
Encerclement dans un arbre



Encerclement dans un arbre



Encerclement dans un arbre



Encerclement visible

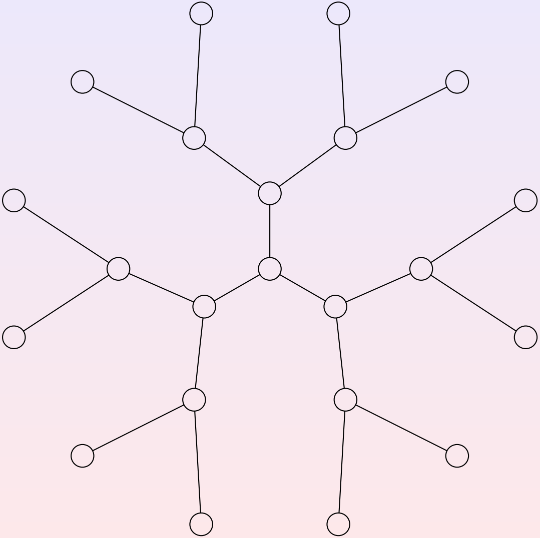
Visibilité du fugitif

Le fugitif est visible si, à chaque étape, les agents connaissent sa position (en fait la composante connexe où il se trouve). La stratégie peut donc être orientée d'après la position du fugitif.

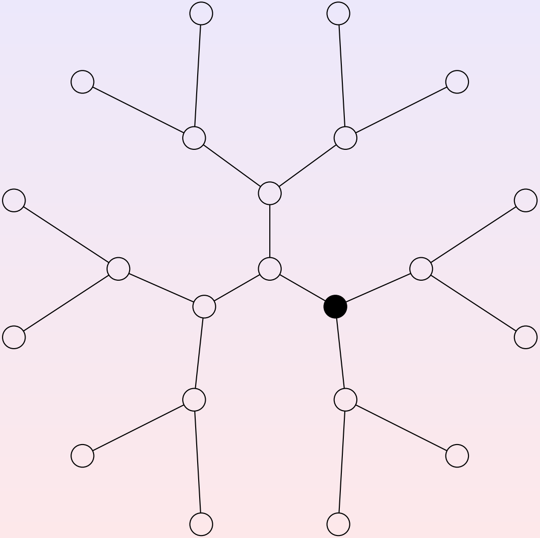
Paramètre associé

Soit **vs**(G) l'encerclement d'un fugitif visible dans le graphe G. De manière évidente, $vs(G) \leq s(G)$.

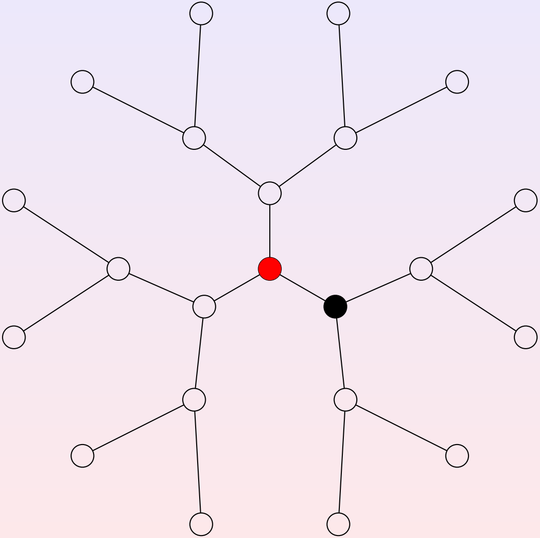
Encerclement d'un fugitif visible dans un arbre



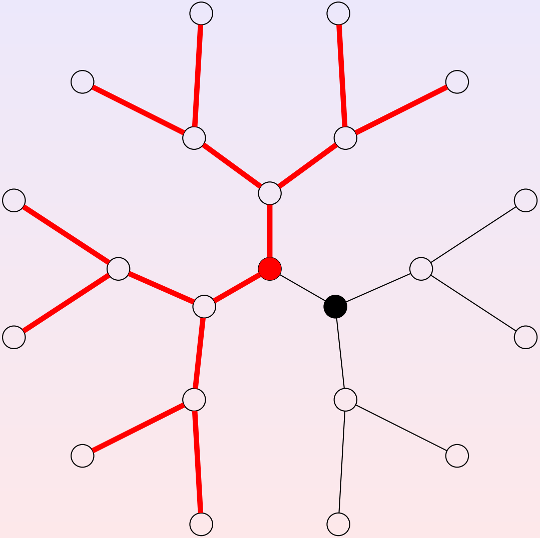
Encerclement d'un fugitif visible dans un arbre



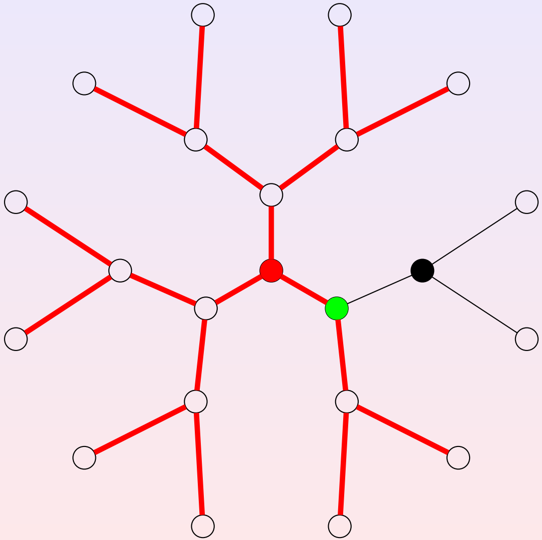
Encerclement d'un fugitif visible dans un arbre



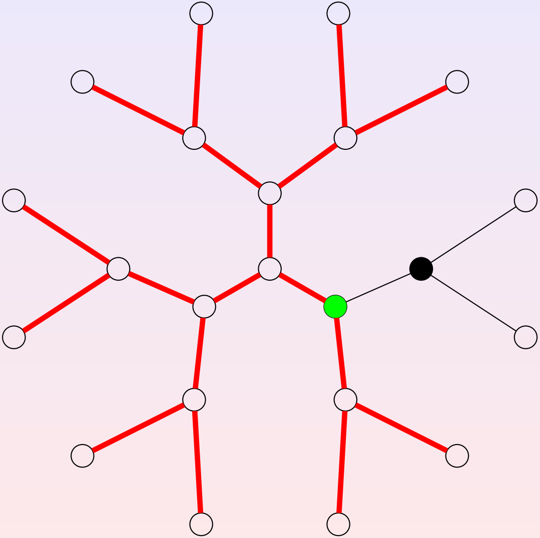
Encerclement d'un fugitif visible dans un arbre



