Introduction à la thérorie des jeux combinatoires

Nicolas Nisse

Inria, France

Univ. Nice Sophia Antipolis, CNRS, I3S, Sophia Antipolis, France

Lycée des Remparts, Marseille, 17 avril 2015

(Merci à F. Havet pour ses transparents)

Outline

1. 3 Exemples de jeux combinatoires impartiaux
2. Jeux combinatoires impartiaux
3. Jeu de Nim et combinaison de jeux impartiaux
4. Jeux partisans

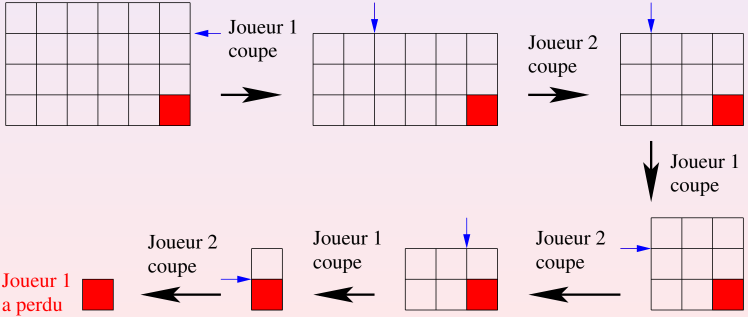
Jeu du chocolat empoisonné – règle

2 Joueurs jouent tour-à-tour.

Chaque joueur à son tour coupe suivant une coupe verticale ou horizontale une partie de la plaquette de chocolat qu'il doit manger.

Le joueur qui mange le carreau en bas à droite perd.

Exemple de partie:



Jeu du chocolat empoisonné – stratégie

Stratégie gagnante: toujours couper de manière à ce que la plaquette de chocolat restante soit carrée.

- Si la plaquette est carrée au départ, le Joueur 2 gagne.
- Sinon, le Joueur 1 gagne.

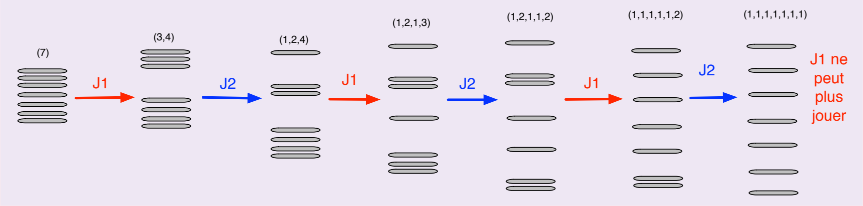
Jeu de Grundy simple – règle

Initialement: un tas de n allumettes.

Chaque joueur à son tour coupe choisit un tas et le divise en deux tas non vides. (on ne peut pas diviser un tas d'une allumette)

Le joueur qui ne peut plus jouer perd.

Exemple de partie pour $n = 7$:



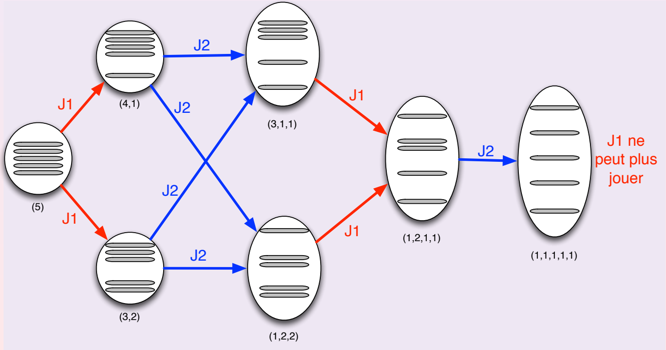
Jeu de Grundy simple – règle

Initialement: un tas de n allumettes.

Chaque joueur à son tour coupe choisit un tas et le divise en deux tas non vides. (on ne peut pas diviser un tas d'une allumette)

Le joueur qui ne peut plus jouer perd.

Graphe des parties possibles pour $n = 5$:



Jeu de Grundy simple – stratégie

Remarques

- Initialement, il y a un tas.
- À chaque tour, il y a exactement un tas de plus
- Lorsque il y a n tas, le jeu se termine

$\Rightarrow$ il y a exactement $n-1$ tours

Quelles que soient les stratégies des deux joueurs :

- Si n est impair, le Joueur 2 gagne.
- Sinon, le Joueur 1 gagne.

Jeu de Grundy simple – stratégie

Remarques

- Initialement, il y a un tas.
- À chaque tour, il y a exactement un tas de plus
- Lorsque il y a n tas, le jeu se termine

$\Rightarrow$ il y a exactement $n-1$ tours

Quelles que soient les stratégies des deux joueurs :

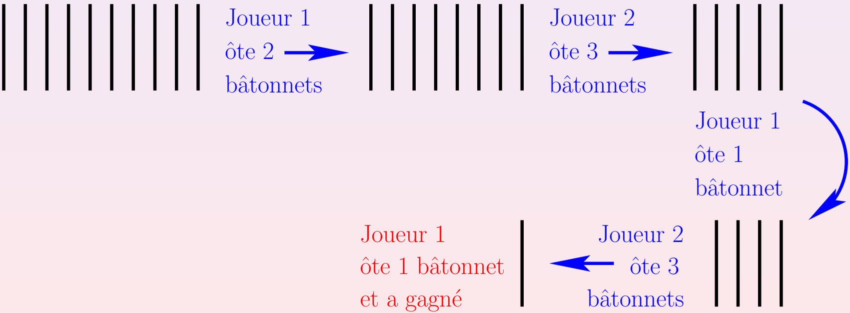
- Si n est impair, le Joueur 2 gagne.
- Sinon, le Joueur 1 gagne.

Jeu des bâtonnets – règle

Initialement: un tas de n bâtonnets.

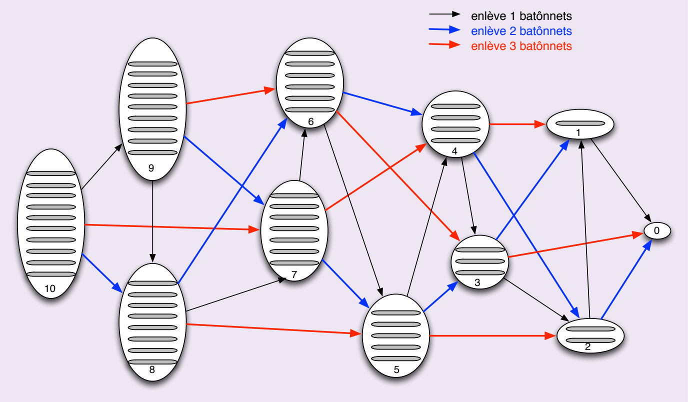
Chaque joueur à son tour prend 1, 2 ou 3 bâtonnets.
Le joueur qui prend le dernier bâtonnet gagne.

Exemple de partie avec 10 bâtonnets :



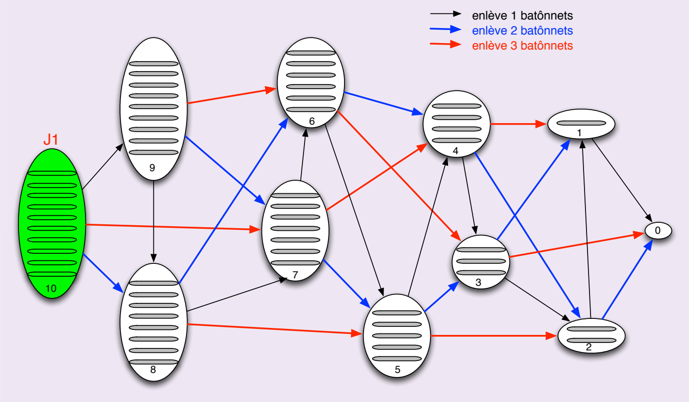
Jeu des bâtonnets – exemple $n \leq 10$

Graphe des parties possibles pour $n \leq 10$:



Jeu des bâtonnets – exemple $n \leq 10$

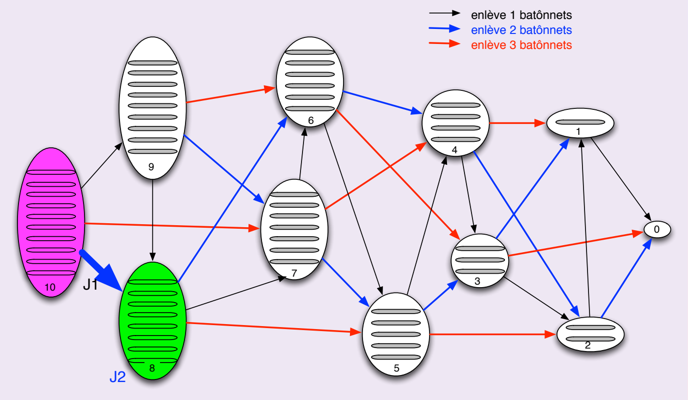
Graphe des parties possibles pour $n \leq 10$:



