

Voleur Véloce dans un réseau planaire

Nicolas Nisse¹ Karol Suchan^{1,2}

¹ DIM, Universidad de Chile, Santiago, Chile

² AGH University of Science and Technology, Cracow, Poland

AlgoTel, 14 mai 2008

Jeux des gendarmes et du voleur

Capture d'un intrus dans un réseau

- 2 joueurs
- jeu **tour-à-tour**
- vitesses bornées et *a priori* égales

Objectif :

- Police : Capturer le voleur avec “peu” de gendarmes
- **Indice d'évasion** : **ie(G)**

Problème dual :

- Voleur : **Echapper** à “beaucoup” de gendarmes
- Impact de la vitesse du voleur ?

Un jeu tour-à-tour [Nowakowski et Winkler ; Quilliot, 83]

Initialisation :

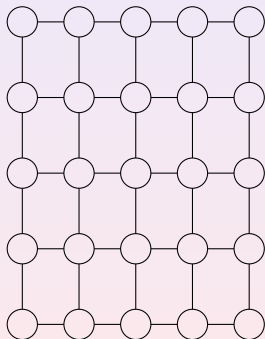
- 1 placement des gendarmes ;
- 2 placement du voleur.

Tour-à-tour :

- chaque gendarme avance d'au plus **1** arête ;
- le voleur avance d'au plus **1** arête.

Voleur capturé :

Un gendarme occupe le même sommet que le voleur.



Un jeu tour-à-tour [Nowakowski et Winkler ; Quilliot, 83]

Initialisation :

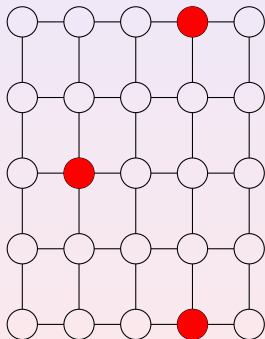
- 1 placement des gendarmes ;
- 2 placement du voleur.

Tour-à-tour :

- chaque gendarme avance d'au plus **1** arête ;
- le voleur avance d'au plus **1** arête.

Voleur capturé :

Un gendarme occupe le même sommet que le voleur.



Un jeu tour-à-tour [Nowakowski et Winkler ; Quilliot, 83]

Initialisation :

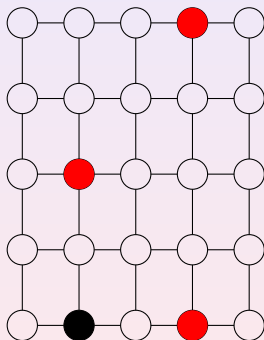
- 1 placement des gendarmes ;
- 2 placement du voleur.

Tour-à-tour :

- chaque gendarme avance d'au plus **1** arête ;
- le voleur avance d'au plus **1** arête.

Voleur capturé :

Un gendarme occupe le même sommet que le voleur.



Un jeu tour-à-tour [Nowakowski et Winkler ; Quilliot, 83]

Initialisation :

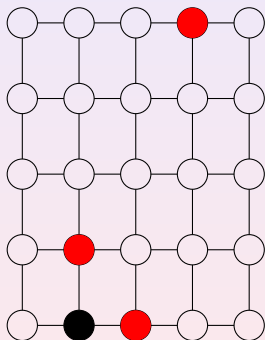
- 1 placement des gendarmes ;
- 2 placement du voleur.

Tour-à-tour :

- chaque gendarme avance d'au plus **1** arête ;
- le voleur avance d'au plus **1** arête.

Voleur capturé :

Un gendarme occupe le même sommet que le voleur.



Un jeu tour-à-tour [Nowakowski et Winkler ; Quilliot, 83]

Initialisation :

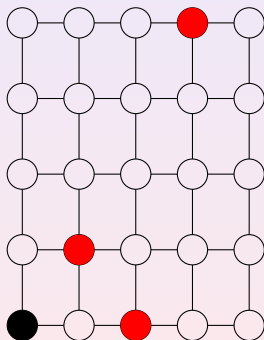
- 1 placement des gendarmes ;
- 2 placement du voleur.

Tour-à-tour :

- chaque gendarme avance d'au plus **1** arête ;
- le voleur avance d'au plus **1** arête.

Voleur capturé :

Un gendarme occupe le même sommet que le voleur.



Un jeu tour-à-tour [Nowakowski et Winkler ; Quilliot, 83]

Initialisation :

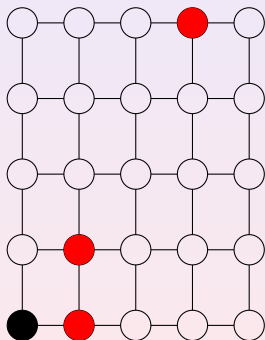
- 1 placement des gendarmes ;
- 2 placement du voleur.

Tour-à-tour :

- chaque gendarme avance d'au plus **1** arête ;
- le voleur avance d'au plus **1** arête.

Voleur capturé :

Un gendarme occupe le même sommet que le voleur.



Un jeu tour-à-tour [Nowakowski et Winkler ; Quilliot, 83]

Initialisation :

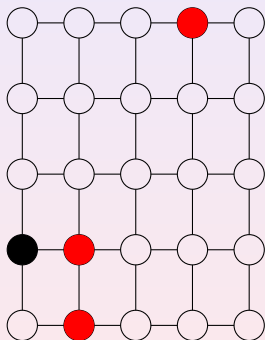
- 1 placement des gendarmes ;
- 2 placement du voleur.

Tour-à-tour :

- chaque gendarme avance d'au plus **1** arête ;
- le voleur avance d'au plus **1** arête.

Voleur capturé :

Un gendarme occupe le même sommet que le voleur.



