Jouons un peu sur un échiquier (sans jouer aux échecs)

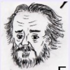
Nicolas Nisse

Université Côte d'Azur, Inria, CNRS, I3S, France

Café In, Inria Sophia Antipolis, 8 juillet 2021

À quoi allons nous jouer et pourquoi ? (1/2)

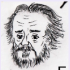
John Horton Conway FRS (26 Dec. 1937 - 11 April 2020) was an English mathematician active in the theory of *finite groups*, *knot theory*, *number theory*, *combinatorial game theory* and *coding theory*. He also made contributions to many branches of **recreational mathematics**, most notably the invention of the *cellular automaton* called the **Game of Life**. (Wikipedia)



(J. Conway par F. Havet)

À quoi allons nous jouer et pourquoi ? (1/2)

John Horton Conway FRS (26 Dec. 1937 - 11 April 2020) was an English mathematician active in the theory of *finite groups*, *knot theory*, *number theory*, *combinatorial game theory* and *coding theory*. He also made contributions to many branches of **recreational mathematics**, most notably the invention of the *cellular automaton* called the **Game of Life**. (Wikipedia)



(J. Conway par F. Havet)

AFFAIRE DE LOGIQUE – N° 1141

Le jeu de la viralité (hommage à John Conway)

Confinés chez eux, Alice et Bob ont imaginé, sur un échiquier de 8 cases sur 8, des jeux simulant la propagation d'un virus. Lors du premier jeu, Bob pose un certain nombre de pions, représentant des virus, sur des cases de l'échiquier. La suite est automatique : si une case vide touche par au moins deux de ses côtés des cases contenant un pion, Bob pose un pion dans cette case. L'objectif : remplir l'échiquier tout entier.

1. Combien Bob doit-il au moins poser de pions au départ pour l'atteindre ? Trouver une configuration initiale permettant de réussir avec ce nombre minimum de pions.

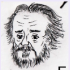
Alice imagine alors un jeu identique, mais où la case vide doit toucher au moins trois cases contenant un pion pour qu'elle puisse poser un pion dans cette case. L'objectif est le même : remplir l'échiquier.

2. Quel nombre minimum de pions de départ permet de réussir ? Trouver une configuration correspondante.

(Le Monde, 16 avril 2020)

À quoi allons nous jouer et pourquoi ? (1/2)

John Horton Conway FRS (26 Dec. 1937 - 11 April 2020) was an English mathematician active in the theory of *finite groups*, *knot theory*, *number theory*, *combinatorial game theory* and *coding theory*. He also made contributions to many branches of **recreational mathematics**, most notably the invention of the *cellular automaton* called the **Game of Life**. (Wikipedia)



(J. Conway par F. Havet)

AFFAIRE DE LOGIQUE – N° 1141

Le jeu de la viralité (hommage à John Conway)

Confinés chez eux, Alice et Bob ont imaginé, sur un échiquier de 8 cases sur 8, des jeux simulant la propagation d'un virus. Lors du premier jeu, Bob pose un certain nombre de pions, représentant des virus, sur des cases de l'échiquier. La suite est automatique : si une case vide touche par au moins deux de ses côtés des cases contenant un pion, Bob pose un pion dans cette case. L'objectif : remplir l'échiquier tout entier.

1. Combien Bob doit-il au moins poser de pions au départ pour l'atteindre ? Trouver une configuration initiale permettant de réussir avec ce nombre minimum de pions.

Alice imagine alors un jeu identique, mais où la case vide doit toucher au moins trois cases contenant un pion pour qu'elle puisse poser un pion dans cette case. L'objectif est le même : remplir l'échiquier.

2. Quel nombre minimum de pions de départ permet de réussir ? Trouver une configuration correspondante.

(Le Monde, 16 avril 2020)

[F. Benevides, J-C. Bermond, H. Lesfari, N. Nisse. Minimum lethal sets in grids and tori under 3-neighbour bootstrap percolation. Tech. rep. 2021]

À quoi allons nous jouer et pourquoi ? (2/2)

1. Pavage d'échiquiers avec des dominos.
2. Jeux de la viralité
   - taux de contamination 2 (1re question du Monde)
   - taux de contamination 3 (2de question du Monde)
3. Jeu de la vie de John Conway

Étude des jeux combinatoires et optimisation

Jeux: Peut-on paver un échiquier avec 32 dominos ?
Combien Bob doit-il poser de pions pour finalement remplir tout l'échiquier ?

Existe-t-il une solution ?