Revoyons la partie de l'exemple précédent

Jeu des bâtonnets – exemple $n \leq 10$

Graphe des parties possibles pour $n \leq 10$:

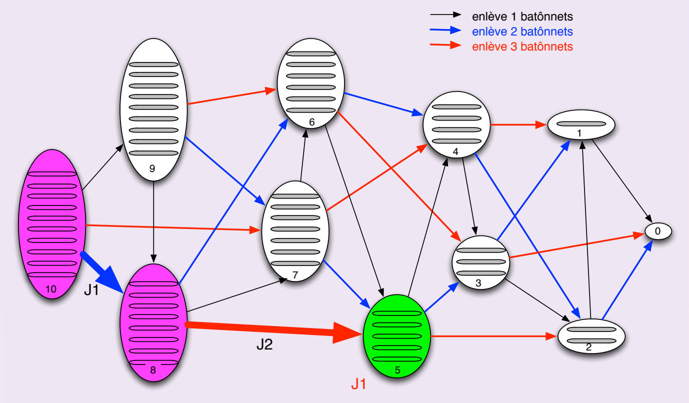


Revoyons la partie de l'exemple précédent

$J1$ retire 2 bâtonnets,

Jeu des bâtonnets – exemple $n \leq 10$

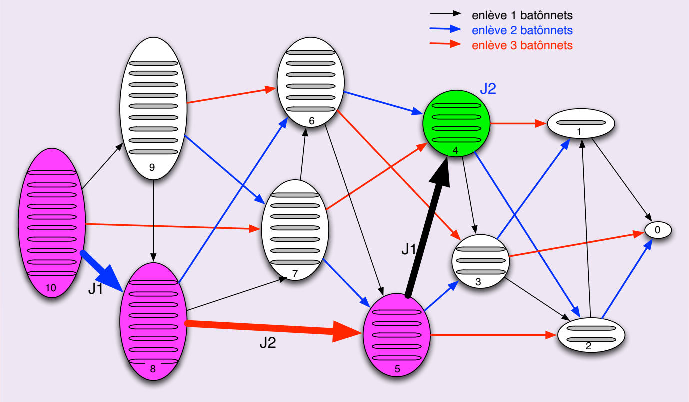
Graphe des parties possibles pour $n \leq 10$:



Revoyons la partie de l'exemple précédent
$J1$ retire 2 bâtonnets, $J2$ retire 3 bâtonnets,

Jeu des bâtonnets – exemple $n \leq 10$

Graphe des parties possibles pour $n \leq 10$:

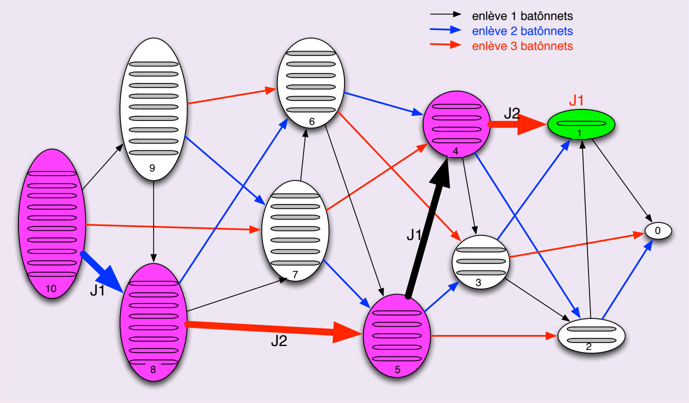


Revoyons la partie de l'exemple précédent

$J1$ retire 2 bâtonnets, $J2$ retire 3 bâtonnets, $J1$ retire 1 bâtonnet,

Jeu des bâtonnets – exemple $n \leq 10$

Graphe des parties possibles pour $n \leq 10$:

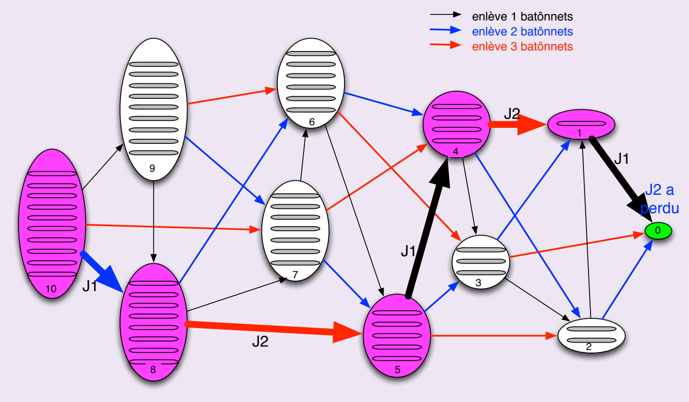


Revoyons la partie de l'exemple précédent

$J1$ retire 2 bâtonnets, $J2$ retire 3 bâtonnets, $J1$ retire 1 bâtonnet, $J2$ retire 3 bâtonnets,

Jeu des bâtonnets – exemple $n \leq 10$

Graphe des parties possibles pour $n \leq 10$:



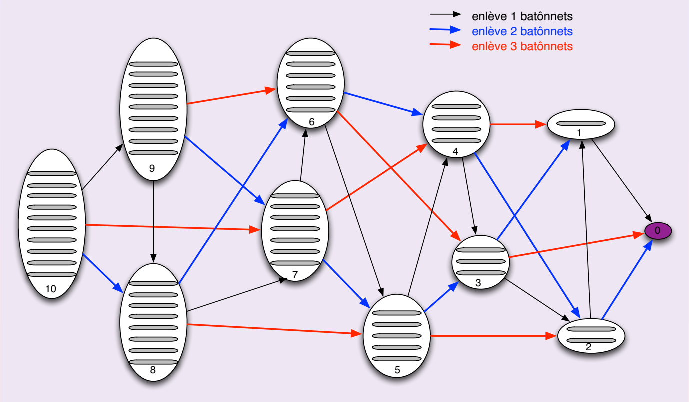
Revoyons la partie de l'exemple précédent

$J1$ retire 2 bâtonnets, $J2$ retire 3 bâtonnets, $J1$ retire 1 bâtonnet,

$J2$ retire 3 bâtonnets, $J1$ retire 1 bâtonnet et gagne.

Jeu des bâtonnets – Quand Joueur 1 gagne t'il ?

Graphe des parties possibles pour $n \leq 10$:



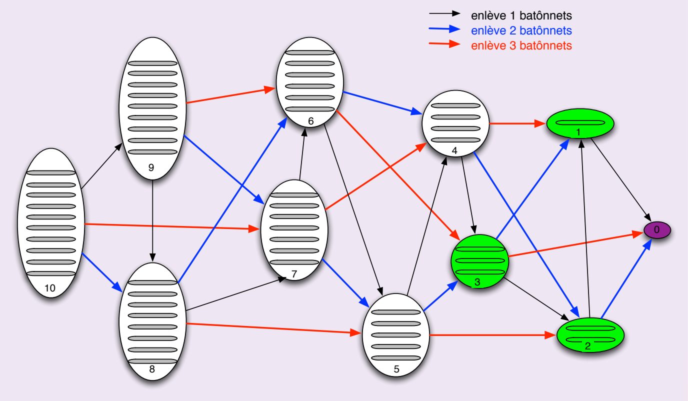
À partir de quelles configurations, Joueur 1 peut-il gagner ?

$J1$ peut gagner :

$J1$ doit perdre :

Jeu des bâtonnets – Quand Joueur 1 gagne t'il ?

Graphe des parties possibles pour $n \leq 10$:



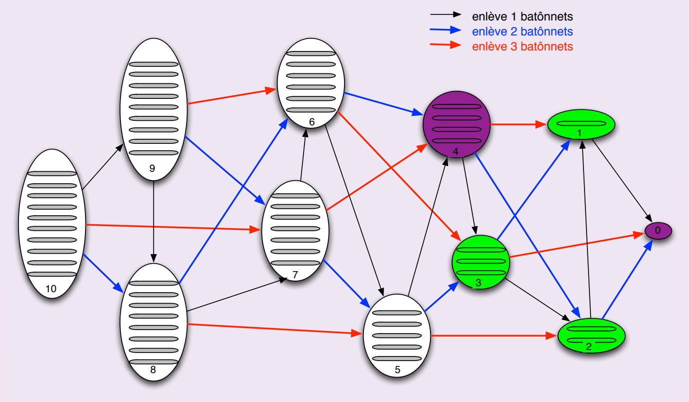
À partir de quelles configurations, Joueur 1 peut-il gagner ?

$J1$ peut gagner : $\exists$ coup vers configuration où l'autre joueur perd

$J1$ doit perdre :

Jeu des bâtonnets – Quand Joueur 1 gagne t'il ?