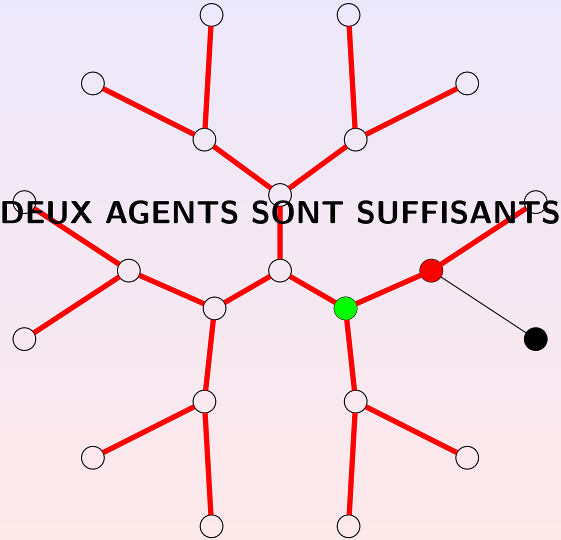
Encerclement d'un fugitif visible dans un arbre



Encerclement d'un fugitif visible dans un arbre



Encerclement d'un fugitif visible dans un arbre



DEUX AGENTS SONT SUFFISANTS

Compléxité des problèmes

Déterminer si $s(G) \leq k$ est NP-difficile

- **Megiddo** *et al*, J.of ACM, 1988
  The complexity of searching a graph.

Déterminer si $vs(G) \leq k$ est NP-difficile

- **Seymour and Thomas**, J. of Comb. Th., 1993.
  Graph searching and a min-max theorem for tree-width

Remarque :

Ils sont linéaires dans le cas des arbres.

Question :

Ces problèmes sont-ils NP-complet ?

Compléxité des problèmes

Déterminer si $s(G) \leq k$ est NP-difficile

- **Megiddo** *et al*, J.of ACM, 1988
  The complexity of searching a graph.

Déterminer si $vs(G) \leq k$ est NP-difficile

- **Seymour and Thomas**, J. of Comb. Th., 1993.
  Graph searching and a min-max theorem for tree-width

Remarque :

Ils sont linéaires dans le cas des arbres.

Question :

Ces problèmes sont-ils NP-complet ?

Compléxité des problèmes

Déterminer si $s(G) \leq k$ est NP-difficile

- **Megiddo** *et al*, J.of ACM, 1988
  The complexity of searching a graph.

Déterminer si $vs(G) \leq k$ est NP-difficile

- **Seymour and Thomas**, J. of Comb. Th., 1993.
  Graph searching and a min-max theorem for tree-width

Remarque :

Ils sont linéaires dans le cas des arbres.

Question :

Ces problèmes sont-ils NP-complet ?

Monotonie et Recontamination

Recontamination

Un sommet est recontaminé au cours d'une stratégie S, si il a été nettoyé (occupé par un agent) à une étape, et que le fugitif à la possibilité d'occuper ce sommet lors d'une étape ultérieure.

Monotonie

Une stratégie est monotone si aucune recontamination n'est autorisée. Un sommet nettoyé reste propre jusqu'à la fin. Soit $ms(G)$ l'encerclement monotone du graphe G.

Question : La recontamination aide-t'elle ?

Est-il plus difficile de nettoyer un graphe de manière monotone ? $\mathbf{ms}(G) > \mathbf{s}(G)$?

La recontamination n'aide pas

$s(G) = ms(G)$ (Cas d'un fugitif invisible)

- **Bienstock and Seymour**, J.of Alg., 1991
  Monotonicity in graph searching.
- **LaPaugh**, J.of ACM, 1993
  Recontamination does not help to search a graph.

$vs(G) = mvs(G)$ (Cas d'un fugitif visible)

- **Seymour and Thomas**, J. of Comb. Th., 1993.
  Graph searching and a min-max theorem for tree-width

La recontamination n'aide pas : conséquences

En d'autres termes...

Il existe toujours une stratégie S qui capture un fugitif invisible (resp., visible) en utilisant le moins d'agents possible et telle que S est monotone.

Déterminer si $s(G) \leq k$ (resp., $vs(G) \leq k$) est NP-complet

Une stratégie monotone est un certificat de taille polynomiale qui peut donc être vérifié en temps polynomial.

Pourquoi on est content que la recontamination n'aide pas

Il est (très) difficile de concevoir une stratégie non monotone. Maintenant, on peut se restreindre aux stratégies monotones.

La recontamination n'aide pas : conséquences

En d'autres termes...

Il existe toujours une stratégie S qui capture un fugitif invisible (resp., visible) en utilisant le moins d'agents possible et telle que S est monotone.

Déterminer si $s(G) \leq k$ (resp., $vs(G) \leq k$) est NP-complet

Une stratégie monotone est un certificat de taille polynomiale qui peut donc être vérifié en temps polynomial.

Pourquoi on est content que la recontamination n'aide pas

Il est (très) difficile de concevoir une stratégie non monotone.
Maintenant, on peut se restreindre aux stratégies monotones.

La recontamination n'aide pas : conséquences

En d'autres termes...

Il existe toujours une stratégie S qui capture un fugitif invisible (resp., visible) en utilisant le moins d'agents possible et telle que S est monotone.

Déterminer si $s(G) \leq k$ (resp., $vs(G) \leq k$) est NP-complet

Une stratégie monotone est un certificat de taille polynomiale qui peut donc être vérifié en temps polynomial.

Pourquoi on est content que la recontamination n'aide pas

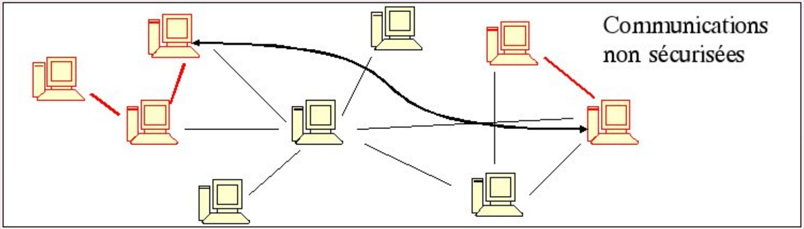
Il est (très) difficile de concevoir une stratégie non monotone. Maintenant, on peut se restreindre aux stratégies monotones.