- Si non, comment en être sûr ?
- Si oui, combien y en a-t-il ? Y en a-t-il de meilleures que d'autres ?
  - Comment vérifier qu'une solution est optimale ?
  - Comment trouver (rapidement) de (meilleures) solutions ?

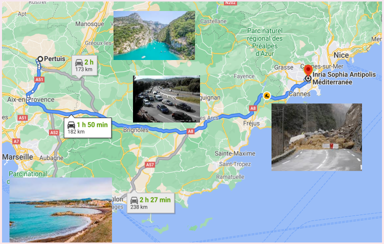
Étude des jeux combinatoires et optimisation

Jeux: Peut-on paver un échiquier avec 32 dominos ?
Combien Bob doit-il poser de pions pour finalement remplir tout l'échiquier ?

Existe-t-il une solution ?

- Si non, comment en être sûr ?
- Si oui, combien y en a-t-il ? Y en a-t-il de meilleures que d'autres ?
  - Comment vérifier qu'une solution est optimale ?
  - Comment trouver (rapidement) de (meilleures) solutions ?

Pbm. d'optim. pratique : ex. recherche d'itinéraire :



Étude des jeux combinatoires et optimisation

Jeux: Peut-on paver un échiquier avec 32 dominos ?
Combien Bob doit-il poser de pions pour finalement remplir tout l'échiquier ?

Existe-t-il une solution ?

- Si non, comment en être sûr ?
- Si oui, combien y en a-t-il ? Y en a-t-il de meilleures que d'autres ?
  - Comment vérifier qu'une solution est optimale ?
  - Comment trouver (rapidement) de (meilleures) solutions ?

Jeux dans les graphes : nombreuses applications théoriques et pratiques

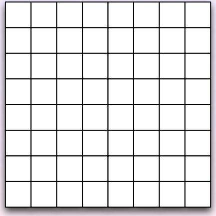
Jeux des gendarmes et voleur dans les graphes (étude structurelle des graphes, modélisation de problèmes de reroutage dans les réseaux optiques...).
Jeux de surveillance (modélisation de problèmes de pré-chargement...).
Jeux de coloration de graphes (théorie de la complexité...)
Jeux de la viralité / jeu de la vie (**propagation d'épidémies, de rumeurs, émergence de systèmes complexes à partir de règles locales simples**...)....

Outline

1. Pavage d'échiquiers
2. Jeux de viralité
   - Cas "au moins 2 voisins contaminés"
   - Cas "au moins 3 voisins contaminés"
3. Jeu de la vie

Pavage d'échiquiers avec des dominos

Commençons doucement.



Énigme 1 : Peut-on paver un échiquier ? avec combien de dominos ?

- chaque domino couvre deux cases adjacentes (voisines) ;
- chaque case doit être couverte par un (unique) domino.

Pavage d'échiquiers avec des dominos

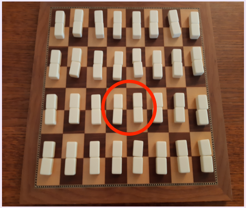
Commençons doucement.

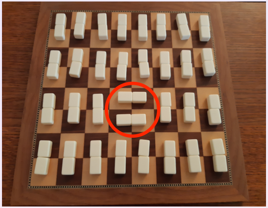
Énigme 1 : Peut-on paver un échiquier ? avec combien de dominos ? 32

- chaque domino couvre deux cases adjacentes (voisines) ;
- chaque case doit être couverte par un (unique) domino.

Pavage d'échiquiers avec des dominos

Commençons doucement.





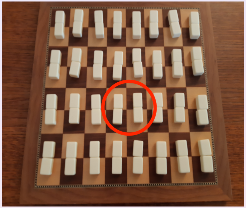
Énigme 1 **:** Peut-on paver un échiquier ? avec combien de dominos ? 32

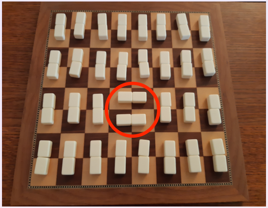
- chaque domino couvre deux cases adjacentes (voisines) ;
- chaque case doit être couverte par un (unique) domino.

Énigme 2 **: (beaucoup) plus difficile :** Combien y a-t-il de solutions ?

Pavage d'échiquiers avec des dominos

Commençons doucement.





Énigme 1 **:** Peut-on paver un échiquier ? avec combien de dominos ? 32

- chaque domino couvre deux cases adjacentes (voisines) ;
- chaque case doit être couverte par un (unique) domino.

Énigme 2 **: (beaucoup) plus difficile :** Combien y a-t-il de solutions ?