Graphe des parties possibles pour $n \leq 10$:



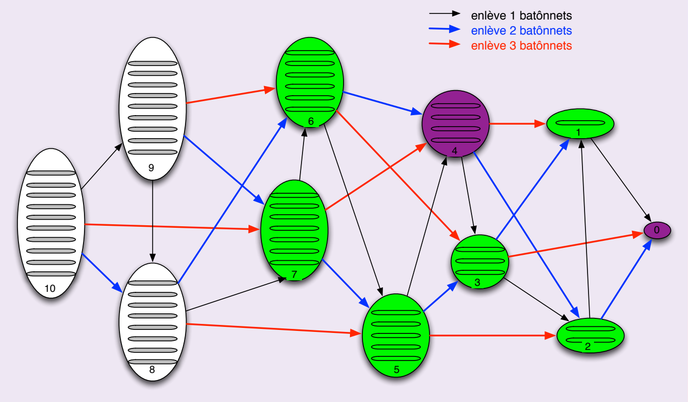
À partir de quelles configurations, Joueur 1 peut-il gagner ?

*J*1 peut gagner : $\exists$ coup vers configuration où l'autre joueur perd

*J*1 doit perdre : $\forall$ coup vers configuration où l'autre joueur gagne

Jeu des bâtonnets – Quand Joueur 1 gagne t'il ?

Graphe des parties possibles pour $n \leq 10$:



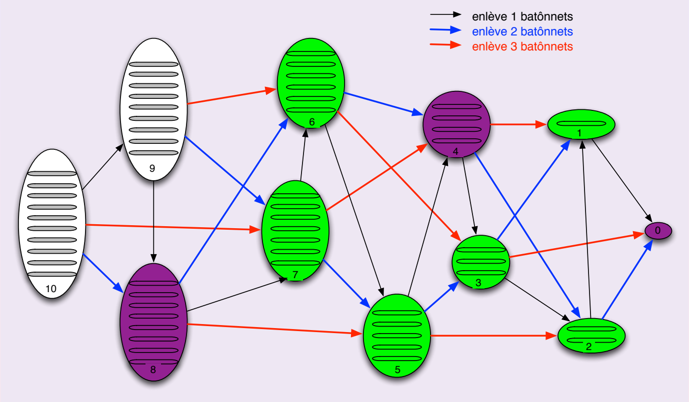
À partir de quelles configurations, Joueur 1 peut-il gagner ?

$J1$ peut gagner : $\exists$ coup vers configuration où l'autre joueur perd

$J1$ doit perdre : $\forall$ coup vers configuration où l'autre joueur gagne

Jeu des bâtonnets – Quand Joueur 1 gagne t'il ?

Graphe des parties possibles pour $n \leq 10$:



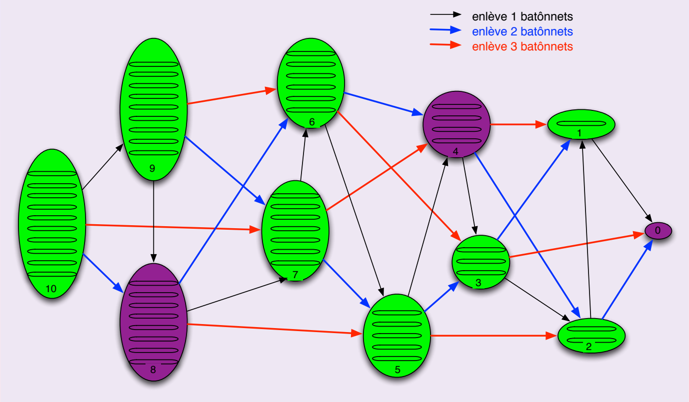
À partir de quelles configurations, Joueur 1 peut-il gagner ?

$J1$ peut gagner : $\exists$ coup vers configuration où l'autre joueur perd

$J1$ doit perdre : $\forall$ coup vers configuration où l'autre joueur gagne

Jeu des bâtonnets – Quand Joueur 1 gagne t'il ?

Graphe des parties possibles pour $n \leq 10$:



À partir de quelles configurations, Joueur 1 peut-il gagner ?

$J1$ peut gagner : $\exists$ coup vers configuration où l'autre joueur perd

$J1$ doit perdre : $\forall$ coup vers configuration où l'autre joueur gagne

Jeu des bâtonnets – positions perdantes et gagnantes

Examinons les positions quand je dois jouer, en fonction du nombre de bâtonnets restant.

- 1, 2, ou 3 bâtonnets: gagné. Je peux ôter tous les bâtonnets pour qu'il n'en reste plus. L'autre joueur a alors perdu.
- 4 bâtonnets: perdu. Que j'enlève 1, 2 ou 3 bâtonnets, il en restera 3, 2 ou 1, et l'autre joueur gagne (s'il joue correctement).
- 5, 6, ou 7 bâtonnets: gagné. Je peux ôter 1, 2 ou 3 bâtonnets pour qu'il en reste 4, position où l'autre joueur perd (si je joue correctement).
- $4k$ bâtonnets: perdu. Que j'enlève 1, 2 ou 3 bâtonnets, il en restera $4k-1$, $4k-2$ ou $4k-3$, positions où l'autre joueur gagne.
- $4k+1$, $4k+2$, ou $4k+3$ bâtonnets: gagné. Je peux ôter 1, 2 ou 3 bâtonnets pour qu'il en reste $4k$, position où l'autre joueur perd.

Jeu des bâtonnets – stratégie

S'il y a $4k$ bâtonnets (4,8,12,...) alors le Joueur 2 gagne.

Stratégie: se ramener à un multiple de 4.

Si l'adversaire a ôté	1 bâtonnet,	en elever 3;
	2 bâtonnets,	en elever 2;
	3 bâtonnets,	en elever 1.

Sinon le Joueur 1 gagne.

Stratégie: Enlever 1, 2 ou 3 bâtonnets pour qu'il en reste $4k$ et appliquer ensuite la stratégie ci-dessus.

Résumé des épisodes précédents

3 exemples précédents (tablette de chocolat, jeu de Grundy simple, jeu des bâtonnets) très similaires.

Ce sont tous des jeux combinatoires impartiaux.

1. Les deux joueurs jouent à tour de rôle.
2. Toutes les informations concernant le jeu (configurations, possibilités de mouvement des joueurs) sont connues à chaque instant des deux joueurs (l'information est complète).
3. Aucun hasard n'intervient dans le jeu (pas de lancer de dé, ni de distribution aléatoire de cartes, etc.).
4. Le jeu termine forcément (pas de match nul).
5. Pour une configuration donnée, les possibilités de mouvement ne dépendent pas du joueur.

Résumé des épisodes précédents

3 exemples précédents (tablette de chocolat, jeu de Grundy simple, jeu des bâtonnets) très similaires.

Ce sont tous des jeux combinatoires impartiaux.

1. Les deux joueurs jouent à tour de rôle.
2. Toutes les informations concernant le jeu (configurations, possibilités de mouvement des joueurs) sont connues à chaque instant des deux joueurs (l'information est complète).
3. Aucun hasard n'intervient dans le jeu (pas de lancer de dé, ni de distribution aléatoire de cartes, etc.).
4. Le jeu termine forcément (pas de match nul).
5. Pour une configuration donnée, les possibilités de mouvement ne dépendent pas du joueur.

Résumé des épisodes précédents

Ce sont tous des jeux combinatoires impartiaux.

1. Les deux joueurs jouent à tour de rôle.
2. Toutes les informations concernant le jeu (configurations, possibilités de mouvement des joueurs) sont connues à chaque instant des deux joueurs (l'information est complète).
3. Aucun hasard n'intervient dans le jeu (pas de lancer de dé, ni de distribution aléatoire de cartes, etc.).
4. Le jeu termine forcément (pas de match nul).
5. Pour une configuration donnée, les possibilités de mouvement ne dépendent pas du joueur.

Dans les exemples précédents : étant donnée une configuration initiale

- Soit le Joueur 1 a une stratégie gagnante (même si $J2$ joue bien)
- Soit, quoi qu'il fasse, $J1$ perd contre un $J2$ qui joue bien.

Outline

1 3 Exemples de jeux combinatoires impartiaux

2 Jeux combinatoires impartiaux

3 Jeu de Nim et combinaison de jeux impartiaux

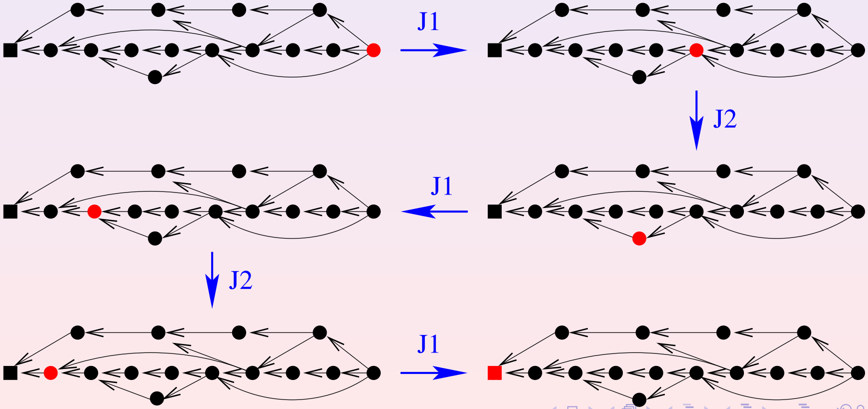
4 Jeux partisans

Jeu sur un graphe (orienté acyclique) – règle

Un graphe orienté acyclique et un pion (rouge) sur un sommet.