Un jeu tour-à-tour [Nowakowski et Winkler ; Quilliot, 83]

Initialisation :

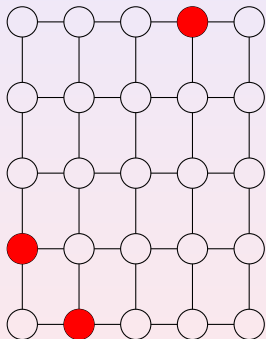
- 1 placement des gendarmes ;
- 2 placement du voleur.

Tour-à-tour :

- chaque gendarme avance d'au plus **1** arête ;
- le voleur avance d'au plus **1** arête.

Voleur capturé :

Un gendarme occupe le même sommet que le voleur.

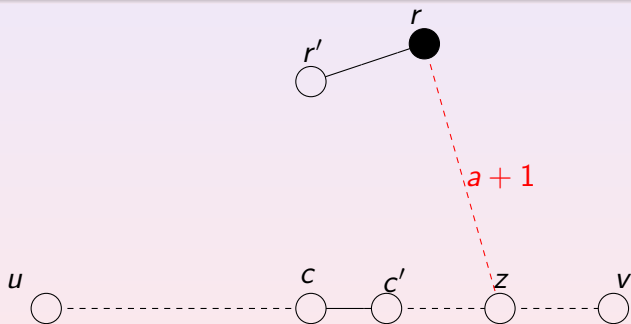


- **Caractérisation** des graphes G *cop-win* ($\mathbf{ie}(G) = 1$)
[Nowakowsky et Winkler, 83; Quilliot, 83; Chepoi, 97]
- **Complexité** : Calcul de l'indice d'évasion
EXPTIME-complet [Goldstein et Reingold, 95]
- **Algorithmes** $O(n^k)$ pour décider si $\mathbf{ie}(G) \leq k$.
[Hahn et MacGillivray, 06]
- **Borne inférieure** : $\mathbf{ie}(G) \geq d^t$,
 d degré minimum et maille $\geq 8t - 3$ [Frankl, 87]
- **Graphe planaire** G : $\mathbf{ie}(G) \leq 3$,
[Aigner et Fromme, 84]

Graphes planaires : $ie \leq 3$

Principe du plus court chemin

1 gendarme pour garder 1 **plus court** chemin P .



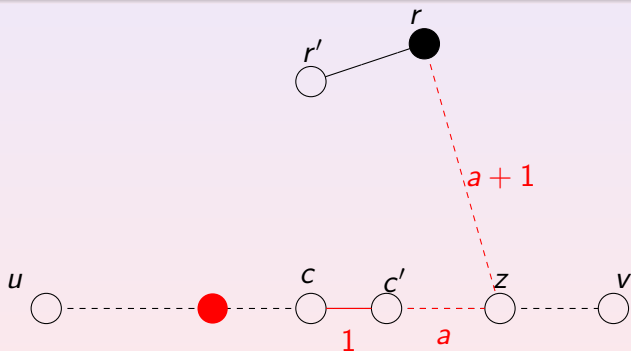
Le gendarme atteint P ,

Position c : $dist(r, z) \geq dist(c, z), \forall z \in V(P)$.

Graphes planaires : $ie \leq 3$

Principe du plus court chemin

1 gendarme pour garder 1 **plus court** chemin P .



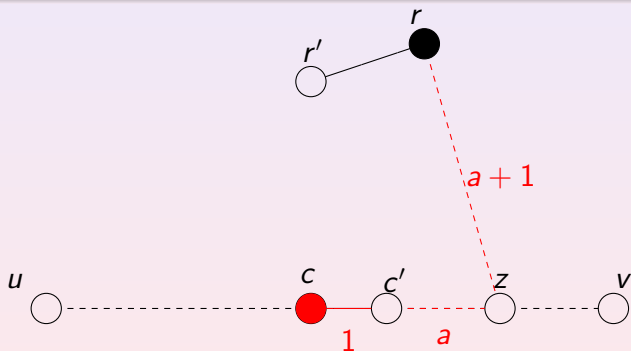
Le gendarme atteint P ,

Position c : $dist(r, z) \geq dist(c, z), \forall z \in V(P)$.

Graphes planaires : $ie \leq 3$

Principe du plus court chemin

1 gendarme pour garder 1 **plus court** chemin P .



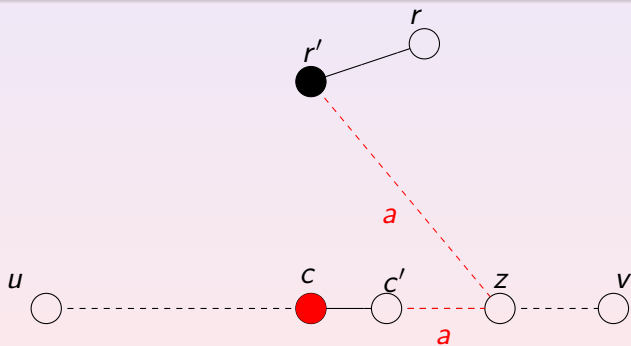
Le gendarme atteint P ,

Position c : $dist(r, z) \geq dist(c, z), \forall z \in V(P)$.

Graphes planaires : $ie \leq 3$

Principe du plus court chemin

1 gendarme pour garder 1 **plus court** chemin P .



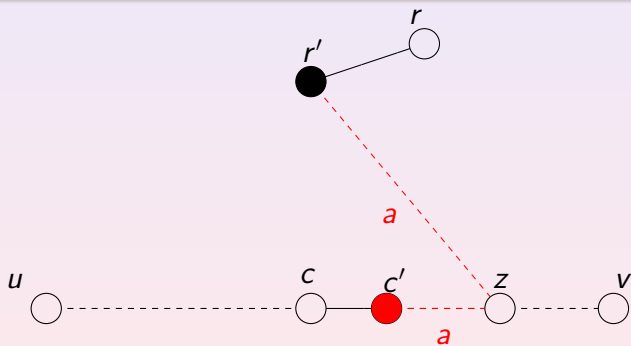
Le gendarme atteint P ,

Position c : $dist(r, z) \geq dist(c, z), \forall z \in V(P)$.