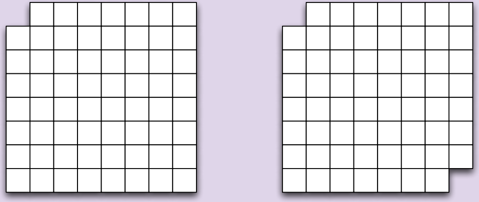
$$\left(\prod_{j=1}^{m}\prod_{k=1}^{n}\left(4\cos^2\left(\frac{\pi j}{m+1}\right)+4\cos^2\left(\frac{\pi k}{n+1}\right)\right)\right)^{1/4} = 12\,988\,816 \text{ pour } n=m=8$$

[Kasteleyn 1961, Fisher et Temperley 1961]

Pavage d'échiquiers avec des dominos

Et maintenant ?

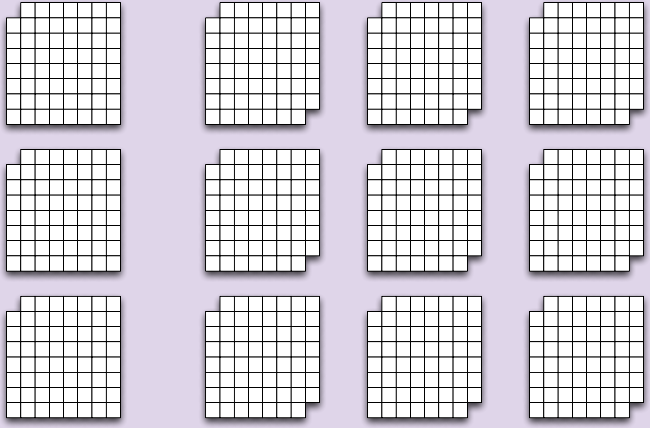
Énigmes 3 **et** 4 **:** Peut-on paver ces "échiquiers" ? avec combien de dominos ?



Pavage d'échiquiers avec des dominos

Et maintenant ?

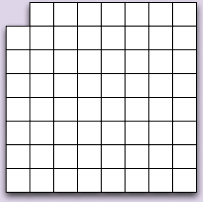
Énigmes 3 **et** 4 **:** Peut-on paver ces "échiquiers" ? avec combien de dominos ?

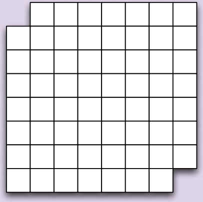


Pavage d'échiquiers avec des dominos

Et maintenant ?

Énigmes 3 **et** 4 **:** Peut-on paver ces "échiquiers" ? avec combien de dominos ?



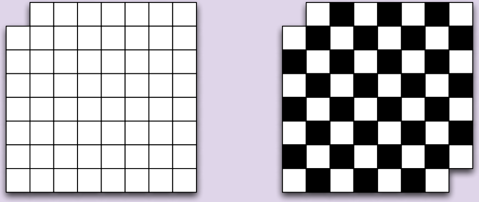


1 domino $\rightarrow$ 2 cases
x dominos $\rightarrow$ $2x$ (pair) cases
à gauche : nombre impair de cases.
IMPOSSIBLE !!

Pavage d'échiquiers avec des dominos

Et maintenant ?

Énigmes 3 et 4 : Peut-on paver ces "échiquiers" ? avec combien de dominos ?



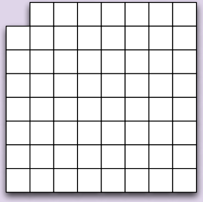
1 domino → 2 cases
x dominos → $2x$ (pair) cases
à gauche : nombre impair de cases.
IMPOSSIBLE !!

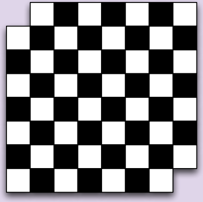
Changeons de point de vue !

Pavage d'échiquiers avec des dominos

Et maintenant ?

Énigmes 3 et 4 : Peut-on paver ces "échiquiers" ? avec combien de dominos ?





1 domino → 2 cases
x dominos → $2x$ (pair) cases
à gauche : nombre impair de cases.
IMPOSSIBLE !!

Changeons de point de vue !
1 domino → 1 case blanche et 1 case noire
x dominos → x cases blanches et x cases noires
à droite : 32 cases blanches et 30 cases noires
IMPOSSIBLE !!