Chacun à son tour, les joueurs déplace le pion suivant un arc du graphe.

Le joueur qui ne peut plus bouger perd.



Théorème de Sprague-Grundy

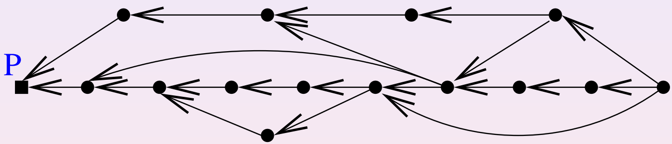
Théorème de Sprague-Grundy

Pour tout jeu sur un graphe orienté acyclique, il existe une stratégie gagnante pour l'un des deux joueurs.

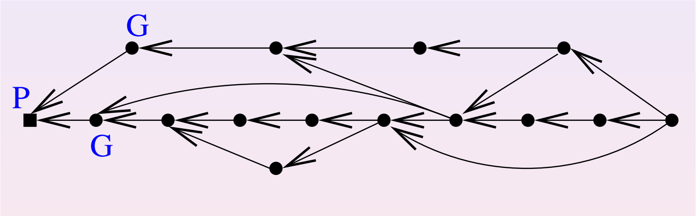
Pour trouver cette stratégie, déterminer pour chaque sommet s'il est perdant ou gagnant.

- les sommets desquels aucuns arcs ne sortent sont perdants;
- si un sommet pointe vers au moins un sommet perdant alors il est *gagnant*;
- si un sommet pointe uniquement vers des sommets gagnants alors il est *perdant*.

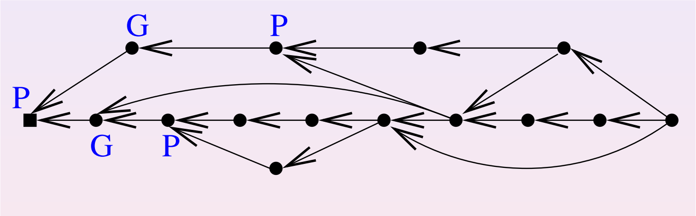
Trouver les sommets gagnants et perdants



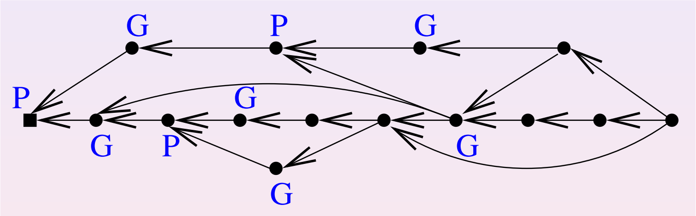
Trouver les sommets gagnants et perdants



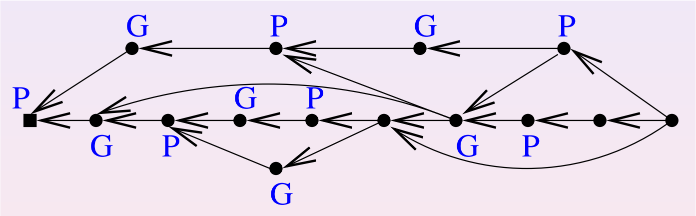
Trouver les sommets gagnants et perdants



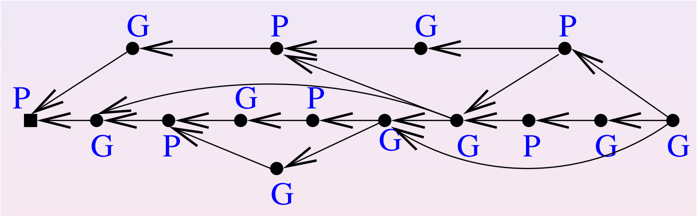
Trouver les sommets gagnants et perdants



Trouver les sommets gagnants et perdants



Trouver les sommets gagnants et perdants



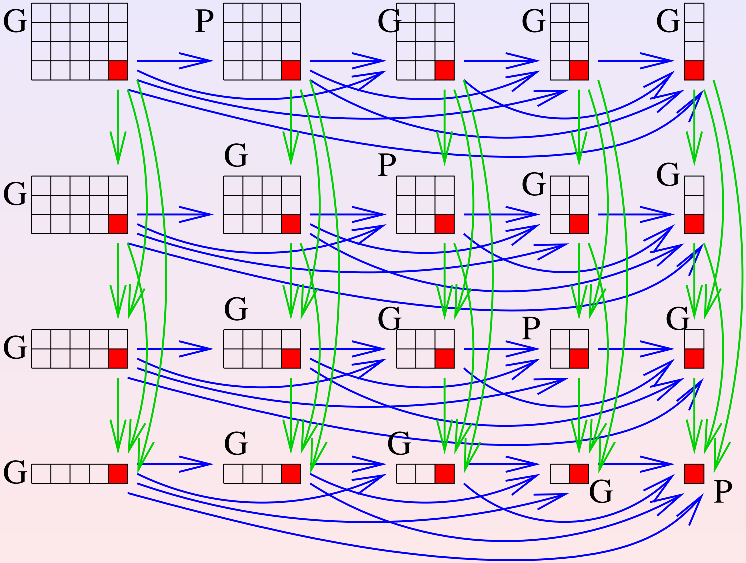
Jeu sur un graphe – stratégie

Stratégie gagnante: Bouger le pion vers un sommet perdant.

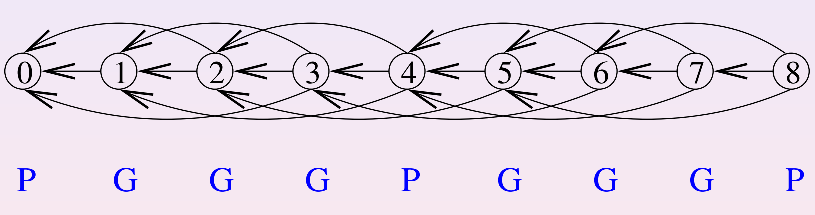
- possible si le pion est sur un sommet gagnant,
- impossible si le pion est sur un sommet perdant.

Si le sommet de départ est gagnant, le Joueur 1 gagne.
Si le sommet de départ est perdant, le Joueur 2 gagne.

Graphe du jeu du chocolat



Graphe du jeu des bâtonnets



Outline

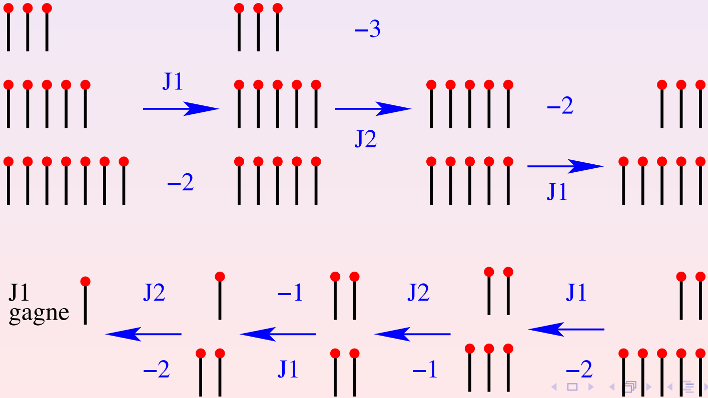
1. 3 Exemples de jeux combinatoires impartiaux
2. Jeux combinatoires impartiaux
3. Jeu de Nim et combinaison de jeux impartiaux
4. Jeux partisans

Jeu de Nim – règle

Initialement: k tas d'allumettes.

Chaque joueur à son tour choisit un tas et prend autant d'allumettes qu'il le veut dans ce tas. Le joueur qui prend la dernière allumette gagne.

Exemple de partie avec 3 tas de $3, 5$ et 7 allumettes :



Jeu de Nim – règle

Initialement: k tas d'allumettes.

Chaque joueur à son tour choisit un tas et prend autant d'allumettes qu'il le veut dans ce tas. Le joueur qui prend la dernière allumette gagne.