Graphes planaires : $ie \leq 3$

Principe du plus court chemin

1 gendarme pour garder 1 **plus court** chemin P .



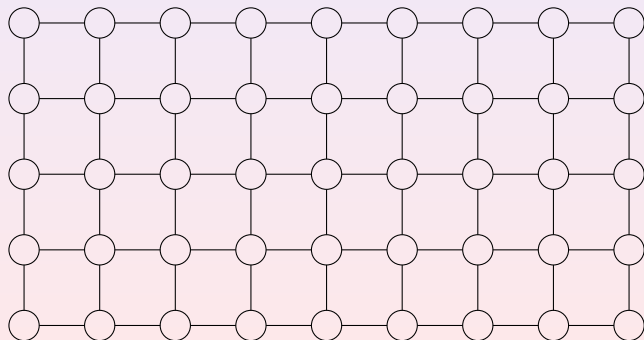
Le gendarme atteint P ,

Position c : $dist(r, z) \geq dist(c, z), \forall z \in V(P)$.

Graphes planaires : $ie \leq 3$

≤ 2 plus courts chemins pour confiner
1 plus court chemin pour réduire

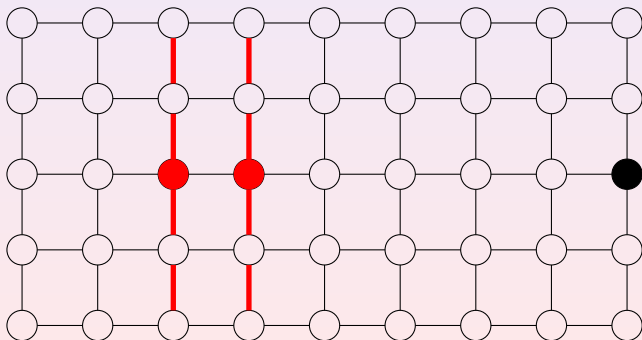
$$ie(\text{grille}) = 2$$



Graphes planaires : $ie \leq 3$

≤ 2 plus courts chemins pour confiner
1 plus court chemin pour réduire

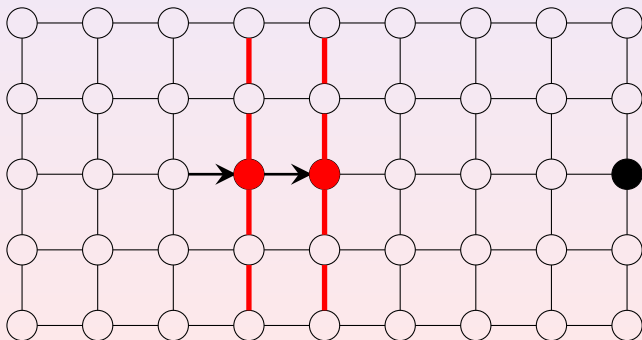
$$ie(\text{grille}) = 2$$



Graphes planaires : $ie \leq 3$

≤ 2 plus courts chemins pour confiner
1 plus court chemin pour réduire

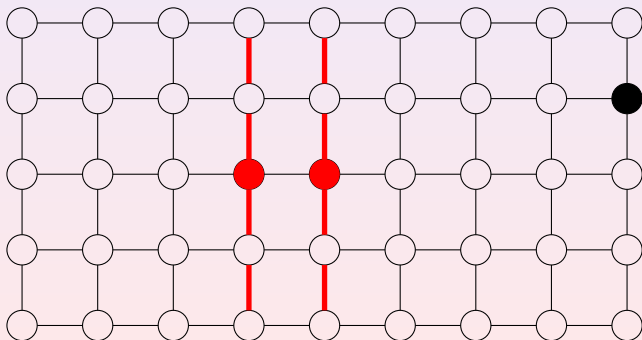
$$ie(\text{grille}) = 2$$



Graphes planaires : $ie \leq 3$

≤ 2 plus courts chemins pour confiner
1 plus court chemin pour réduire

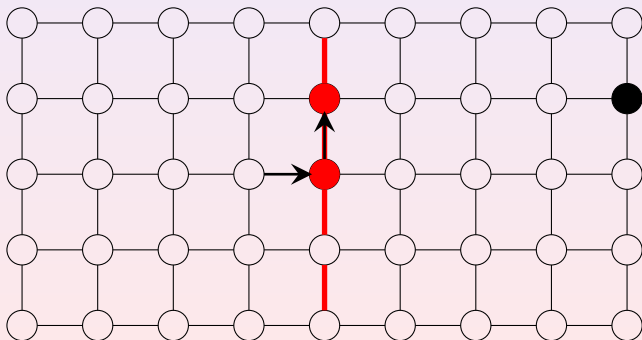
$$ie(\text{grille}) = 2$$



Graphes planaires : $ie \leq 3$

≤ 2 plus courts chemins pour confiner
1 plus court chemin pour réduire

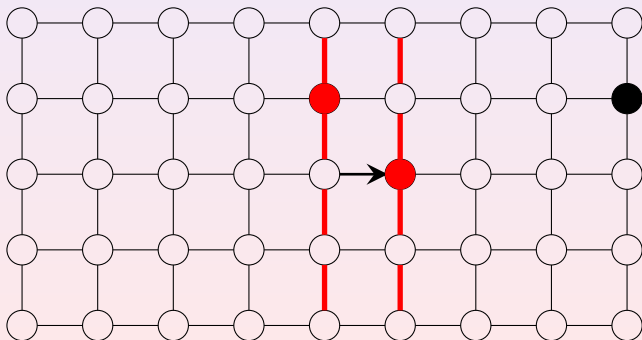
$$ie(\text{grille}) = 2$$



Graphes planaires : $ie \leq 3$

≤ 2 plus courts chemins pour confiner
1 plus court chemin pour réduire

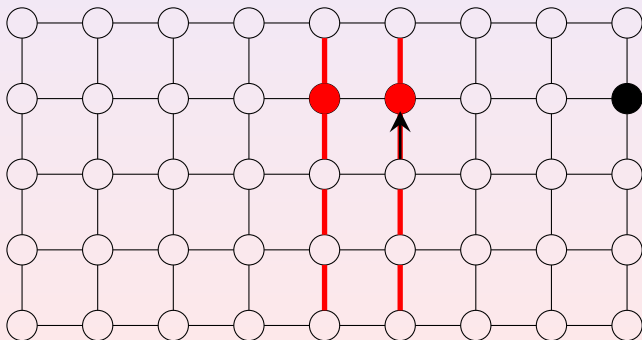
$$ie(\text{grille}) = 2$$



Graphes planaires : $ie \leq 3$

≤ 2 plus courts chemins pour confiner
1 plus court chemin pour réduire

$$ie(\text{grille}) = 2$$



Comment peut-on aider le voleur ?

Applications du principe du *plus court chemin*

G de **genre** g : $\text{ie}(G) \leq \frac{3}{2}g + 3$ [Schröder, 01]

G **excluant un mineur** H : $\text{ie}(G) \leq |E(H)|$ [Andreae, 86]

Vitesse des protagonistes

Vitesse = nombre maximum d'arêtes traversées / tour

$$\text{vitesse}_{\text{voleur}} = 2 > \text{vitesse}_{\text{gendarme}} = 1$$

Motivations : Lien avec *Graph searching*

Calcul de ie NP-difficile [Fomin, Golovach, Kratochvil, 2008]

Impact de la vitesse ?

Combien de gendarmes pour capturer un voleur dans la grille ?