Plan

Introduction de la connexité dans le modèle

Limites du modèle

- Impossibilité de se déplacer à volonté dans la réalité ;
- Il est préférable que les agents restent groupés.



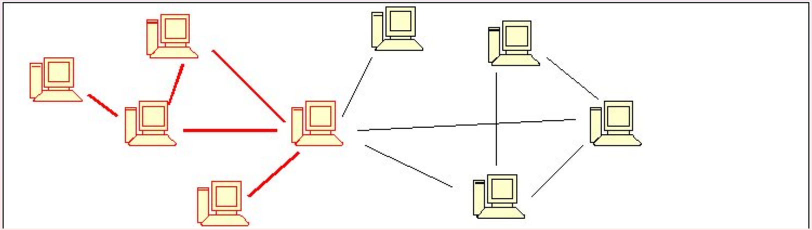
Introduction de la connexité dans le modèle

Limites du modèle

- Impossibilité de se déplacer à volonté dans la réalité ;
- Il est préférable que les agents restent groupés.

Stratégie connexe

à chaque étape, la partie nettoyée est connexe.
Soit $cs(G)$ l'encerclement connexe du graphe G.



Complexité dans le cas connexe

Théorème

- Déterminer si $cs(G) \leq k$ est NP-difficile
- Déterminer si $cvs(G) \leq k$ est NP-difficile

Complexité dans le cas connexe

Théorème

- Déterminer si $cs(G) \leq k$ est NP-difficile
- Déterminer si $cvs(G) \leq k$ est NP-difficile

Question :

Ces problèmes sont-ils NP-complet ?

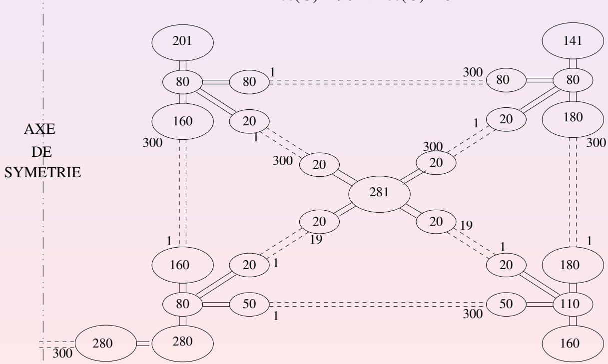
La recontamination aide dans le cas connexe

Yang, Dyer, Alspach, ISAAC 2004.

Sweeping graphs with large clique number.

Il existe des graphes G tel que $mcs(G) > cs(G)$.

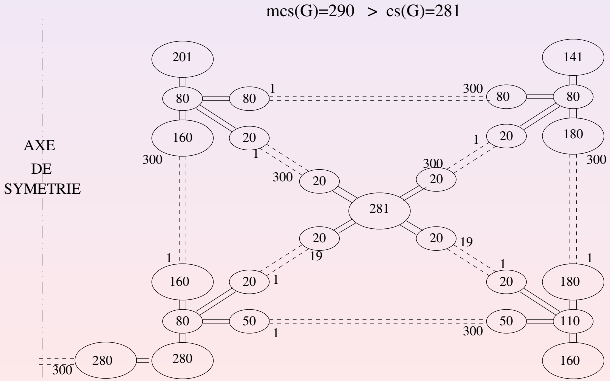
mcs(G)=290 > cs(G)=281



La recontamination aide dans le cas connexe

Notations

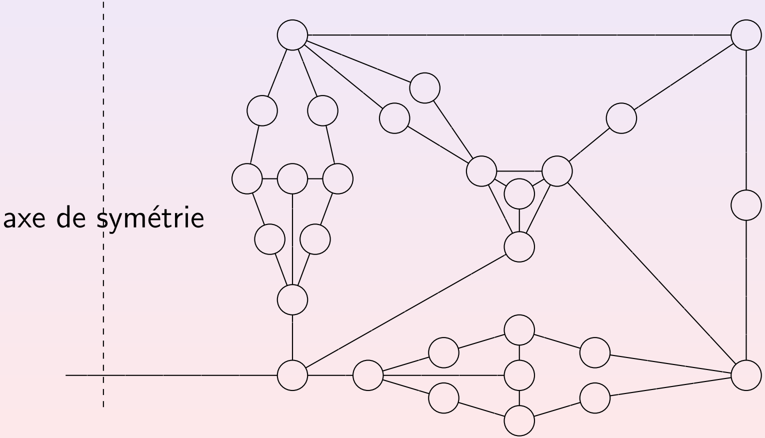
Les cercles représentent des “grosses” cliques, et les traits, des chemins de cliques liées par des couplages parfaits.



La recontamination aide dans le cas connexe

Cas d'un fugitif visible

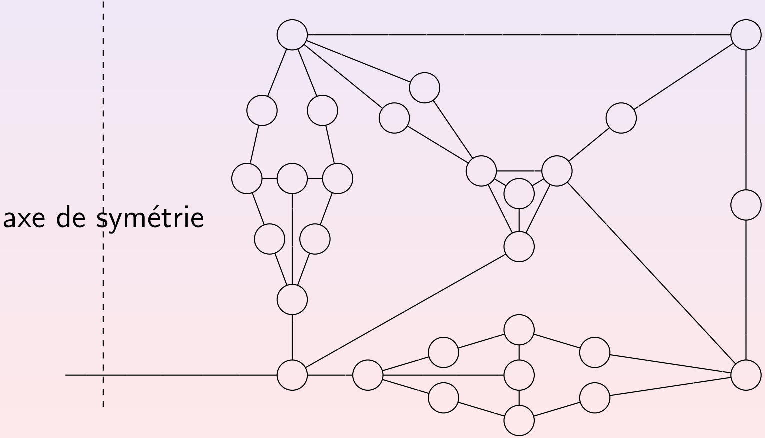
Il existe des graphes G tel que $mcvs(G) > cvs(G)$.



La recontamination aide dans le cas connexe

Cas d'un fugitif visible

Soit G le graphe ci-dessous : $mcvs(G) > cvs(G) = 4$.