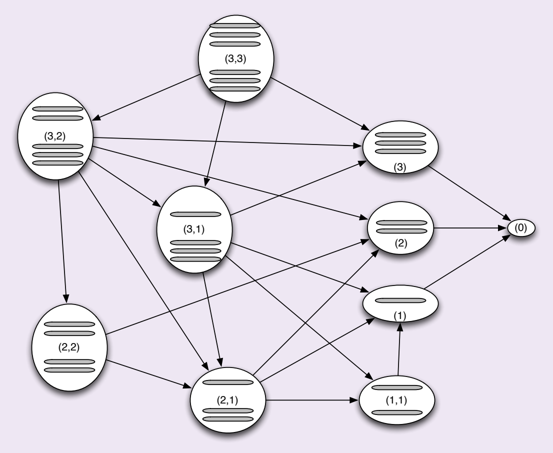
Cas $k = 1$ tas
Stratégie triviale ??

Jeu de Nim – règle

Initialement: k tas d'allumettes.

Chaque joueur à son tour choisit un tas et prend autant d'allumettes qu'il le veut dans ce tas. Le joueur qui prend la dernière allumette gagne.

Exemple de 2 tas de 3 allumettes :



Jeu de Nim – règle

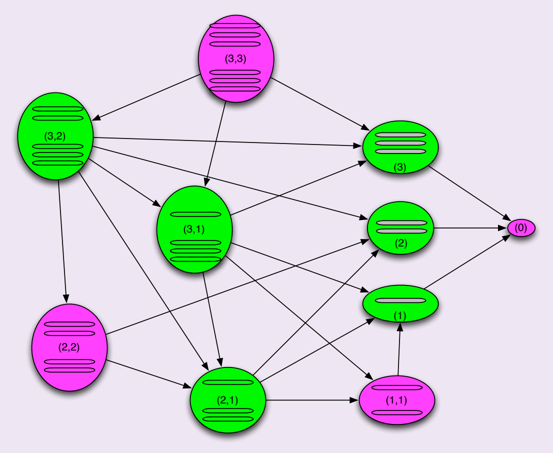
Initialement: k tas d'allumettes.

Chaque joueur à son tour choisit un tas et prend autant d'allumettes qu'il le veut dans ce tas. Le joueur qui prend la dernière allumette gagne.

Exemple de 2 tas de 3 allumettes :

$J1$ peut gagner

$J1$ doit perdre



Jeu de Nim à un et deux tas

Le jeu à 1 tas est très simple. Le premier joueur gagne. Il peut en effet enlever toutes les allumettes.

Le jeu de Nim à deux tas ressemble à celui du chocolat.
Stratégie: Egaliser le nombre d'allumettes dans les 2 tas.

Et sur 3 tas ??

Jeu sur deux graphes

Deux graphes G_1 et G_2 disjoints avec un pion sur chaque. Chacun à son tour, les joueurs bougent un pion sur un des graphes de son choix. Celui qui ne peux pas bouger de pion a perdu.

On peut le voir comme le jeu sur le graphe $G_1 \oplus G_2$ de toutes les configurations possibles sur les 2 graphes.

Déterminer les positions gagnantes et perdantes de $G_1 \oplus G_2$ peut se faire, mais c'est long et compliqué (surtout de tête) car $G_1 \oplus G_2$ a beaucoup de sommets ($|G_1| \times |G_2|$).

Peut-on déduire si une position est gagnante ou perdante pour $G_1 \oplus G_2$ simplement en connaissant les positions gagnantes et perdantes pour G_1 et G_2?

Positions gagnantes et perdantes sur deux graphes

perdante sur G_1 et perdante sur $G_2 \Longrightarrow$ perdante pour $G_1 \oplus G_2$.

En bougeant un pion sur un des graphes, le joueur 1 est obligé d'atteindre une position gagnante sur ce graphe. Il suffit alors au Joueur 2 de bouger le pion sur ce même graphe sur une position perdante.

gagnante sur G_1 et perdante sur $G_2 \Longrightarrow$ gagnante pour $G_1 \oplus G_2$.

Le joueur 1 bouge vers une position perdante sur G_1 et applique la stratégie précédente.

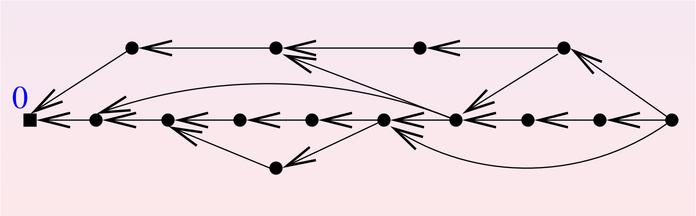
gagnante sur G_1 et perdante sur $G_2 \Longrightarrow$ **????** pour $G_1 \oplus G_2$.

Pour le Jeu de Nim, 1 et 2 sont toutes deux gagnantes sur une ligne mais (1,1) est perdante et (1,2) est gagnante.

Fonction de Sprague-Grundy

nombre de Sprague-Grundy:

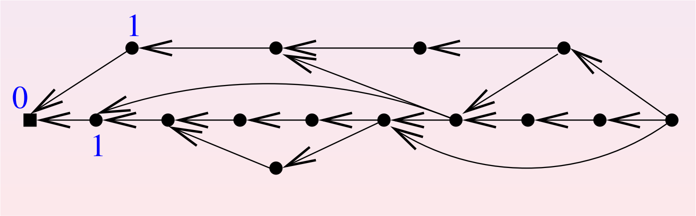
- les sommets desquels aucun arc pointe ont pour nombre 0;
- pour tout sommet le nombre de Sprague-Grundy est le plus petit entier positif qui n'apparait pas sur les sommets vers lequel il pointe.



Fonction de Sprague-Grundy

nombre de Sprague-Grundy:

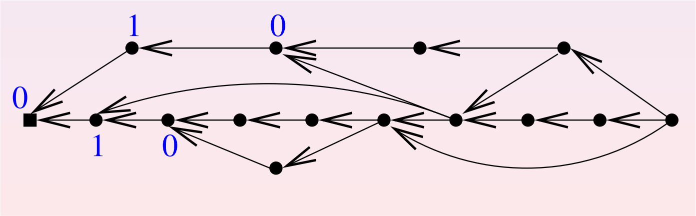
- les sommets desquels aucun arc pointe ont pour nombre 0;
- pour tout sommet le nombre de Sprague-Grundy est le plus petit entier positif qui n'apparait pas sur les sommets vers lequel il pointe.



Fonction de Sprague-Grundy

nombre de Sprague-Grundy:

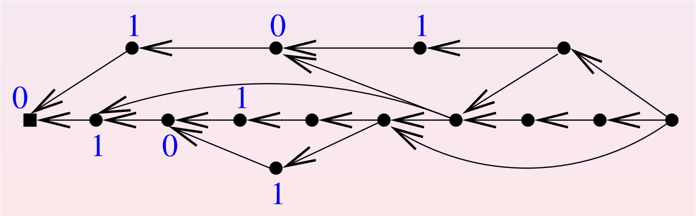
- les sommets desquels aucun arc pointe ont pour nombre 0;
- pour tout sommet le nombre de Sprague-Grundy est le plus petit entier positif qui n'apparait pas sur les sommets vers lequel il pointe.



Fonction de Sprague-Grundy

nombre de Sprague-Grundy:

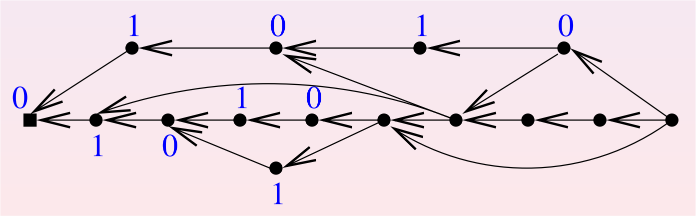
- les sommets desquels aucun arc pointe ont pour nombre 0;
- pour tout sommet le nombre de Sprague-Grundy est le plus petit entier positif qui n'apparait pas sur les sommets vers lequel il pointe.



Fonction de Sprague-Grundy

nombre de Sprague-Grundy:

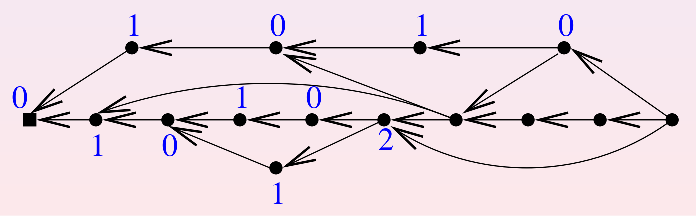
- les sommets desquels aucun arc pointe ont pour nombre 0;
- pour tout sommet le nombre de Sprague-Grundy est le plus petit entier positif qui n'apparait pas sur les sommets vers lequel il pointe.