Comment peut-on aider le voleur ?

Applications du principe du *plus court chemin*

G de **genre** g : $\text{ie}(G) \leq \frac{3}{2}g + 3$ [Schröder, 01]

G **excluant un mineur** H : $\text{ie}(G) \leq |E(H)|$ [Andreae, 86]

Vitesse des protagonistes

Vitesse = nombre maximum d'arêtes traversées / tour

$$\text{vitesse}_{\text{voleur}} = 2 > \text{vitesse}_{\text{gendarme}} = 1$$

Motivations : Lien avec *Graph searching*

Calcul de **ie** NP-difficile [Fomin, Golovach, Kratochvil, 2008]

Impact de la vitesse ?

Combien de gendarmes pour capturer un voleur dans la grille ?

Nos résultats

Théorème : indice d'évasion non borné

$\exists c > 0$ tel que, pour tout $k \geq 1$ et pour toute grille carrée $G_{f(k)}$ de côté $f(k) = c^{k^2}$, $\mathbf{ie}(G_{f(k)}) \geq k$.

Corollaire : $\mathbf{ie}(G_n) = \Omega(\sqrt{\log(n)})$.

Bémol : meilleure borne supérieure connue : $\mathbf{ie}(G_n) = O(n)$.

Qu'est-ce qui rend le voleur difficile à capturer ?

Si G planeaire "contient" une grille de côté n , $\mathbf{ie}(G) \geq g(n)$?

Théorème : NON...

$\exists H$ subdivision d'une grille arbitrairement grande : $\mathbf{ie}(H) = 2$.

Théorème : Cependant...

$\forall H$ planeaire avec $G_{2f(k)}$ sous-graphe induit, $\mathbf{ie}(H) \geq k$.

Nos résultats

Théorème : indice d'évasion non borné

$\exists c > 0$ tel que, pour tout $k \geq 1$ et pour toute grille carrée $G_{f(k)}$ de côté $f(k) = c^{k^2}$, $\mathbf{ie}(G_{f(k)}) \geq k$.

Corollaire : $\mathbf{ie}(G_n) = \Omega(\sqrt{\log(n)})$.

Bémol : meilleure borne supérieure connue : $\mathbf{ie}(G_n) = O(n)$.

Qu'est-ce qui rend le voleur difficile à capturer ?

Si G planeaire "*contient*" une grille de côté n , $\mathbf{ie}(G) \geq g(n)$?

Théorème : NON...

$\exists H$ subdivision d'une grille arbitrairement grande : $\mathbf{ie}(H) = 2$.

Théorème : Cependant...

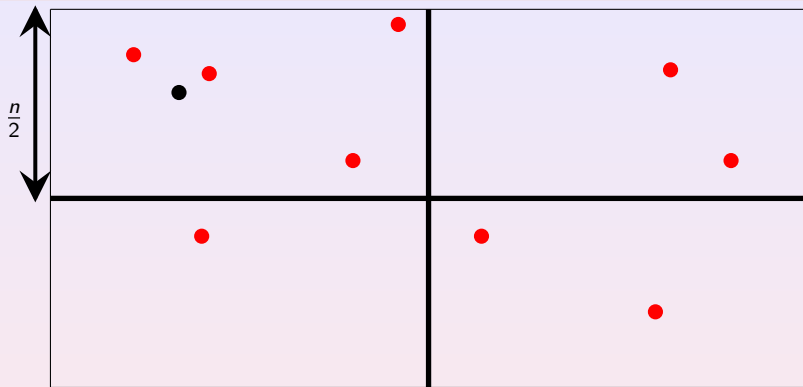
$\forall H$ planeaire avec $G_{2f(k)}$ sous-graphe induit, $\mathbf{ie}(H) \geq k$.