Outline

1 Pavage d'échiquiers

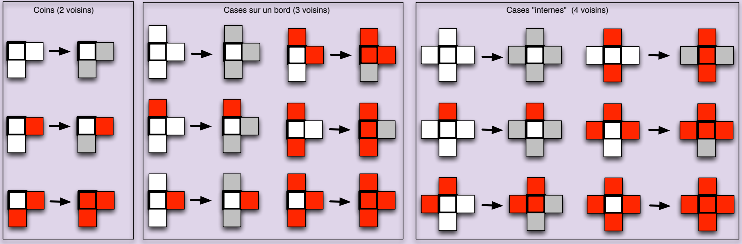
2 Jeux de viralité
- Cas "au moins 2 voisins contaminés"
- Cas "au moins 3 voisins contaminés"

3 Jeu de la vie

Définition du jeu de la viralité

Règles du jeu : (Cas "au moins 2 voisins contaminés")

Les cases d'un échiquier peuvent être **contaminées** (colorées) ou **saines** (blanches).
Une case contaminée le reste.
Une case saine devient contaminée si elle a au moins 2 cases voisines contaminées.



(une case grise est indéterminée (saine ou pas))

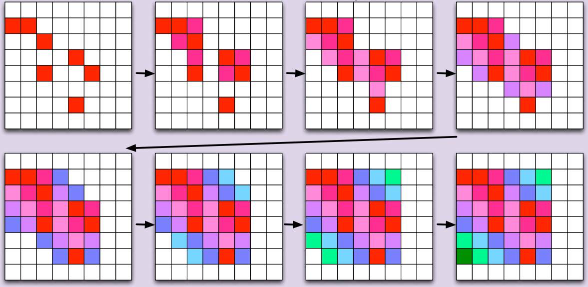
Définition du jeu de la viralité

Règles du jeu : (Cas "au moins 2 voisins contaminés")

Les cases d'un échiquier peuvent être **contaminées** (colorées) ou **saines** (blanches).
Une case contaminée le reste.
Une case saine devient contaminée si elle a au moins 2 cases voisines contaminées.

Étant données des cases initialement contaminées, est-ce que toutes les cases seront finalement contaminées ?

Exemple (avec 7 cases initialement contaminées) :

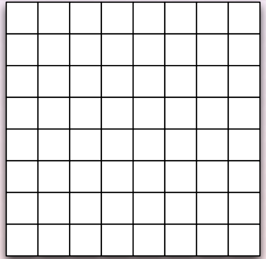


Énigme dans le cas d'au moins 2 voisins ?

Règles du jeu : (Cas "au moins 2 voisins contaminés")

Les cases d'un échiquier peuvent être **contaminées** (colorées) ou **saines** (blanches).
Une case contaminée le reste.
Une case saine devient contaminée si elle a au moins 2 cases voisines contaminées.

Énigme 5 : Quel est le nombre minimum de cases qui doivent être initialement contaminées pour que la contamination se propage à tout l'échiquier ?



https://scratch.mit.edu/projects/517390361/fullscreen/

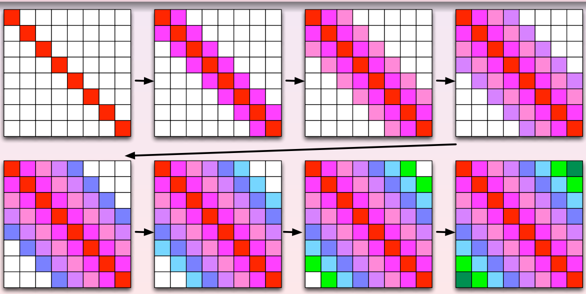
Énigme dans le cas d'au moins 2 voisins ?

Règles du jeu : (Cas "au moins 2 voisins contaminés")

Les cases d'un échiquier peuvent être **contaminées** (colorées) ou **saines** (blanches).
Une case contaminée le reste.
Une case saine devient contaminée si elle a au moins 2 cases voisines contaminées.

Énigme 5 : Quel est le nombre minimum de cases qui doivent être initialement contaminées pour que la contamination se propage à tout l'échiquier ?

8 cases initialement contaminées sont suffisantes. **Est-ce le minimum ?**

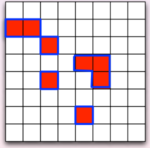


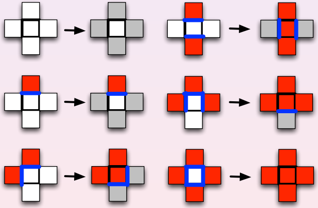
Optimalité dans le cas "au moins 2 voisins"

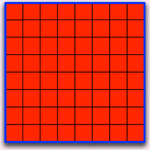
Oui ! 8 est le minimum !