Fonction de Sprague-Grundy

nombre de Sprague-Grundy:

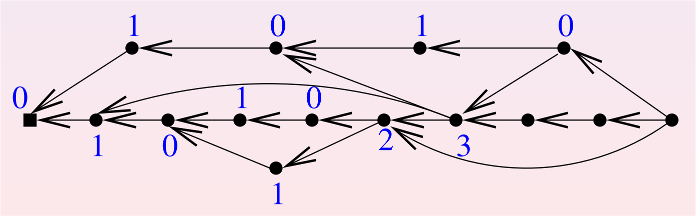
- les sommets desquels aucun arc pointe ont pour nombre 0;
- pour tout sommet le nombre de Sprague-Grundy est le plus petit entier positif qui n'apparait pas sur les sommets vers lequel il pointe.



Fonction de Sprague-Grundy

nombre de Sprague-Grundy:

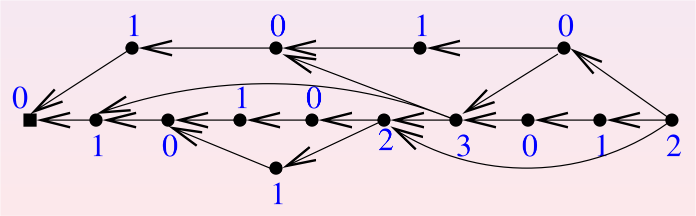
- les sommets desquels aucun arc pointe ont pour nombre 0;
- pour tout sommet le nombre de Sprague-Grundy est le plus petit entier positif qui n'apparait pas sur les sommets vers lequel il pointe.



Fonction de Sprague-Grundy

nombre de Sprague-Grundy:

- les sommets desquels aucun arc pointe ont pour nombre 0;
- pour tout sommet le nombre de Sprague-Grundy est le plus petit entier positif qui n'apparait pas sur les sommets vers lequel il pointe.



Propriétés de la fonction de Sprague-Grundy d'un jeux à deux graphes

Un sommet v est perdant $\Leftrightarrow g(v) = 0$.

$G = G_1 \oplus G_2$, $v = (v_1, v_2)$.
$g(v) = g(v_1) \oplus g(v_2)$ avec $\oplus$ la somme de Nim = somme binaire bit à bit (sans retenue).

Par exemple, 3 s'écrit 011 et 5 s'écrit 101 en binaire. On note 101_2.
$011_2 \oplus 101_2 = 110_2$ soit $3 \oplus 5 = 6$.

Fonction de Sprague-Grundy pour le jeu de Nim

Jeu à une ligne: nombre de Grundy $=$ nombre d'allumettes.

0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	2	3	4	5	6	7	8

Jeu à plusieurs lignes: il faut faire la somme de Nim.
Par exemple, si on a 10, 5 et 3 allumettes:
somme de Nim de 10, 5 et 3: $1010_2 \oplus 0101_2 \oplus 0011_2 = 1100_2$.
La position est gagnante.

Stratégie pour le jeu de Nim

Si on a des lignes telle que la somme de Nim de leur taille ne soit pas 0. La position est gagnante mais que jouer??

3 lignes de 10, 5 et 3 allumettes
$1010_2 \oplus 0101_2 \oplus 0011_2 = 1100_2$.

- On prend le bit de plus gros poids à 1 dans la somme. 1100_2
- On prend une ligne pour laquelle ce bit est à 1. 1010_2
- On réduit cette ligne de facon à égaler la somme de Nim des autres sur les bits plus faibles.
  $101_2 \oplus 011_2 = 110_2 = 6$. On réduit donc la ligne de 10 a 6 allumettes.

Jeu de Grundy

A chaque étape, il y a un certain nombre de piles de jetons. Le joueur qui doit jouer doit prendre une des piles et la séparer en deux piles de tailles différentes. Le joueur qui ne peut plus jouer (i.e. quand toutes les piles sont de taille 1 ou 2) a perdu.

Pour comprendre ce jeu, cela revient à connaitre la fonction de Grundy $g(n)$ pour une pile à n jetons.

On a calculé $g(n)$ jusqu'à 2^{35}.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
$g(n)$	0	0	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	3	

La suite $g(n)$ suite est-elle périodique? Est-elle bornée?

Outline

1. 3 Exemples de jeux combinatoires impartiaux
2. Jeux combinatoires impartiaux
3. Jeu de Nim et combinaison de jeux impartiaux
4. **Jeux partisans**

Jeux impartiaux

Tous les jeux que nous avons vus sont impartiaux.

1. Les deux joueurs jouent à tour de rôle.
2. Toutes les informations concernant le jeu (configurations, possibilités de mouvement des joueurs) sont connues à chaque instant des deux joueurs (l'information est complète).
3. Aucun hasard n'intervient dans le jeu (pas de lancer de dé, ni de distribution aléatoire de cartes, etc.).
4. Le jeu termine forcément (pas de match nul).
5. Pour une configuration donnée, les possibilités de mouvement ne dépendent pas du joueur.

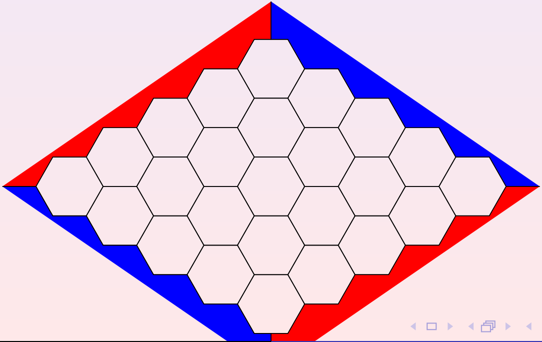
Jeux partisans

Regardons des jeux plus compliqués: jeux partisans.

1) Les deux joueurs jouent à tour de rôle.
2) Toutes les informations concernant le jeu (configurations, possibilités de mouvement des joueurs) sont connues à chaque instant des deux joueurs (l'information est complète).
3) Aucun hasard n'intervient dans le jeu (pas de lancer de dé, ni de distribution aléatoire de cartes, etc.).
4) Le jeu termine forcément (pas de match nul).
5) Pour une configuration donnée, les possibilités de mouvement varient en fonction du joueur.

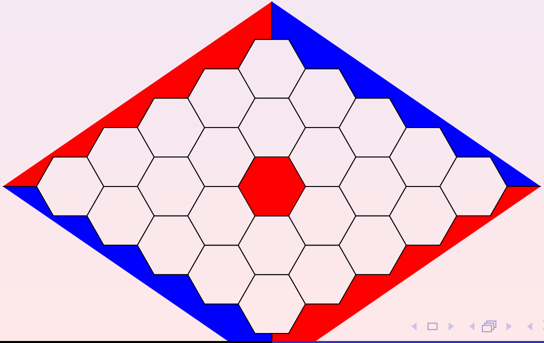
Hex

Plateau en forme de losange dont les cases sont hexagonales. Deux côtés opposés du losange sont rouges, les deux autres sont bleus. Un joueur rouge et un joueur bleu jouent à tour de rôle un pion de leur couleur sur une case libre. Le gagnant est celui qui relie les deux côtés de sa couleur avec un chemin de pions de sa couleur.



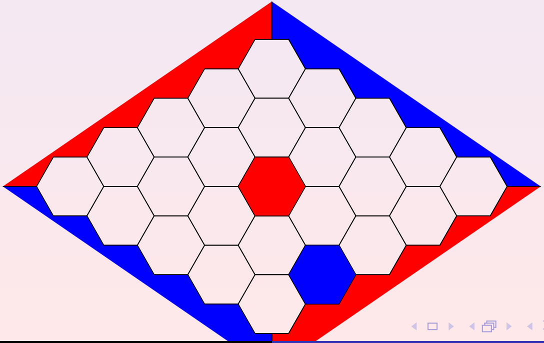
Hex

Plateau en forme de losange dont les cases sont hexagonales. Deux côtés opposés du losange sont rouges, les deux autres sont bleus. Un joueur rouge et un joueur bleu jouent à tour de rôle un pion de leur couleur sur une case libre. Le gagnant est celui qui relie les deux côtés de sa couleur avec un chemin de pions de sa couleur.



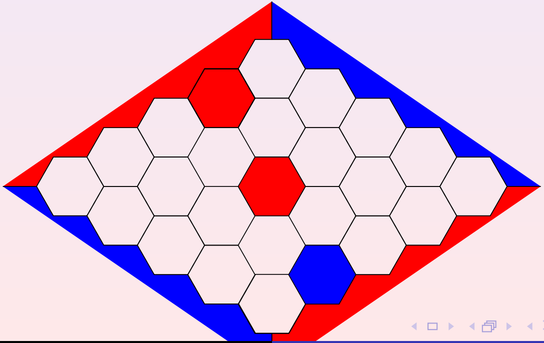
Hex

Plateau en forme de losange dont les cases sont hexagonales. Deux côtés opposés du losange sont rouges, les deux autres sont bleus. Un joueur rouge et un joueur bleu jouent à tour de rôle un pion de leur couleur sur une case libre. Le gagnant est celui qui relie les deux côtés de sa couleur avec un chemin de pions de sa couleur.