Idée de preuve, $\text{ie}(G_n) = \Omega(\sqrt{\log(n)})$

Preuve en 3 étapes

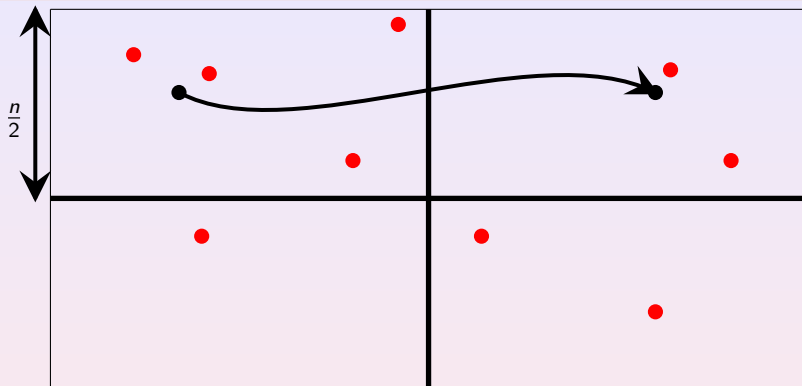
- 1 Stratégie du voleur contre k gendarmes.
- 2 Pour que la stratégie soit valide
 \Rightarrow contraintes sur n le côté de la grille
- 3 Si $n = f(k) = c^{k^2} \Rightarrow$ contraintes satisfaites.

Stratégie du voleur : vision globale



Grille de côté n divisée en 4 sous-grille

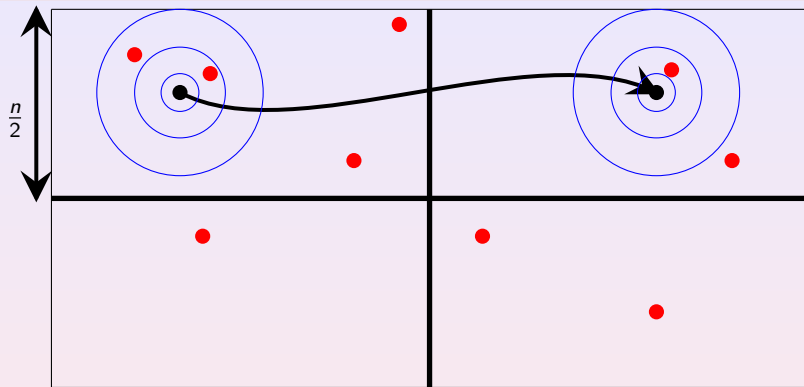
Stratégie du voleur : vision globale



Grille de côté n divisée en 4 sous-grille

Passer d'une position dans une sous-grille
à une autre position dans une sous-grille adjacente

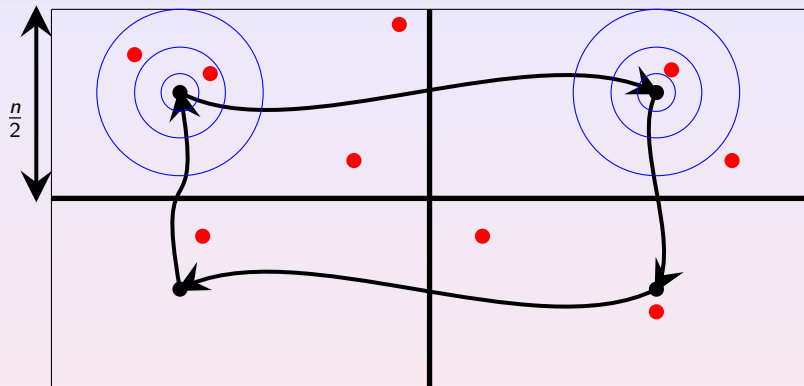
Stratégie du voleur : vision globale



Grille de côté n divisée en 4 sous-grille

Passer d'une position **sûre** dans une sous-grille à une autre position **sûre** dans une sous-grille adjacente

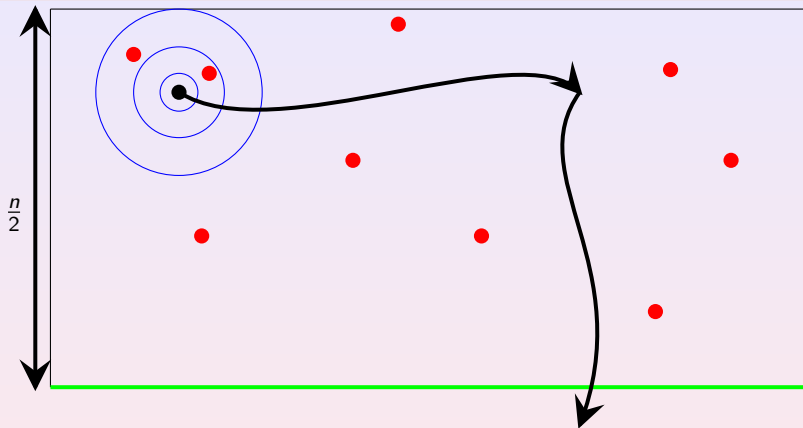
Stratégie du voleur : vision globale



Grille de côté n divisée en 4 sous-grille

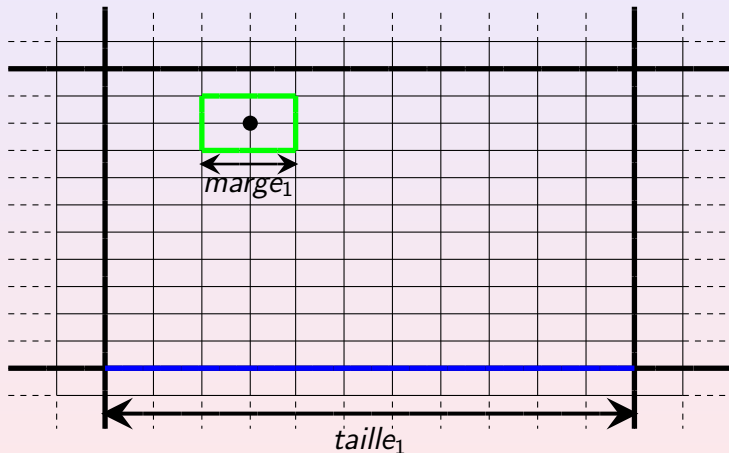
Passer d'une position **sûre** dans une sous-grille à une autre position **sûre** dans une sous-grille adjacente

Stratégie du voleur : Objectif



A partir de toute position *sûre* dans une sous-grille
Se déplacer vers *n'importe quel côté* dans une position sûre.