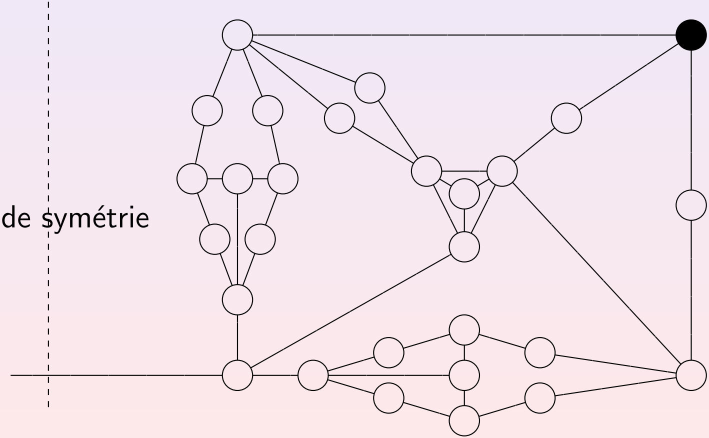


La recontamination aide dans le cas connexe

Cas d'un fugitif visible

Soit G le graphe ci-dessous : $mcvs(G) > cvs(G) = 4$.

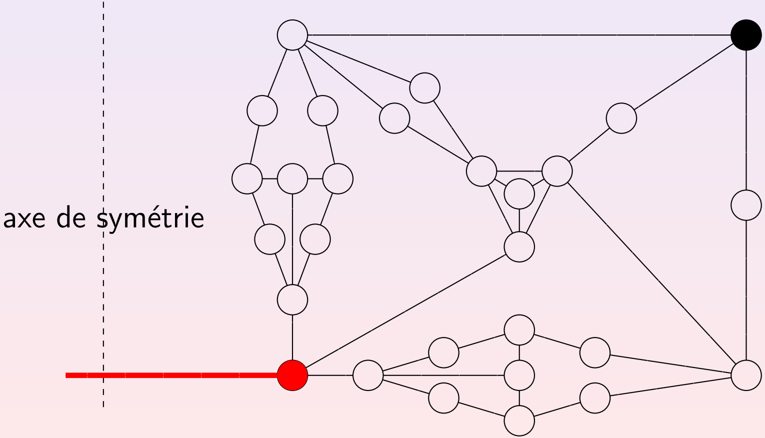
axe de symétrie



La recontamination aide dans le cas connexe

Cas d'un fugitif visible

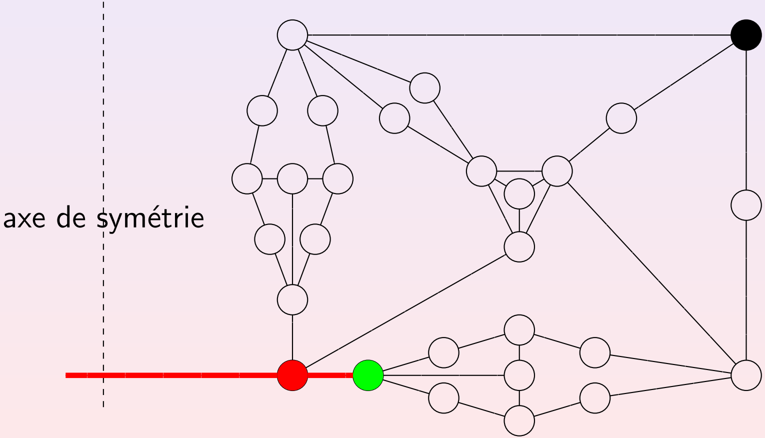
Soit G le graphe ci-dessous : $mcvs(G) > cvs(G) = 4$.



La recontamination aide dans le cas connexe

Cas d'un fugitif visible

Soit G le graphe ci-dessous : $mcvs(G) > cvs(G) = 4$.

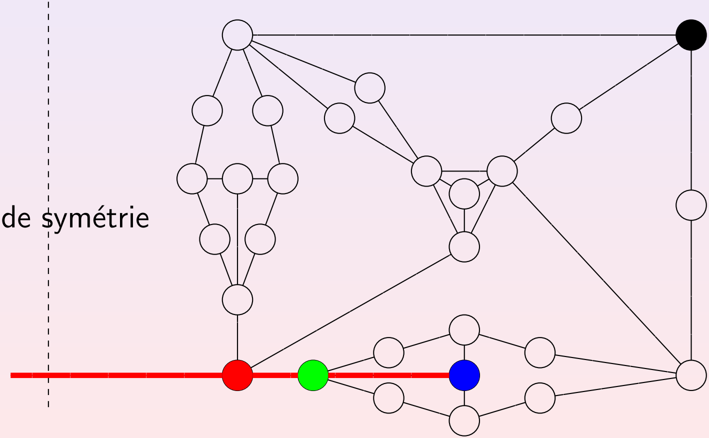


La recontamination aide dans le cas connexe

Cas d'un fugitif visible

Soit G le graphe ci-dessous : $mcvs(G) > cvs(G) = 4$.