Théorème [folklore ?] : Le nombre minimum de cases qui doivent être initialement contaminées pour que la contamination se propage à tout l'échiquier $n \times n$ (lorsqu'une case est contaminée si au moins 2 de ses voisins sont contaminés) est n.

n cases sont suffisantes (diagonale).
Idée géniale [?] : Notion de "périmètre" (en bleu) de la partie contaminée.





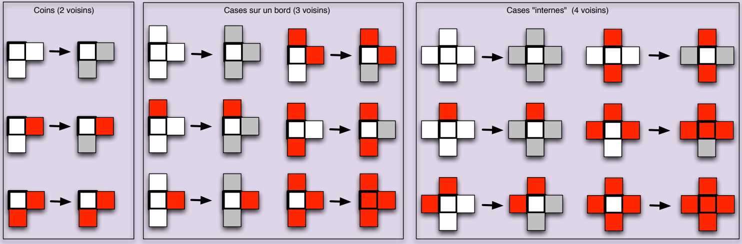


Si x cases sont initiallement contaminées : périmètre au plus $4x$.
Au cours du jeu, le périmètre ne peut pas augmenter !
Finalement (si l'échiquier est totalement contaminé) : périmètre $4n$. $\Rightarrow x \geq n$!

Jeu de la viralité dans le cas d'au moins 3 voisins

Règles du jeu : (Cas "au moins 3 voisins contaminés")

Les cases d'un échiquier peuvent être **contaminées** (colorées) ou **saines** (blanches).
Une case contaminée le reste.
Une case saine devient contaminée si elle a au moins 3 cases voisines contaminées.



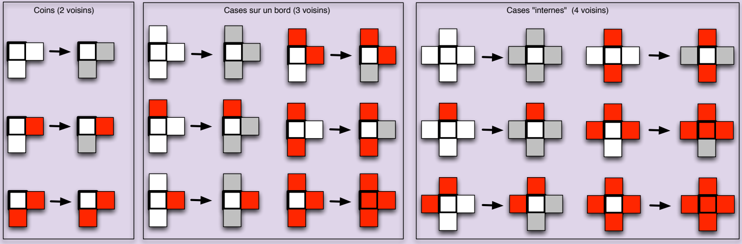
Énigme 6 : Quel est le nombre minimum de cases qui doivent être initialement contaminées pour que la contamination se propage à tout l'échiquier ?

[Pete 97, Flocchini *et al.* 04, Bollobás 06]

Jeu de la viralité dans le cas d'au moins 3 voisins

Règles du jeu : (Cas "au moins 3 voisins contaminés")

Les cases d'un échiquier peuvent être **contaminées** (colorées) ou **saines** (blanches).
Une case contaminée le reste.
Une case saine devient contaminée si elle a au moins 3 cases voisines contaminées.



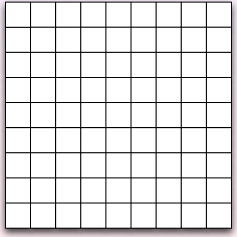
Énigme 6 : Quel est le nombre minimum de cases qui doivent être initialement contaminées pour que la contamination se propage à tout l'échiquier ?

$\Rightarrow$ chaque coin doit être contaminé initialement ;
$\Rightarrow$ pour chaque paire de cases adjacentes sur le bord, au moins l'une de ces cases doit être contaminée initialement.

Jeu de la viralité dans le cas d'au moins 3 voisins

Énigme 6 : Quel est le nombre minimum x_n de cases qui doivent être initialement contaminées pour que la contamination se propage à tout l'échiquier $n \times n$?

Exemple d'une grille 9×9



https://scratch.mit.edu/projects/517390361/fullscreen/

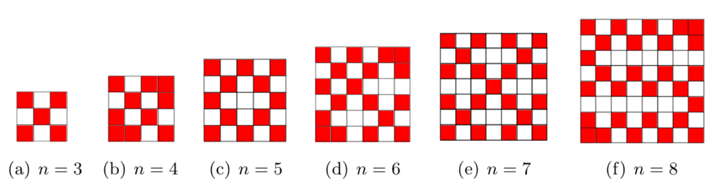
Jeu de la viralité dans le cas d'au moins 3 voisins

Énigme 6 : Quel est le nombre minimum x_n de cases qui doivent être initialement contaminées pour que la contamination se propage à tout l'échiquier $n \times n$?