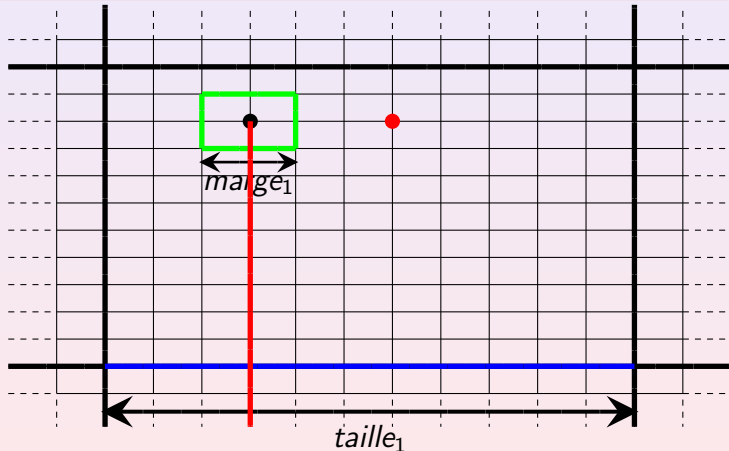
Stratégie du voleur : Induction $k = 1$



Stratégie pour aller d'une position **sûre** vers le côté **bleu**

Stratégie du voleur : Induction $k = 1$

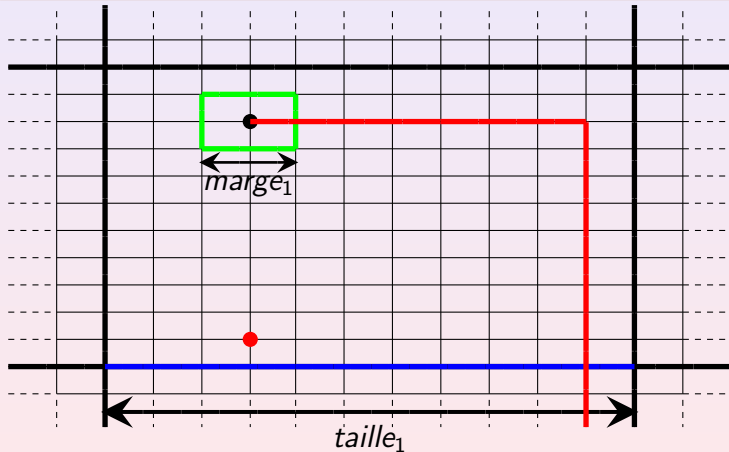
Cas 1 : ligne droite



Stratégie pour aller d'une position sûre vers le côté bleu

Stratégie du voleur : Induction $k = 1$

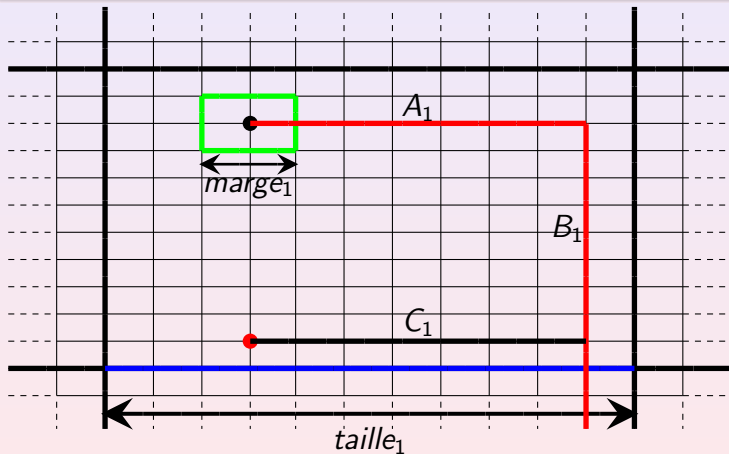
Cas 2 : détour



Stratégie pour aller d'une position sûre vers le côté bleu

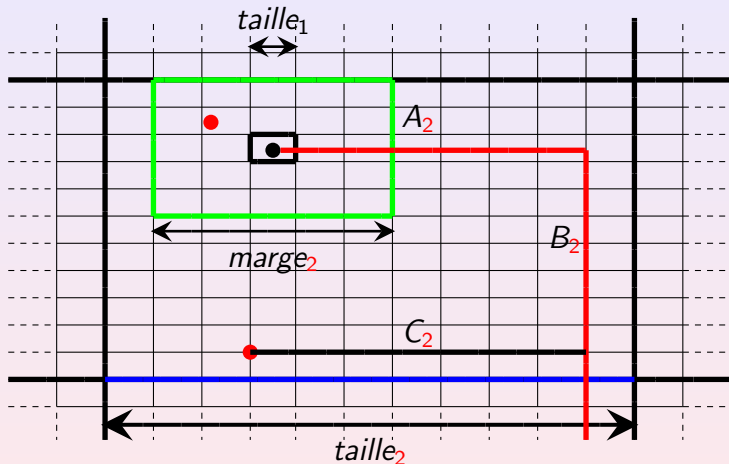
Stratégie du voleur : Induction $k = 1$

Cas 2 : détour



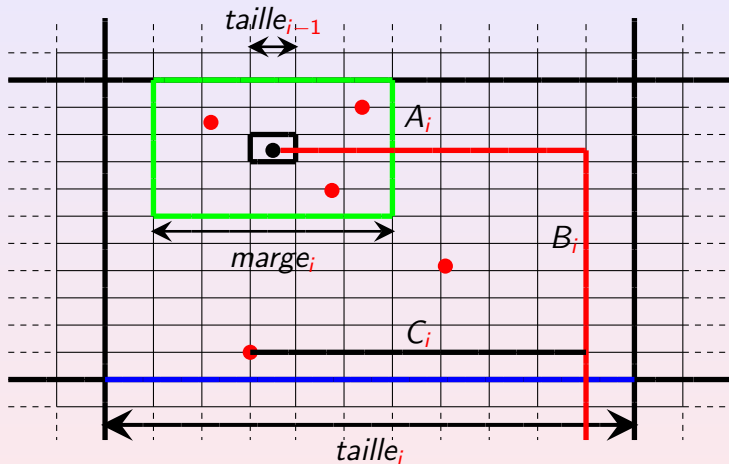
$$\frac{A_1+B_1}{2} < C_1 - \frac{marge_1}{2} \text{ et } vitesse_{relative1} = vitesse_{relative0} \frac{taille_1}{A_1+B_1}.$$

Stratégie du voleur : Induction $k = 2$



$$\frac{A_2 + B_2}{vitesse_{relative1}} < C_2 - \frac{marge_2}{2} \text{ et } vitesse_{relative2} = vitesse_{relative1} \frac{taille_2}{A_2 + B_2}.$$

Stratégie du voleur : Induction $k = i$



$$\frac{A_i + B_i}{\text{vitesse}_{relative\ i-1}} < C_i - \frac{\text{marge}_i}{2} \text{ et } \text{vitesse}_{relative\ i} = \text{vitesse}_{relative\ i-1} \frac{\text{taille}_i}{A_i + B_i}.$$

Contraintes imposées par la stratégie

3 inconnus : $taille_i$, $A_i + B_i \approx detour_i$ et $marge_i$

On pose $zoom_i = taille_i / taille_{i-1}$ et $vitesse_i = taille_i / temps_i$,
et $temps_i = (zoom_i + detour_i) temps_{i-1}$.