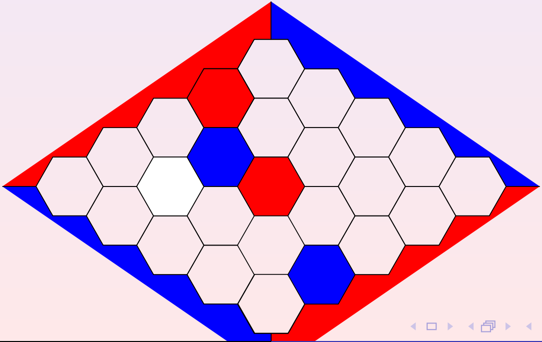
Hex

Plateau en forme de losange dont les cases sont hexagonales. Deux côtés opposés du losange sont rouges, les deux autres sont bleus. Un joueur rouge et un joueur bleu jouent à tour de rôle un pion de leur couleur sur une case libre. Le gagnant est celui qui relie les deux côtés de sa couleur avec un chemin de pions de sa couleur.



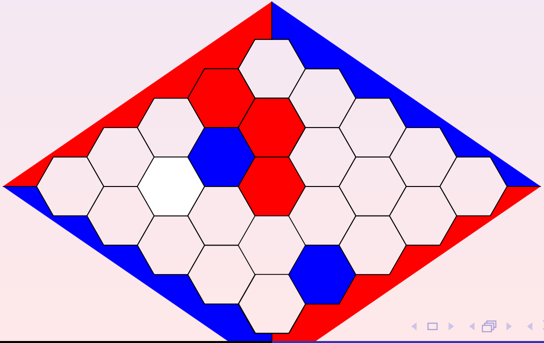
Hex

Plateau en forme de losange dont les cases sont hexagonales. Deux côtés opposés du losange sont rouges, les deux autres sont bleus. Un joueur rouge et un joueur bleu jouent à tour de rôle un pion de leur couleur sur une case libre. Le gagnant est celui qui relie les deux côtés de sa couleur avec un chemin de pions de sa couleur.



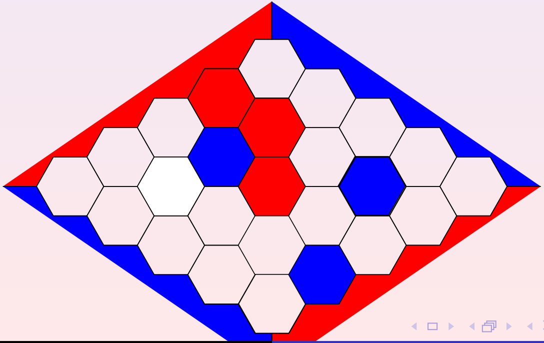
Hex

Plateau en forme de losange dont les cases sont hexagonales. Deux côtés opposés du losange sont rouges, les deux autres sont bleus. Un joueur rouge et un joueur bleu jouent à tour de rôle un pion de leur couleur sur une case libre. Le gagnant est celui qui relie les deux côtés de sa couleur avec un chemin de pions de sa couleur.



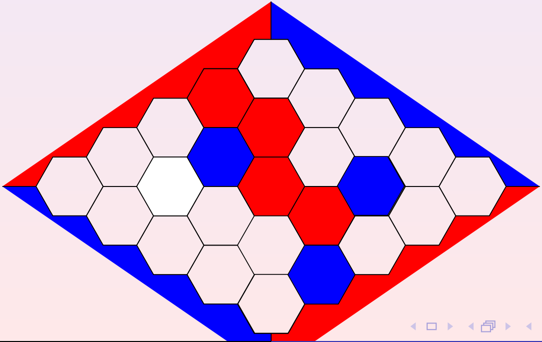
Hex

Plateau en forme de losange dont les cases sont hexagonales. Deux côtés opposés du losange sont rouges, les deux autres sont bleus. Un joueur rouge et un joueur bleu jouent à tour de rôle un pion de leur couleur sur une case libre. Le gagnant est celui qui relie les deux côtés de sa couleur avec un chemin de pions de sa couleur.



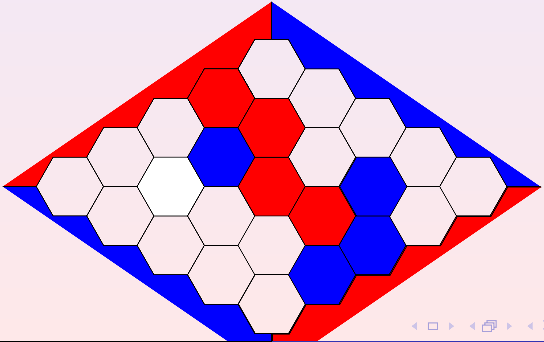
Hex

Plateau en forme de losange dont les cases sont hexagonales. Deux côtés opposés du losange sont rouges, les deux autres sont bleus. Un joueur rouge et un joueur bleu jouent à tour de rôle un pion de leur couleur sur une case libre. Le gagnant est celui qui relie les deux côtés de sa couleur avec un chemin de pions de sa couleur.



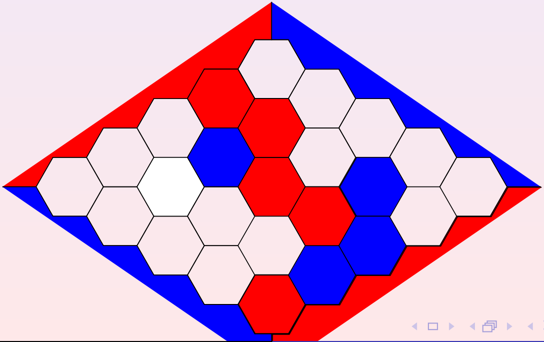
Hex

Plateau en forme de losange dont les cases sont hexagonales. Deux côtés opposés du losange sont rouges, les deux autres sont bleus. Un joueur rouge et un joueur bleu jouent à tour de rôle un pion de leur couleur sur une case libre. Le gagnant est celui qui relie les deux côtés de sa couleur avec un chemin de pions de sa couleur.



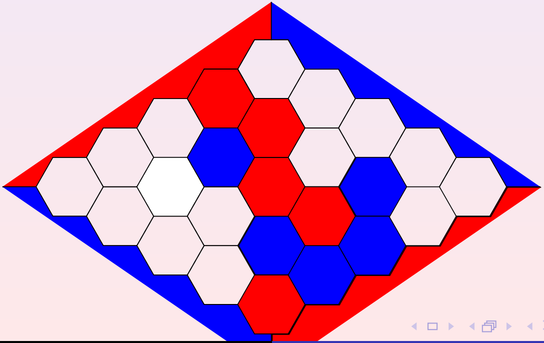
Hex

Plateau en forme de losange dont les cases sont hexagonales. Deux côtés opposés du losange sont rouges, les deux autres sont bleus. Un joueur rouge et un joueur bleu jouent à tour de rôle un pion de leur couleur sur une case libre. Le gagnant est celui qui relie les deux côtés de sa couleur avec un chemin de pions de sa couleur.



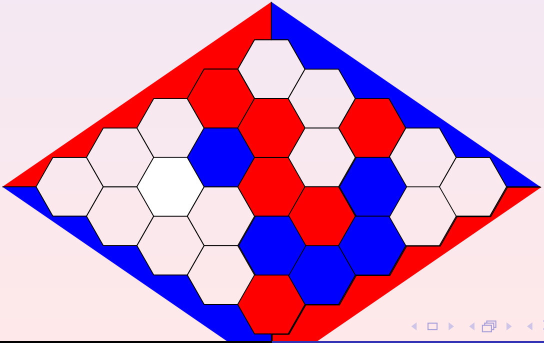
Hex

Plateau en forme de losange dont les cases sont hexagonales. Deux côtés opposés du losange sont rouges, les deux autres sont bleus. Un joueur rouge et un joueur bleu jouent à tour de rôle un pion de leur couleur sur une case libre. Le gagnant est celui qui relie les deux côtés de sa couleur avec un chemin de pions de sa couleur.



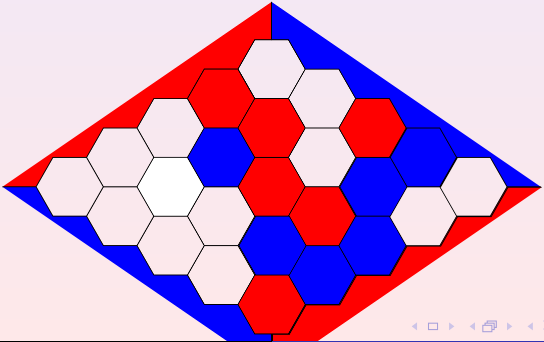
Hex

Plateau en forme de losange dont les cases sont hexagonales. Deux côtés opposés du losange sont rouges, les deux autres sont bleus. Un joueur rouge et un joueur bleu jouent à tour de rôle un pion de leur couleur sur une case libre. Le gagnant est celui qui relie les deux côtés de sa couleur avec un chemin de pions de sa couleur.



