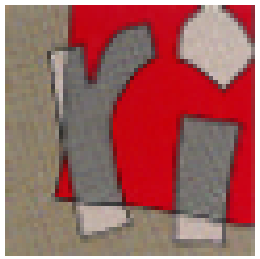
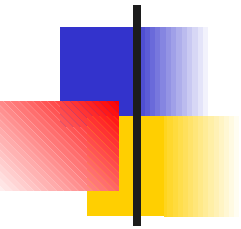




Expansion connexe dans les réseaux

Nicolas Nisse, LRI Orsay

Stage de DEA

Encadré par : Pierre FRAIGNIAUD

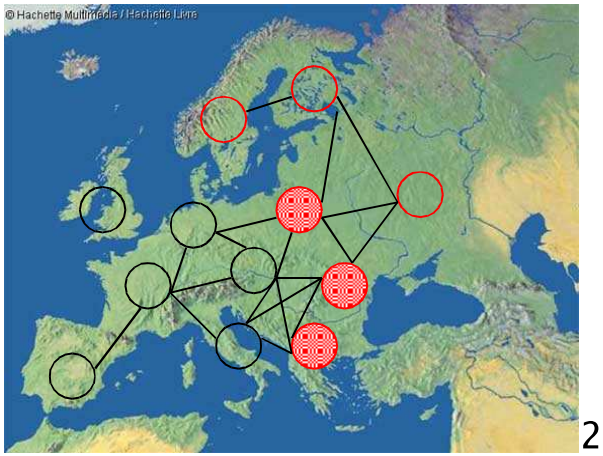
Encerclement dans les graphes

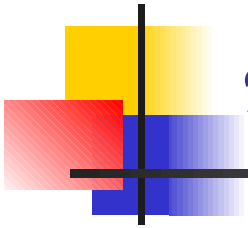
Motivations

- capture d'un intrus dans un réseau ;
- nettoyage d'un réseau contaminé ;
  3. Il faut utiliser le moins possible d'agents.
  4. extension de territoire (stratégie de conquête) ;
- Il faut minimiser la frontière.

Modèle

- réseau = graphe non orienté



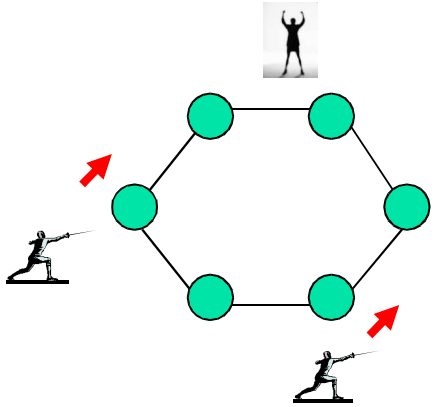


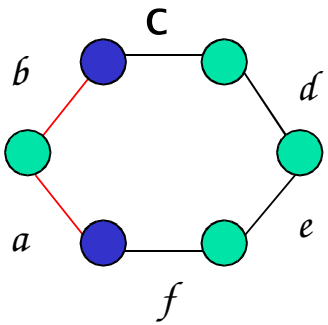
Encerclement dans un graphe

- Stratégie d'encerclement (Parson. [GTC,1978]).
  1. placer un chercheur sur un sommet du graphe ;
  2. déplacer un chercheur le long d'une arête ;
  3. supprimer un chercheur d'un sommet du graphe.
- suite d'opération élémentaires
  - un chercheur nettoie une arête quand il la traverse ;
  - une arête reste propre si ses deux extrémités sont « protégées ».
- 3. encerclement
  1. s(G), plus petit nombre de chercheurs nécessaire à une stratégie d'encerclement dans le graphe G ;
- monotonie
  - ms(G), plus petit nombre de chercheurs nécessaire à une stratégie d'encerclement monotone dans le graphe G ;

Quelques graphes simples

- L'anneau de n sommets





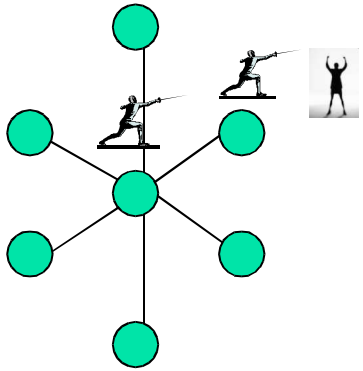
Ø, {a}, {a,b}, {a,b,c}, {a,b,c,d},

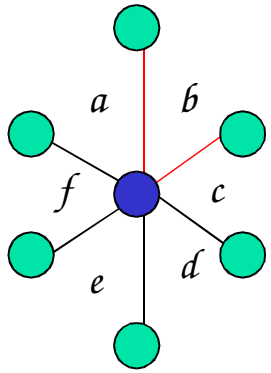
{a,b,c,d,e}, E(Cn).