4 inéquations : $\forall i \in [1..k]$

$$marge_i \geq \lceil \frac{4+vitesse_{i-1}}{vitesse_{i-1}-1} \rceil$$

$$detour_i/2 \geq \lceil \frac{(2*marge_i+2)vitesse_{i-1}}{vitesse_{i-1}-1} \rceil$$

$$detour_i/2 + 2 * marge_i + 1 < zoom_i/2$$

$$vitesse_i > 1$$

$\exists a, b > 0$, Equations satisfaites pour $zoom_i = ab^i$

$$\Rightarrow f(k) = taille_k = taille_0 * \prod_{1 \leq i \leq k} zoom_i = O(a^k * b^{k(k+1)/2})$$

Relations d'ordre sur les graphes

Si G planaire “contient” une grille de côté n , $\text{ie}(G) \geq g(n)$?

G contient H

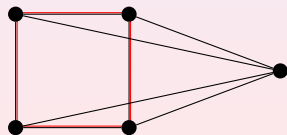
suppression sommets (1), arêtes (2), contraction arêtes (3)

Sous-graphe induit : 1 ; **Subdivision** : 3 ; **Mineur** : 1, 2 et 3

Graph searching : jeu **simultané**, vitesses non bornées

“beaucoup” de gendarmes \Leftrightarrow “grosse” grille mineur

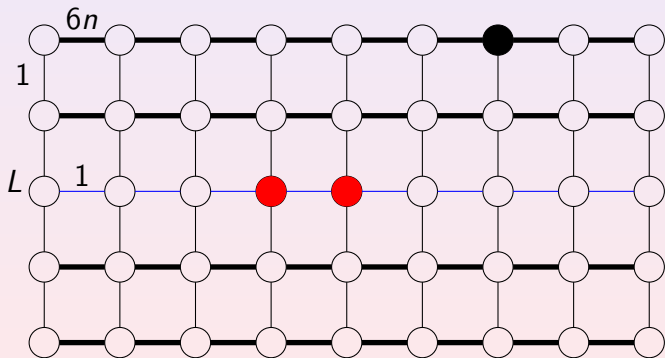
[Robertson, Seymour, Thomas, 94]



indice d'évasion non-clos
par sous-graphe induit
 $\text{ie}(H) = 2 > \text{ie}(G) = 1$

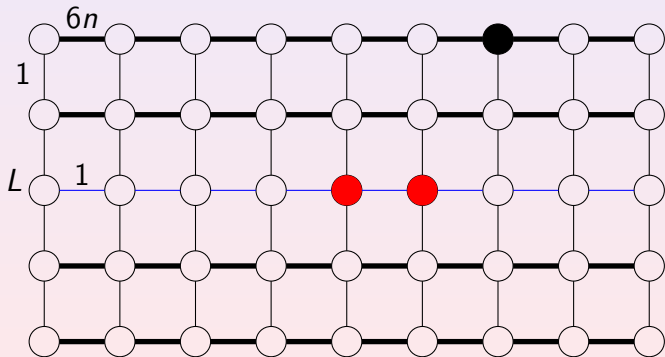
Idée de preuve, H subdivision de G_n avec $ie(H) = 2$

arêtes horizontales sauf de la ligne L divisées en $6n$ arêtes
 L sert de **raccourcit** aux agents.



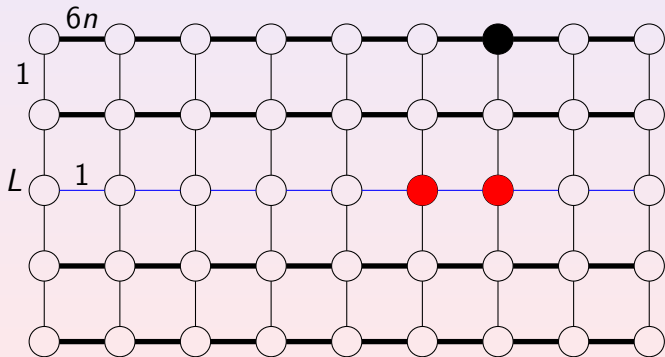
Idée de preuve, H subdivision de G_n avec $ie(H) = 2$

arêtes horizontales sauf de la ligne L divisées en $6n$ arêtes
 L sert de raccourcit aux agents.