Borne inf. sur x_n (idée du "périmètre" + les remarques précédentes) [Bollobás 06] :

- $x_n \geq LB_n = \lceil \frac{n^2+2n+4}{3} \rceil$ si n est pair ;
- $x_n \geq LB_n = \lceil \frac{n^2+2n}{3} \rceil$ si n est impair.

$LB_3 = 5, LB_4 = 10, LB_5 = 12, LB_6 = 18, LB_7 = 21$ et $LB_8 = 28$.

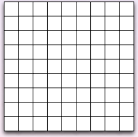


Configurations initiales optimales.

Jeu de la viralité dans le cas d'au moins 3 voisins

Premier cas bizarre $n = 9$ (et l'occasion de mettre des équations qui font peur :))

$LB_9 = 33$ mais impossible (pour nous) de trouver "à la main" une telle solution :([1]

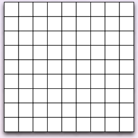


[1] Par volonté de simplification, cette page est très (très) fausse, désolé :(

Jeu de la viralité dans le cas d'au moins 3 voisins

Premier cas bizarre $n = 9$ (et l'occasion de mettre des équations qui font peur :))

$LB_9 = 33$ mais impossible (pour nous) de trouver "à la main" une telle solution :([1]



Programmation Linéaire : "traduction" du problème avec des équations linéaires à plusieurs variables (chaque case est-elle initialement contaminée (1) ou pas (0)).

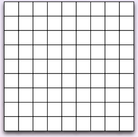
$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 5 \end{cases} \quad \Rightarrow x = 7,5 \text{ et } y = 2,5$$

[1] Par volonté de simplification, cette page est très (très) fausse, désolé :(

Jeu de la viralité dans le cas d'au moins 3 voisins

Premier cas bizarre $n = 9$ (et l'occasion de mettre des équations qui font peur :))

$LB_9 = 33$ mais impossible (pour nous) de trouver "à la main" une telle solution :([1]



Programmation Linéaire : "traduction" du problème avec des équations linéaires à plusieurs variables (chaque case est-elle initialement contaminée (1) ou pas (0)).

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 5 \\ y = 2,5 \end{cases} \quad \Rightarrow x = 7,5 \text{ et } y = 2,5$$

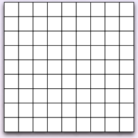
"plus on ajoute d'équations (de contraintes) moins il y a de possibilités à tester"

[1] Par volonté de simplification, cette page est très (très) fausse, désolé :(

Jeu de la viralité dans le cas d'au moins 3 voisins

Premier cas bizarre $n = 9$ (et l'occasion de mettre des équations qui font peur :))

$LB_9 = 33$ mais impossible (pour nous) de trouver "à la main" une telle solution :([1]



Programmation Linéaire : "traduction" du problème avec des équations linéaires à plusieurs variables (chaque case est-elle initialement contaminée (1) ou pas (0)).

$$\text{Minimize} \sum_{v \in V} c_{v,0} \tag{1}$$

$$\text{Subject to} \sum_{v \in V} c_{v,T} = |V| \tag{2}$$

$$c_{v,t} \leq c_{v,t-1} + \frac{1}{r} \sum_{w \in N(v)} c_{w,t-1} \qquad \forall v \in V, t \in \{1, ..., T\} \tag{3}$$

$$c_{v,t} \in \{0,1\} \qquad \forall v \in V, t \in \{1, ..., T\} \tag{4}$$

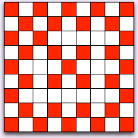
Des outils (e.g., Cplex) $\Rightarrow$ "testent toutes les possibilités" $\Rightarrow$ il y en a trop :(

[1] Par volonté de simplification, cette page est très (très) fausse, désolé :(

Jeu de la viralité dans le cas d'au moins 3 voisins

Premier cas bizarre $n = 9$ (et l'occasion de mettre des équations qui font peur :))

$LB_9 = 33$ mais impossible (pour nous) de trouver "à la main" une telle solution :([1]



Programmation Linéaire : "traduction" du problème avec des équations linéaires à plusieurs variables (chaque case est-elle initialement contaminée (1) ou pas (0)).