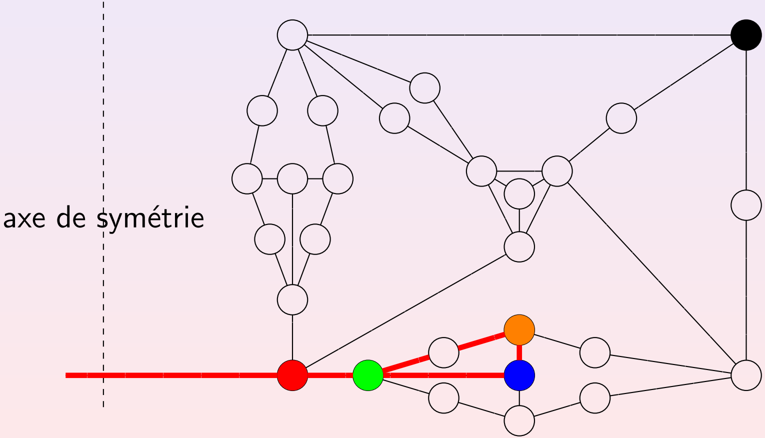
axe de symétrie



La recontamination aide dans le cas connexe

Cas d'un fugitif visible

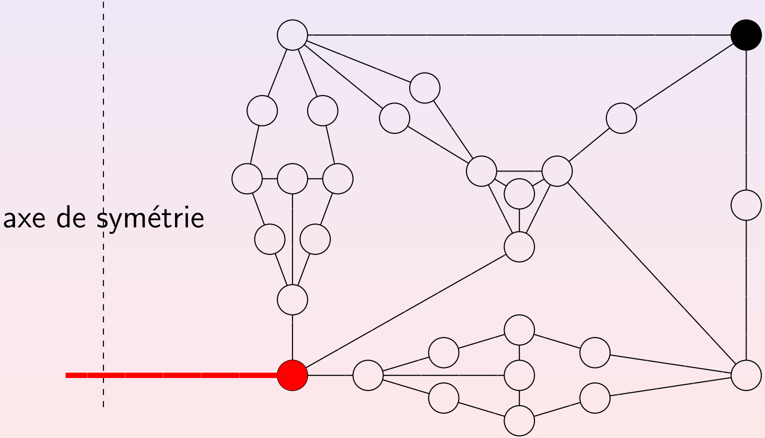
Soit G le graphe ci-dessous : $mcvs(G) > cvs(G) = 4$.



La recontamination aide dans le cas connexe

Cas d'un fugitif visible

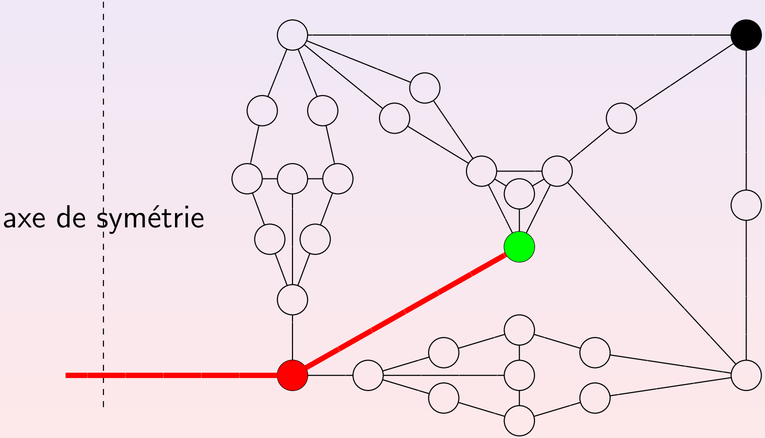
Soit G le graphe ci-dessous : $mcvs(G) > cvs(G) = 4$.



La recontamination aide dans le cas connexe

Cas d'un fugitif visible

Soit G le graphe ci-dessous : $mcvs(G) > cvs(G) = 4$.

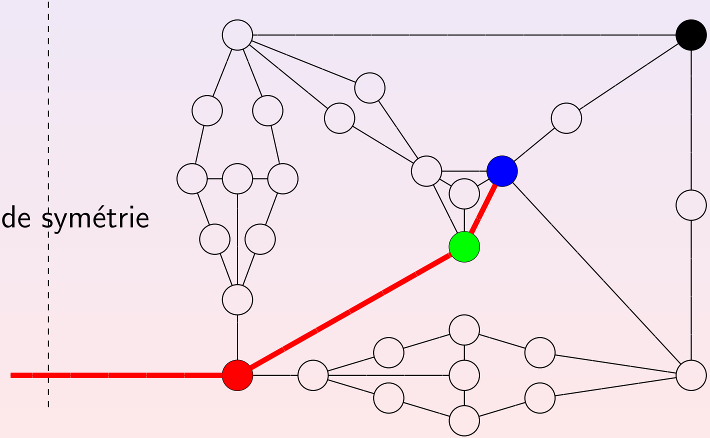


La recontamination aide dans le cas connexe

Cas d'un fugitif visible

Soit G le graphe ci-dessous : $mcvs(G) > cvs(G) = 4$.

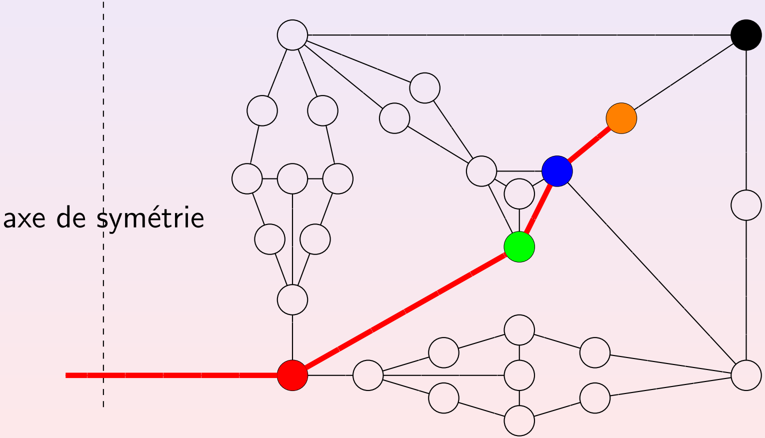
axe de symétrie



La recontamination aide dans le cas connexe

Cas d'un fugitif visible

Soit G le graphe ci-dessous : $mcvs(G) > cvs(G) = 4$.

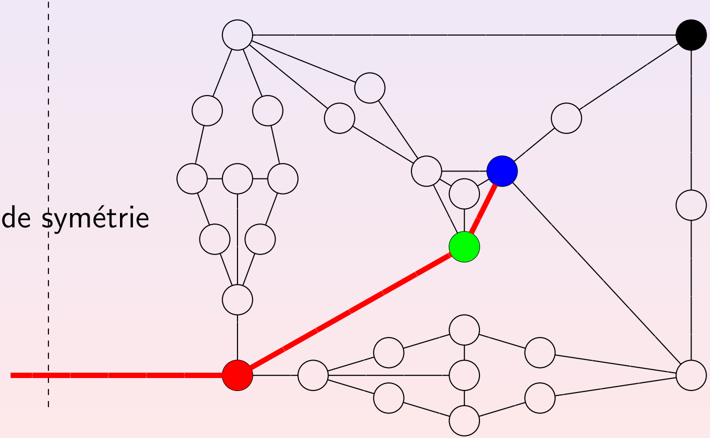


La recontamination aide dans le cas connexe

Cas d'un fugitif visible

Soit G le graphe ci-dessous : $mcvs(G) > cvs(G) = 4$.