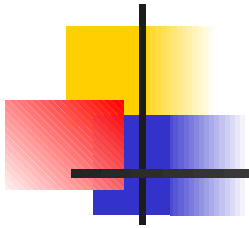
$\chi(Cn) = s(Cn) = 2$

- L'étoile de n sommets

$\chi(Sn) = 1$ et $s(Sn) = 2$







Complexité du problème

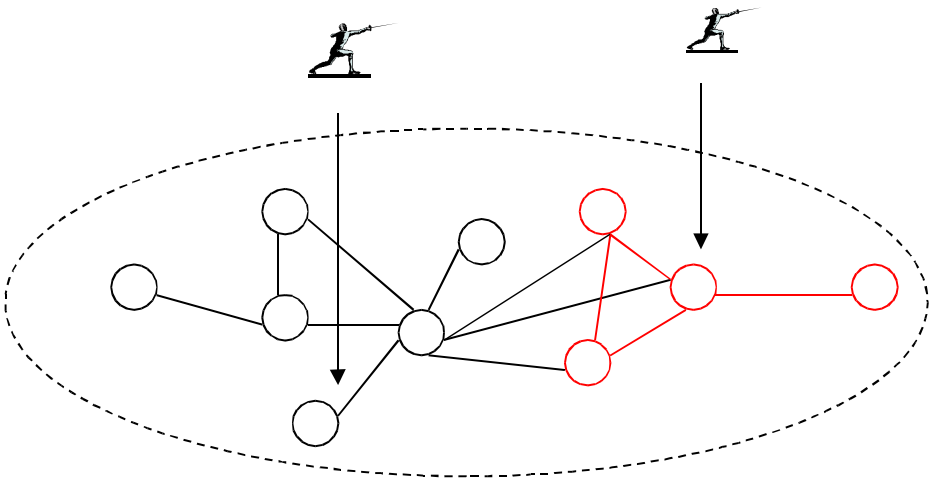
- *N. Megiddo, S. Hakimi, M. Garey, D. Johnson and C. Papadimitriou. [JACM, 1988].*
  - *le problème de savoir si $s(G) \leq k$ est NP-difficile.*
  - *algorithme linéaire de calcul de $s(T)$ pour tout arbre T ;*
  - *algorithme en $O(n.\log n)$ retournant une stratégie optimale.*
- *K. Skodinis. [ESA, 2000].*
  - *algorithme linéaire retournant une stratégie optimale.*
- *A. LaPaugh. [JACM, 1993]. (Bienstock et Seymour. [JA, 1991])*
  - *pour tout graphe G, $ms(G)=s(G)$.*

Liens avec des paramètres fondamentaux des graphes

- *notations :*
  - *vertex separator, vs(G) ;*
  - *largeur arborescente, tw(G) ;*
  - *largeur linéaire, pw(G) ;*
- *J. A. Ellis, I.H. Sudborough, J.S. Turner. [Information and computation, 1994].*
  - *pour tout graphe G, vs(G) ≤ s(G) ≤ vs(G) +2 ;*
- N. G. Kinnersley. [IPL, 1992].
  - vs(G)=pw(G) ≤ *tw(G) * log |V(G)|* ;
- *D'où le résultat suivant*
  - *pw(G) ≤ s(G) ≤ pw(G)+2 .*

Introduction de la connexité dans le modèle

- *limite du modèle*
  - *impossibilité de se déplacer à volonté ;*
  - *les chercheurs doivent rester groupés.*
- *stratégie d'encerclement connexe*, cs
  - *à chaque étape, la partie nettoyée doit être connexe.*



Le prix de la connexité

- *Seymour et Thomas. [Combinatorica, 1994].*

  carving.