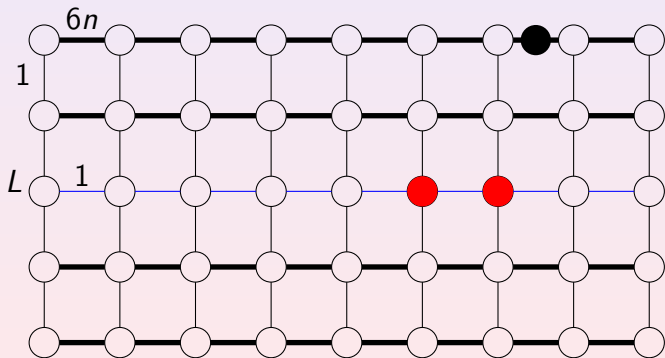
Idée de preuve, H subdivision de G_n avec $ie(H) = 2$

arêtes horizontales sauf de la ligne L divisées en $6n$ arêtes
 L sert de raccourcit aux agents.



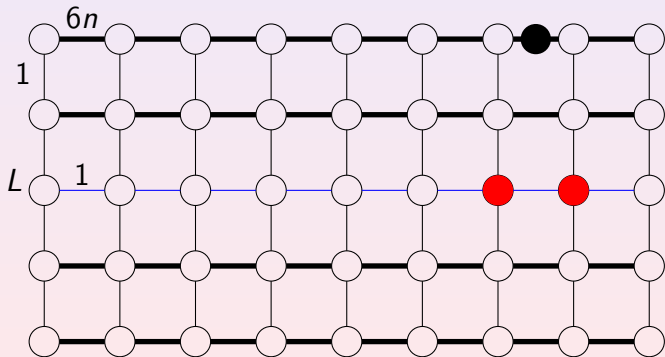
Idée de preuve, H subdivision de G_n avec $ie(H) = 2$

arêtes horizontales sauf de la ligne L divisées en $6n$ arêtes
 L sert de raccourcit aux agents.



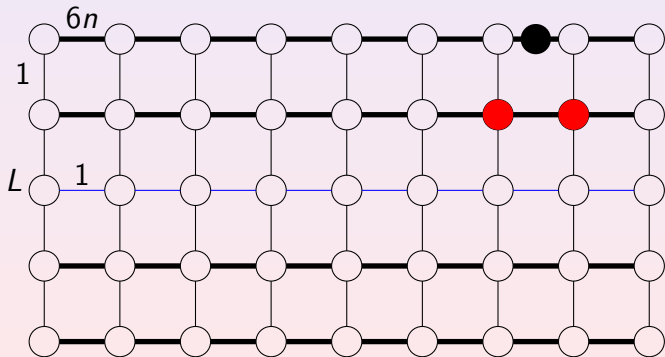
Idée de preuve, H subdivision de G_n avec $ie(H) = 2$

arêtes horizontales sauf de la ligne L divisées en $6n$ arêtes
 L sert de **raccourcit** aux agents.



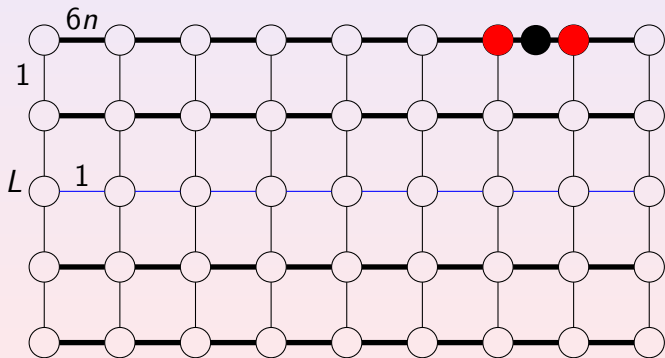
Idée de preuve, H subdivision de G_n avec $ie(H) = 2$

arêtes horizontales sauf de la ligne L divisées en $6n$ arêtes
 L sert de **raccourcit** aux agents.



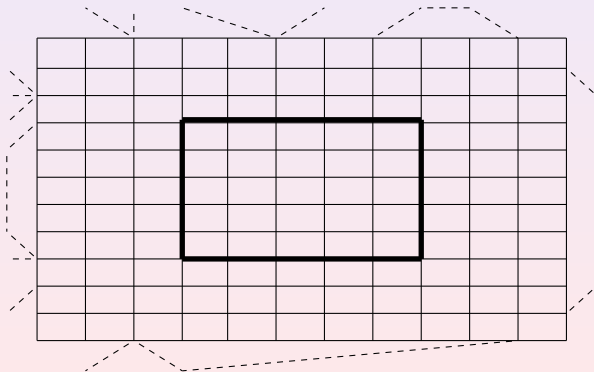
Idée de preuve, H subdivision de G_n avec $ie(H) = 2$

arêtes horizontales sauf de la ligne L divisées en $6n$ arêtes
 L sert de **raccourcit** aux agents.



Idée de preuve, H avec G_{2n} sous-graphe induit,
 $\text{ie}(H) = \Omega(\sqrt{\log(n)})$

H **planaire** admet G_n comme sous-graphe isométrique
 \Rightarrow stratégie du voleur restreint à G_n



- $\Omega(\sqrt{\log(n)}) \leq \mathbf{ie}(G_n) \leq O(n)$. Valeur exacte ?
- Autres classes de graphes :
graphes d'intervalle, graphes cordaux, etc.
- Compromis
 $vitesse_{voleur} / vitesse_{gendarme} /$ indice d'évasion.
- Lien avec les décompositions de graphes ?