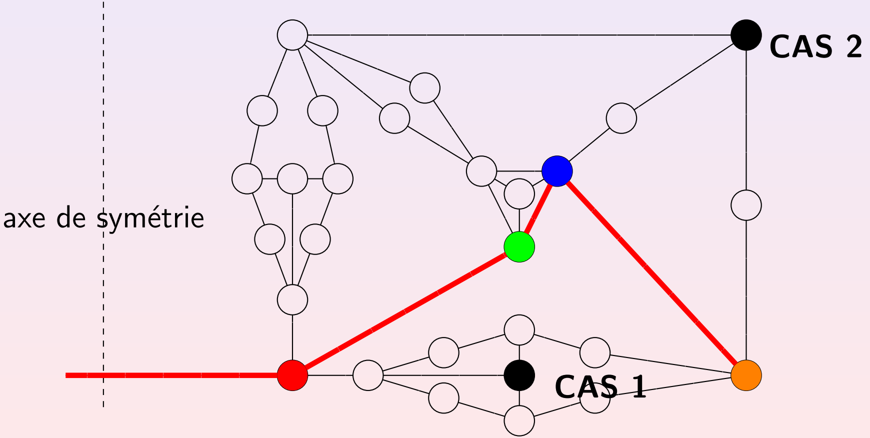
axe de symétrie



La recontamination aide dans le cas connexe

Cas d'un fugitif visible

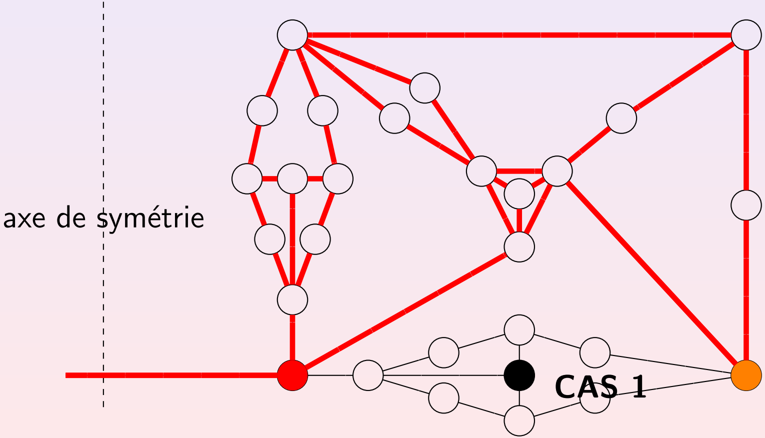
Soit G le graphe ci-dessous : $mcvs(G) > cvs(G) = 4$.



La recontamination aide dans le cas connexe

Cas d'un fugitif visible

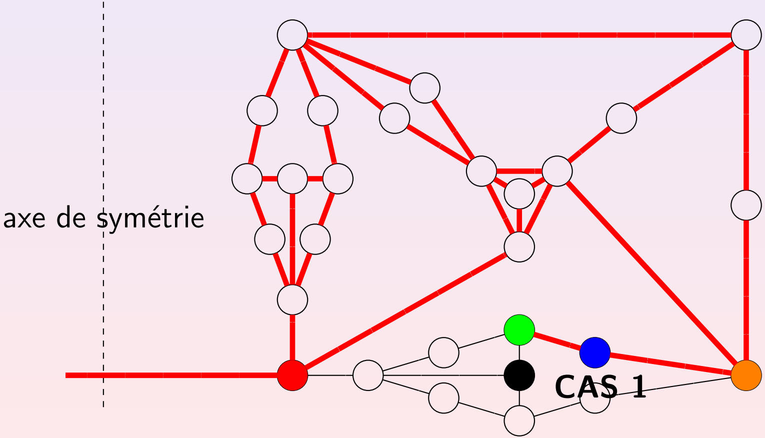
Soit G le graphe ci-dessous : $mcvs(G) > cvs(G) = 4$.



La recontamination aide dans le cas connexe

Cas d'un fugitif visible

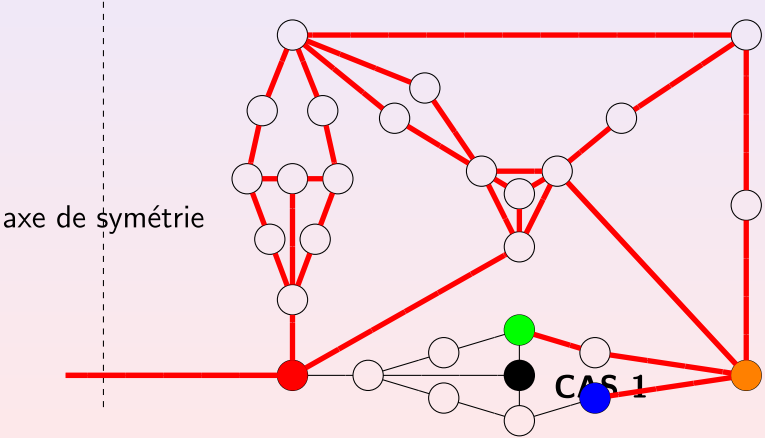
Soit G le graphe ci-dessous : $mcvs(G) > cvs(G) = 4$.



La recontamination aide dans le cas connexe

Cas d'un fugitif visible

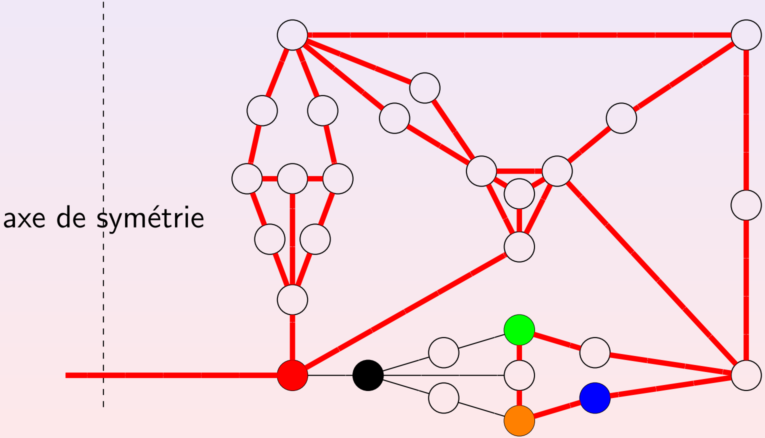
Soit G le graphe ci-dessous : $mcvs(G) > cvs(G) = 4$.