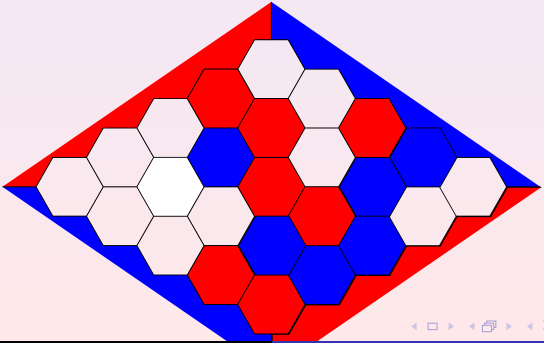
Hex

Plateau en forme de losange dont les cases sont hexagonales. Deux côtés opposés du losange sont rouges, les deux autres sont bleus. Un joueur rouge et un joueur bleu jouent à tour de rôle un pion de leur couleur sur une case libre. Le gagnant est celui qui relie les deux côtés de sa couleur avec un chemin de pions de sa couleur.



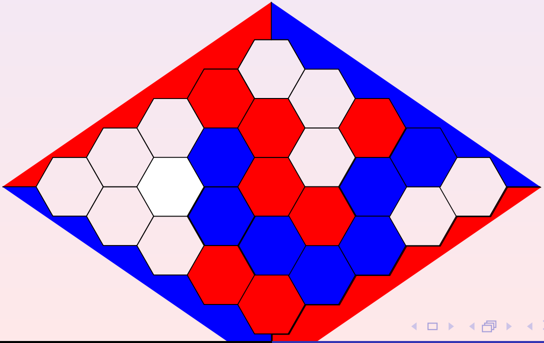
Hex

Plateau en forme de losange dont les cases sont hexagonales. Deux côtés opposés du losange sont rouges, les deux autres sont bleus. Un joueur rouge et un joueur bleu jouent à tour de rôle un pion de leur couleur sur une case libre. Le gagnant est celui qui relie les deux côtés de sa couleur avec un chemin de pions de sa couleur.



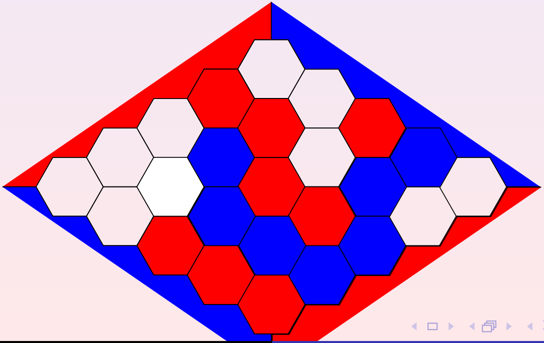
Hex

Plateau en forme de losange dont les cases sont hexagonales. Deux côtés opposés du losange sont rouges, les deux autres sont bleus. Un joueur rouge et un joueur bleu jouent à tour de rôle un pion de leur couleur sur une case libre. Le gagnant est celui qui relie les deux côtés de sa couleur avec un chemin de pions de sa couleur.



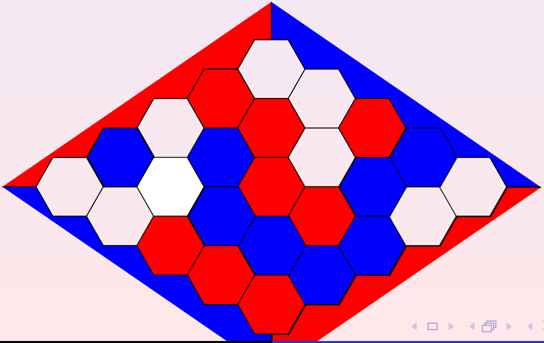
Hex

Plateau en forme de losange dont les cases sont hexagonales. Deux côtés opposés du losange sont rouges, les deux autres sont bleus. Un joueur rouge et un joueur bleu jouent à tour de rôle un pion de leur couleur sur une case libre. Le gagnant est celui qui relie les deux côtés de sa couleur avec un chemin de pions de sa couleur.



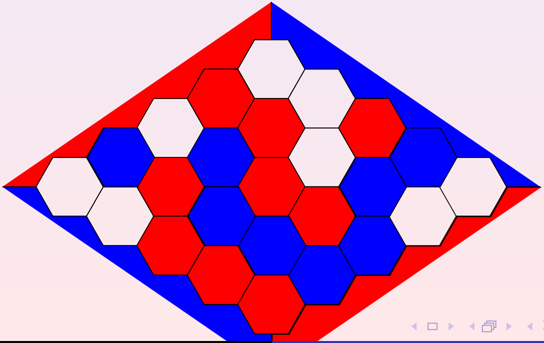
Hex

Plateau en forme de losange dont les cases sont hexagonales. Deux côtés opposés du losange sont rouges, les deux autres sont bleus. Un joueur rouge et un joueur bleu jouent à tour de rôle un pion de leur couleur sur une case libre. Le gagnant est celui qui relie les deux côtés de sa couleur avec un chemin de pions de sa couleur.



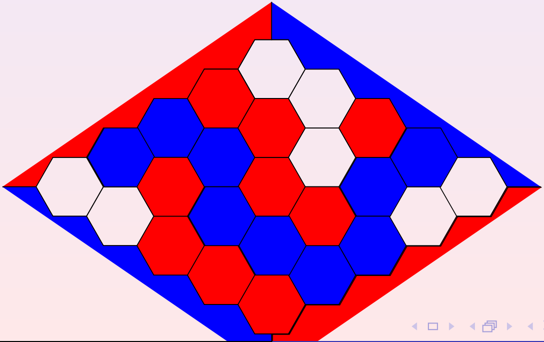
Hex

Plateau en forme de losange dont les cases sont hexagonales. Deux côtés opposés du losange sont rouges, les deux autres sont bleus. Un joueur rouge et un joueur bleu jouent à tour de rôle un pion de leur couleur sur une case libre. Le gagnant est celui qui relie les deux côtés de sa couleur avec un chemin de pions de sa couleur.



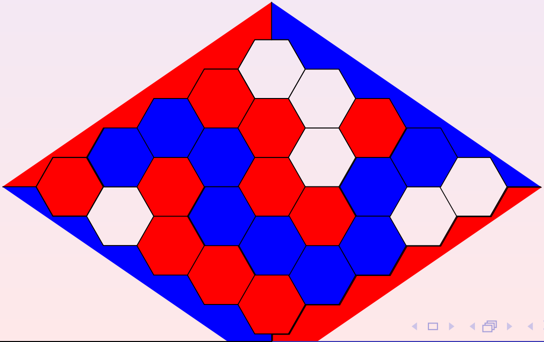
Hex

Plateau en forme de losange dont les cases sont hexagonales. Deux côtés opposés du losange sont rouges, les deux autres sont bleus. Un joueur rouge et un joueur bleu jouent à tour de rôle un pion de leur couleur sur une case libre. Le gagnant est celui qui relie les deux côtés de sa couleur avec un chemin de pions de sa couleur.



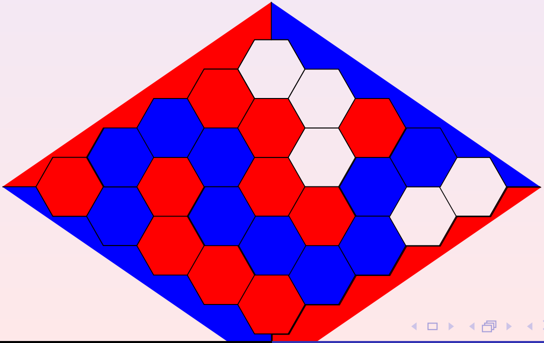
Hex

Plateau en forme de losange dont les cases sont hexagonales. Deux côtés opposés du losange sont rouges, les deux autres sont bleus. Un joueur rouge et un joueur bleu jouent à tour de rôle un pion de leur couleur sur une case libre. Le gagnant est celui qui relie les deux côtés de sa couleur avec un chemin de pions de sa couleur.



Hex

Plateau en forme de losange dont les cases sont hexagonales. Deux côtés opposés du losange sont rouges, les deux autres sont bleus. Un joueur rouge et un joueur bleu jouent à tour de rôle un pion de leur couleur sur une case libre. Le gagnant est celui qui relie les deux côtés de sa couleur avec un chemin de pions de sa couleur.



Vol de stratégie

Le jeu Hex termine forcément $\Rightarrow$ un des joueurs à une stratégie gagnante.

Ca ne peut pas être le Joueur 2 car le Joueur 1 pourrait lui voler sa stratégie:

- Jouer un premier coup au hasard.
- Appliquer la stratégie du Joueur 2, (en jouant un nouveau coup au hasard si le coup à faire est de jouer la où on a placé un pion au hasard précédemment).

Donc le Joueur 1 a une stratégie gagnante.
Mais on ne la connait pas!!!