$$\text{Minimize} \sum_{v \in V} c_{v,0} \tag{1}$$

$$\text{Subject to} \sum_{v \in V} c_{v,T} = |V| \tag{2}$$

$$c_{v,t} \leq c_{v,t-1} + \frac{1}{r} \sum_{w \in N(v)} c_{w,t-1} \qquad \forall v \in V, t \in \{1, ..., T\} \tag{3}$$

$$c_{v,0} = 1 \qquad \forall v \in V, d(v) < r \tag{4}$$

$$c_{u,0} + c_{v,0} \geq 1 \qquad \forall \{u,v\} \in E, d(u) = d(v) = r \tag{5}$$

$$c_{v,0} + \sum_{w \in S} c_{w,0} \leq r \qquad \forall v \in V, d(v) \geq r, \forall S \subseteq N(v), |S| = r \tag{6}$$

$$c_{v,t} \in \{0,1\} \qquad \forall v \in V, t \in \{1, ..., T\} \tag{7}$$

$$y_e + c_{u,0} + c_{v,0} \geq 1 \quad \forall e = \{u,v\} \in E \tag{8}$$

$$2y_e + c_{u,0} + c_{v,0} \leq 2 \quad \forall e = \{u,v\} \in E \tag{9}$$

$$y_e \in \{0,1\} \quad \forall e = \{u,v\} \in E \tag{10}$$

$$z_{e,u} + z_{e,v} = y_e \quad \forall e = \{u,v\} \in E \tag{11}$$

$$\sum_{\substack{e' = \{w,v\} \\ w \in N(v)}} z_{e',v} < 1 \quad \forall v \in V \tag{12}$$

$$z_{e,u}, z_{e,v} \geq 0 \quad \forall e = \{u,v\} \in E \tag{13}$$

$$p_x^{xy} = 0 \text{ and } p_y^{xy} = 1 \tag{14}$$

$$p_v^{xy} - p_w^{xy} \leq 1 - y_{\{v,w\}}^{xy} \quad \forall \{v,w\} \in E(G^{xy}) \tag{15}$$

$$p_w^{xy} - p_v^{xy} \leq 1 - y_{\{v,w\}}^{xy} \quad \forall \{v,w\} \in E(G^{xy}) \tag{16}$$

En ajoutant des contraintes, ça "passe" pour de petites grilles $x_9 = LB_9 + 1 = 34$

[1] Par volonté de simplification, cette page est très (très) fausse, désolé :(

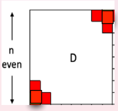
Jeu de la viralité dans le cas d'au moins 3 voisins

Énigme 6 : Quel est le nombre minimum x_n de cases qui doivent être initialement contaminées pour que la contamination se propage à tout l'échiquier $n \times n$?

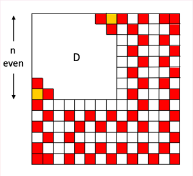
- $x_n \geq LB_n = \lceil \frac{n^2+2n+4}{3} \rceil$ si n est pair ;
- $x_n \geq LB_n = \lceil \frac{n^2+2n}{3} \rceil$ si n est impair.

Théorème [Benevides, Bermond, Lesfari, N., 2021]

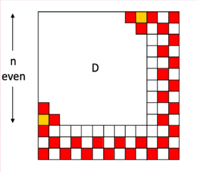
- $x_n = LB_n$ si n pair, et $x_n \leq LB_n + 1$ si n est impair ; (preuve par récurrence)
- ...



Configuration avec LB_n cases contaminées pour la grille n*n



Configuration avec LB_{n+6} cases contaminées pour la grille (n+6)*(n+6)



Configuration avec $LB_{n+3}+1$ cases contaminées pour la grille (n+3)*(n+3)

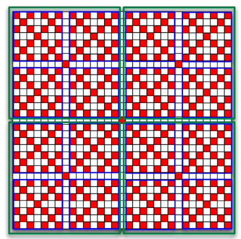
Jeu de la viralité dans le cas d'au moins 3 voisins

Énigme 6 : Quel est le nombre minimum x_n de cases qui doivent être initialement contaminées pour que la contamination se propage à tout l'échiquier $n \times n$?

- $x_n \geq LB_n = \lceil \frac{n^2+2n+4}{3} \rceil$ si n est pair ;
- $x_n \geq LB_n = \lceil \frac{n^2+2n}{3} \rceil$ si n est impair.

Théorème [Benevides, Bermond, Lesfari, N., 2021]

- $x_n = LB_n$ si n pair, et $x_n \leq LB_n + 1$ si n est impair ;
- de plus, $x_n = LB_n$ si $n = 6k - 1$ ou si $n = 2^p - 1$ (3,7,15,31...)



Jeu de la viralité dans le cas d'au moins 3 voisins

Énigme 6 : Quel est le nombre minimum x_n de cases qui doivent être initialement contaminées pour que la contamination se propage à tout l'échiquier $n \times n$?