La recontamination aide dans le cas connexe

Cas d'un fugitif visible

Soit G le graphe ci-dessous : $mcvs(G) > cvs(G) = 4$.

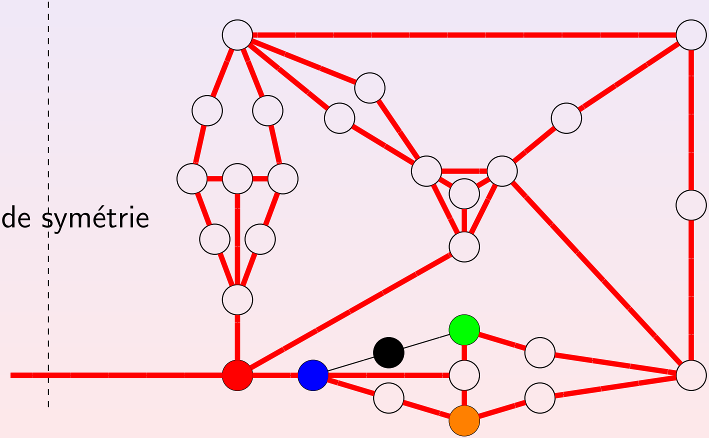


La recontamination aide dans le cas connexe

Cas d'un fugitif visible

Soit G le graphe ci-dessous : $mcvs(G) > cvs(G) = 4$.

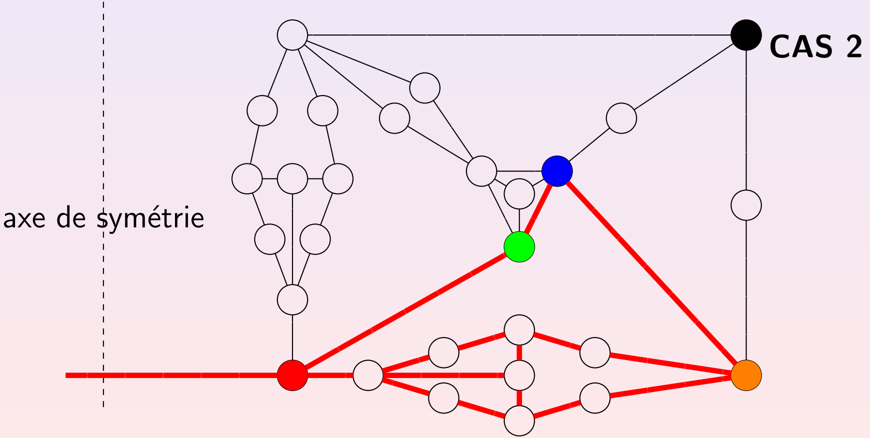
axe de symétrie



La recontamination aide dans le cas connexe

Cas d'un fugitif visible

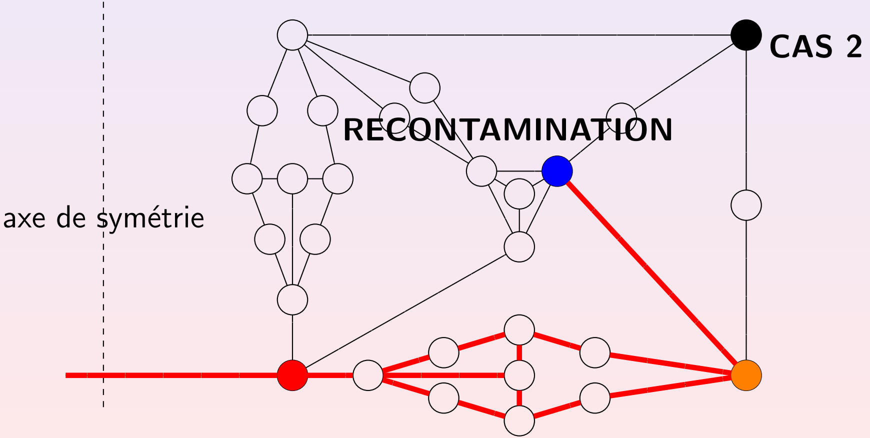
Soit G le graphe ci-dessous : $mcvs(G) > cvs(G) = 4$.



La recontamination aide dans le cas connexe

Cas d'un fugitif visible

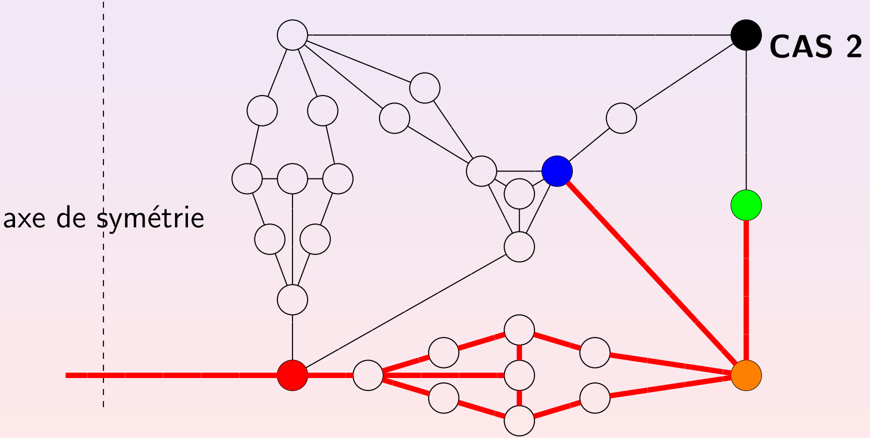
Soit G le graphe ci-dessous : $mcvs(G) > cvs(G) = 4$.