- *Barrière, Flocchini, Fraigniaud et Santoro. [SPAA, 2002].*

  il existe un algorithme linéaire calculant une stratégie d'encerclement connexe optimale dans le cas des arbres.

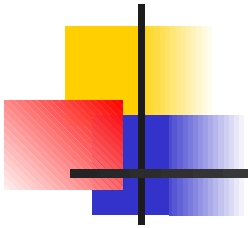
- *Barrière, Fraigniaud, Santoro et Thilikos. [WG, 2003].*

  pour tout arbre T, $s(T) \leq cs(T) \leq 2 * s(T)$;

  il existe un arbre T^* tel que $cs(T^*) = 2 * s(T^*)$.

- *Fomin, Fraigniaud et Thilikos. [Rapport Technique, 2004].*

  pour tout graphe connexe G, $sx(G) \leq s(G)(2+\log |E(G)|)$;



Objectifs du stage

- Questions ouvertes
  - Existe-t'il une constante bornant le rapport cs(G)/s(G) pour tout graphe connexe G?
  - Est-il vrai que mcs(G) = cs(G) pour tout graphe connexe G?
  - Comment étendre ces notions à la q-connexité?

Principaux résultats

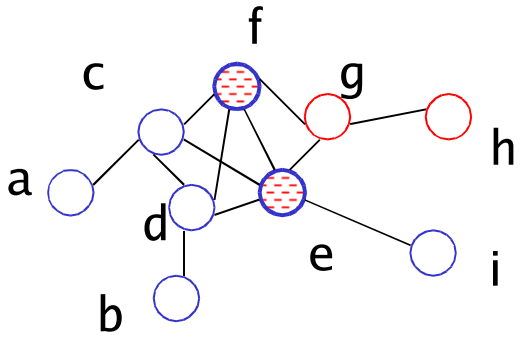
- définition

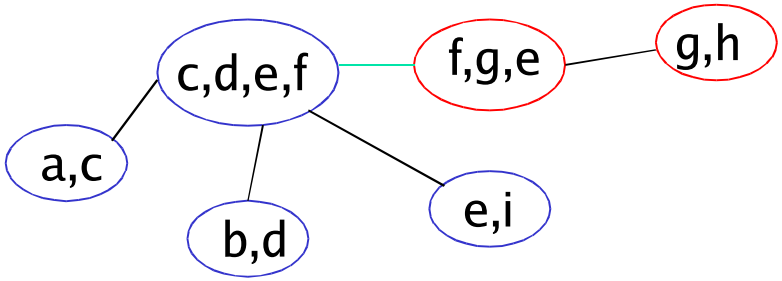
  décomposition arborescente connexe, ctw

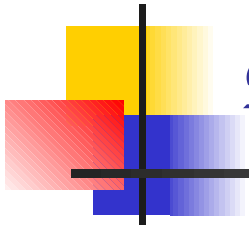
- théorème :

  pour tout graphe connexe ctw(G)=tw(G) ;

  - la connexité est inhérente à la décomposition arborescente







Principaux résultats (2)

- théorème : (Fomin, Fraigniaud et Thilikos, [Rapport Technique, 2004])

  pour tout graphe connexe G de n sommets,

  $sx(G) \leq s(G) * (\log n + 2)$;

- définition

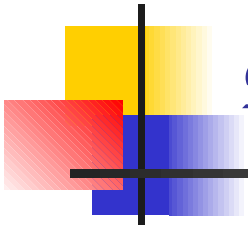
  stratégie de recherche q-connexe, cs_q ;

- théorème :

  caractérisation d'une classe de graphe telle que pour tout graphe G de cette classe, $cs_q(G)=mcs_q(G)$.

  - généralisation du résultat de Barrière, Flocchini, Fraigniaud et Santoro. [SPAA, 2002]

    pour tout arbre T, mcs(T) = cs(T).



Perspectives

- recontamination dans le cas connexe

  a-t-on mcs(G)=cs(G) pour tout graphe connexe G?

- prix de la connexité

  chercher une borne pour le rapport cs(G)/s(G).

- algorithme paramétrable

  classe de graphes de largeur linéaire connexe bornée

- étude de ces paramètres dans les grands réseaux d'interactions

  (Web, réseau de connaissance,…)