- $x_n \geq LB_n = \lceil \frac{n^2+2n+4}{3} \rceil$ si n est pair ;
- $x_n \geq LB_n = \lceil \frac{n^2+2n}{3} \rceil$ si n est impair.

Théorème [Benevides, Bermond, Lesfari, N., 2021]

- $x_n = LB_n$ si n pair, et $x_n \leq LB_n + 1$ si n est impair ;
- de plus, $x_n = LB_n$ si $n = 6k - 1$ ou si $n = 2^p - 1$;
- et, $x_n = LB_n + 1$ si $n \in \{9 \text{ (preuve combinatoire)}, 13 \text{ (preuve par MILP)}\}$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
LB_n	1	3	5	10	12	18	21	28	33	42	48	58	65	76	85	98
x_n	-	-	-	-	-	-	-	-	34	-	-	-	66	-	-	-

n	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
LB_n	108	122	133	148	161	178	192	210	225	244	261	282
x_n	-	-	≤ 134	-	≤ 162	-	-	-	≤ 226	-	≤ 262	-

Outline

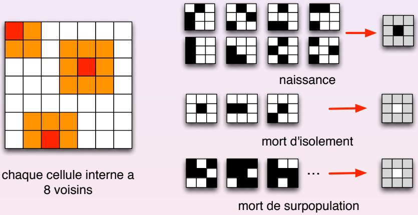
1. Pavage d'échiquiers
2. Jeux de viralité
   - Cas "au moins 2 voisins contaminés"
   - Cas "au moins 3 voisins contaminés"
3. Jeu de la vie

Jeu de la vie

[Conway 1970]

Dans une grille (normalement infinie), les cellules peuvent être :

- vivante/active/habitée... (noire)
- morte/inactive/vide... (blanche)



Évolution au tour par tour :

- naissance si 3 voisines vivantes ;
- mort (d'isolement) si ≤ 1 voisines vivantes ;
- mort (de surpopulation) si ≥ 4 voisines vivantes.

Jeu de la vie

[Conway 1970]

- naissance si 3 voisines vivantes ;
- mort (d'isolement) si ≤ 1 voisines vivantes ;
- mort (de surpopulation) si ≥ 4 voisines vivantes.

Y a-t-il des configurations initiales (finies)

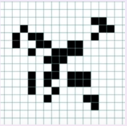
- qui survivent infiniment ?
- stables ?
- périodiques ?
- qui s'étendent arbitrairement loin ?
- qui font naître un nombre arbitraire de nouvelles cellules ?
- ...

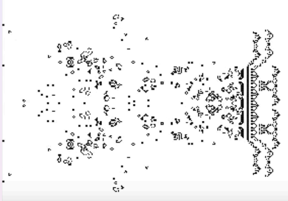
https://scratch.mit.edu/projects/517390361/fullscreen/

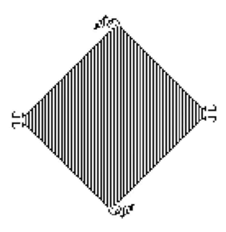
Jeu de la vie

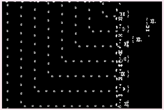
[Conway 1970]

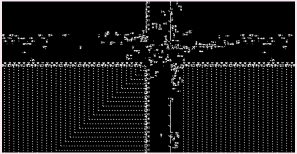
Science étonnante (D. Louapre) : https://www.youtube.com/watch?v=S-W0NX97DB0

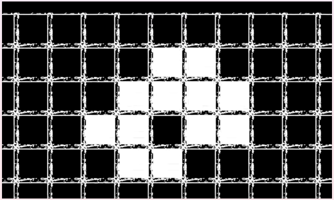












Le jeu de la vie est Turing complet ! [Berlekamp, Conway, Guy. Winning Ways for your Mathematical Plays. vol. 2, ch. 25 What is Life. 1982.] [P. Rendell, Turing Machine Universality of the Game of Life, 2014]

Conclusion

J'espère vous avoir donné envie d'en savoir plus :)

https://fr.wikipedia.org/wiki/Jeu_de_la_vie

Science étonnante (D. Louapre) :
https://www.youtube.com/watch?v=S-W0NX97DB0

Conférence d'Étienne Ghys :
https://www.youtube.com/watch?v=Nt4oWUT9KD8

http://www.crm.umontreal.ca/~durand/jeu-de-la-vie.html

http://golly.sourceforge.net/

Question ouverte (parmi d'autres) : Peut-on contaminer une grille 19×19 avec 133 cases contaminées intialement ? (dans le cas de 3 voisins)

Merci pour votre attention !