La recontamination aide dans le cas connexe

Cas d'un fugitif visible

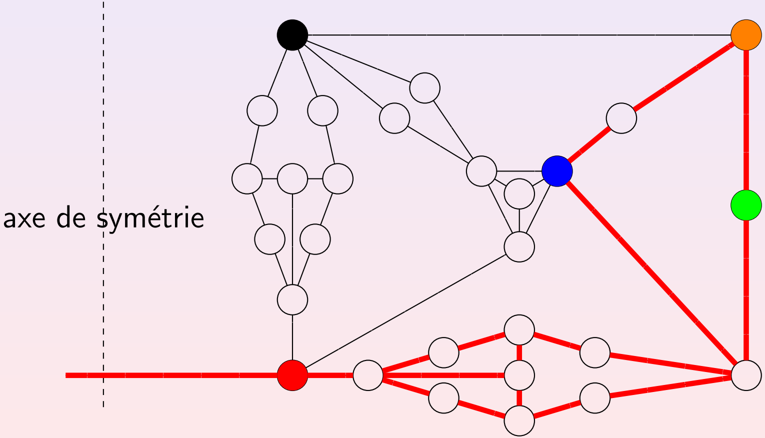
Soit G le graphe ci-dessous : $mcvs(G) > cvs(G) = 4$.



La recontamination aide dans le cas connexe

Cas d'un fugitif visible

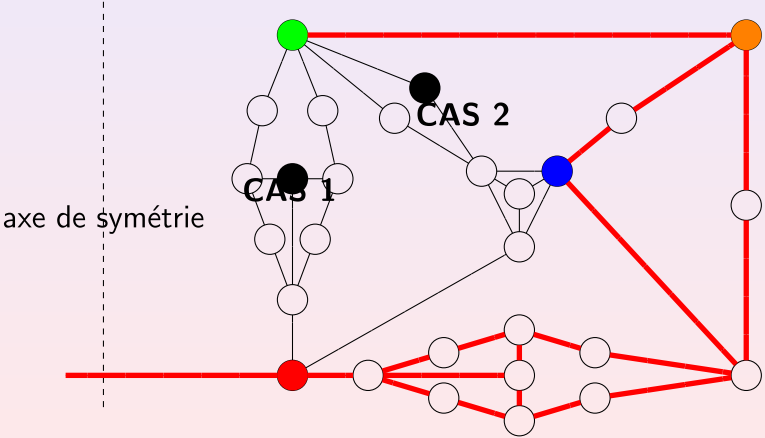
Soit G le graphe ci-dessous : $mcvs(G) > cvs(G) = 4$.



La recontamination aide dans le cas connexe

Cas d'un fugitif visible

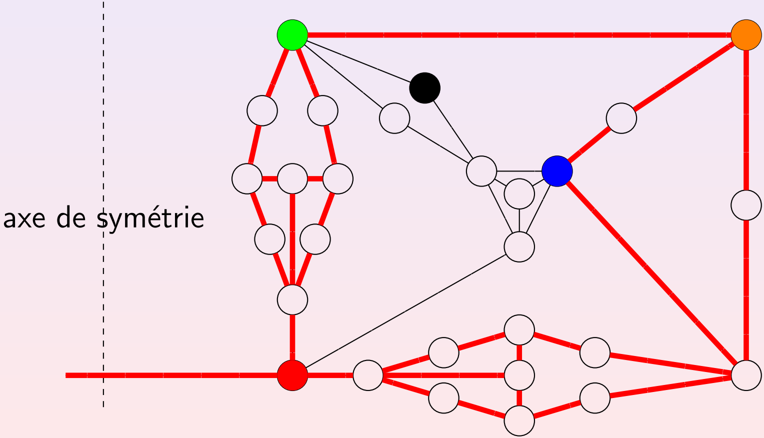
Soit G le graphe ci-dessous : $mcvs(G) > cvs(G) = 4$.



La recontamination aide dans le cas connexe

Cas d'un fugitif visible

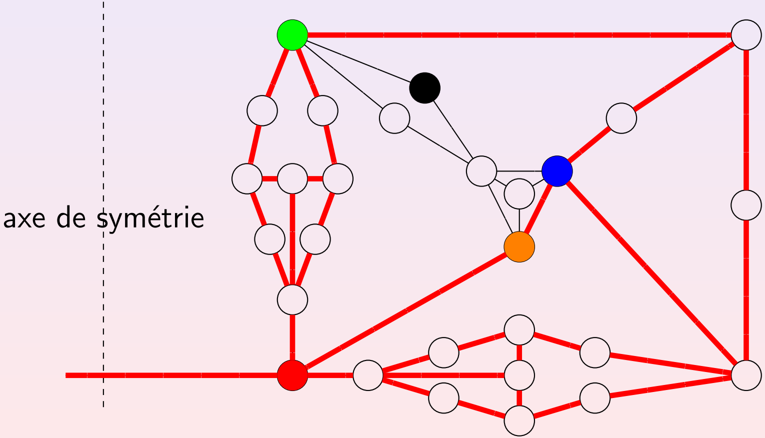
Soit G le graphe ci-dessous : $mcvs(G) > cvs(G) = 4$.



La recontamination aide dans le cas connexe

Cas d'un fugitif visible

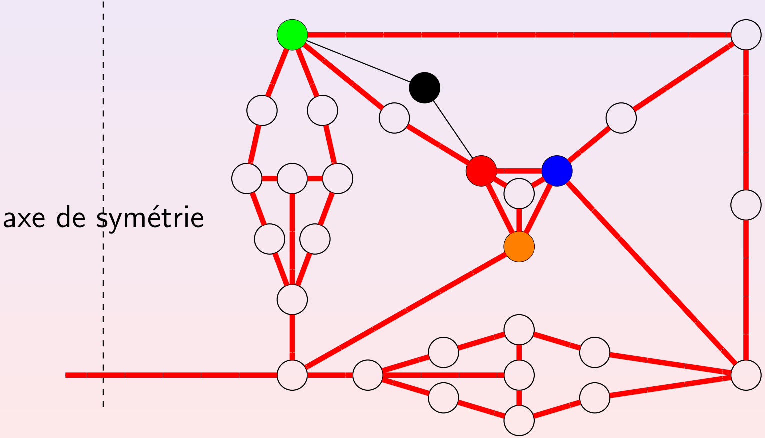
Soit G le graphe ci-dessous : $mcvs(G) > cvs(G) = 4$.



La recontamination aide dans le cas connexe

Cas d'un fugitif visible

Soit G le graphe ci-dessous : $mcvs(G) > cvs(G) = 4$.



Plan

Conclusion

Importance de la monotonie

- complexité du problème ;
- difficulté de concevoir des stratégies non monotones.

Le challenge connexe

- La recontamination aide dans les cas connexes.

Perspectives

- algorithme pour calculer des stratégies optimales (et donc pas forcement monotones) dans le cas connexe.
- trouver des “petits” graphes pour lesquels la recontamination aide.