Comment appliquer les chaînes augmentantes pour atterrir à l'heure ?

Nicolas Nisse[1,2] Alexandre Salch[3] Valentin Weber[3]

[1] Inria, France

[2] Univ. Nice Sophia Antipolis, CNRS, I3S, UMR 7271, Sophia Antipolis, France

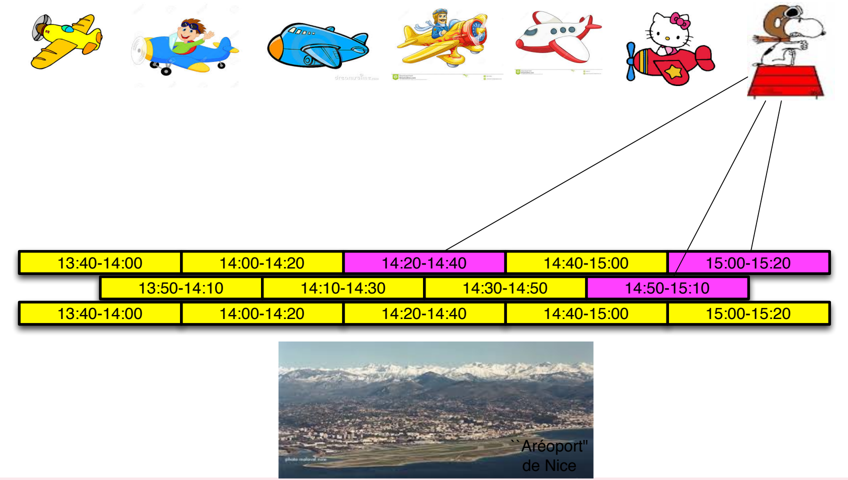
[3] Innovation & Research, Amadeus IT Group SA

AlgoTel 2015, Beaune, 3 juin 2015

Affectation des slots d'atterissage aux avions

Des avions à destination d'un aéroport

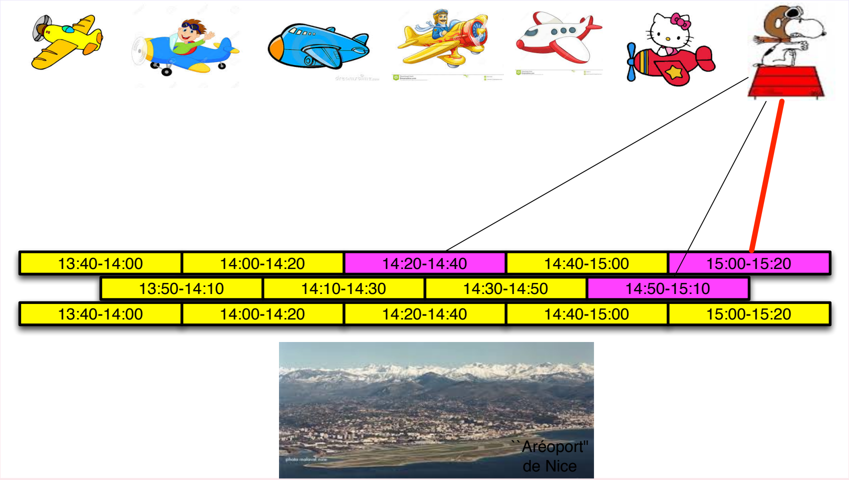
Affectation des slots d'atterissage aux avions



Chaque avion a un ensemble de slots disponibles

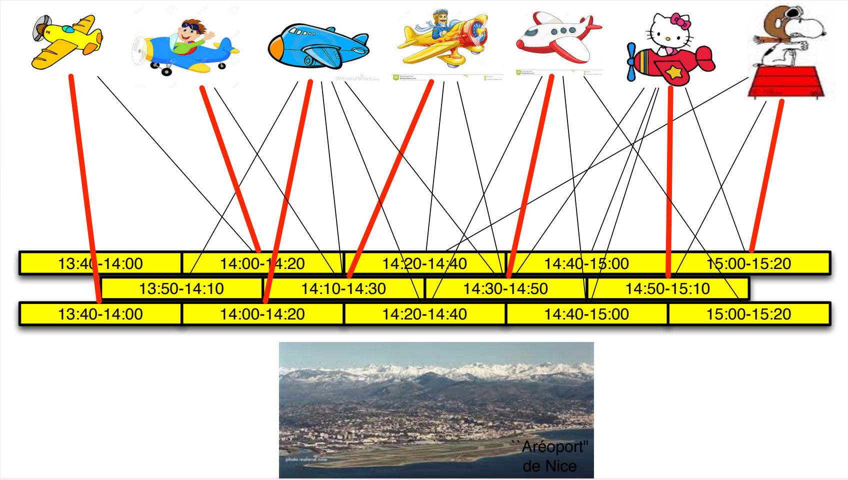
dépend des pistes, des horaires, des compagnies...

Affectation des slots d'atterissage aux avions



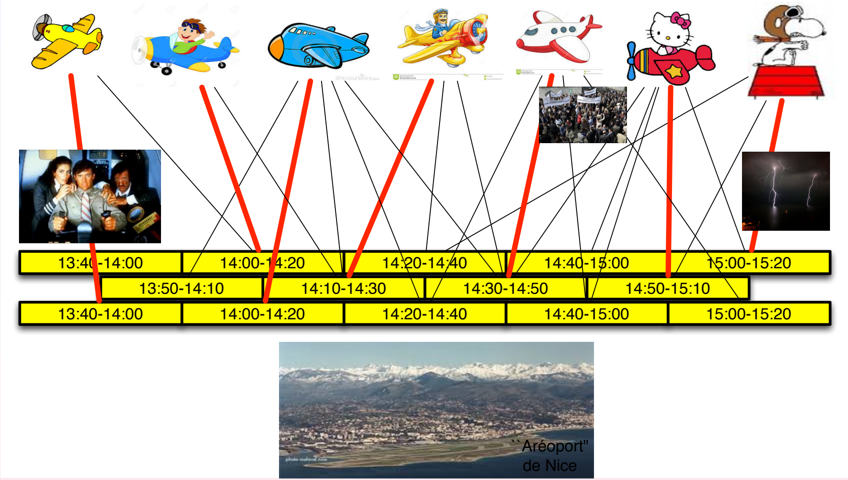
Initialement, un slot admissible est attribué à chaque avion.

Affectation des slots d'atterrissage aux avions



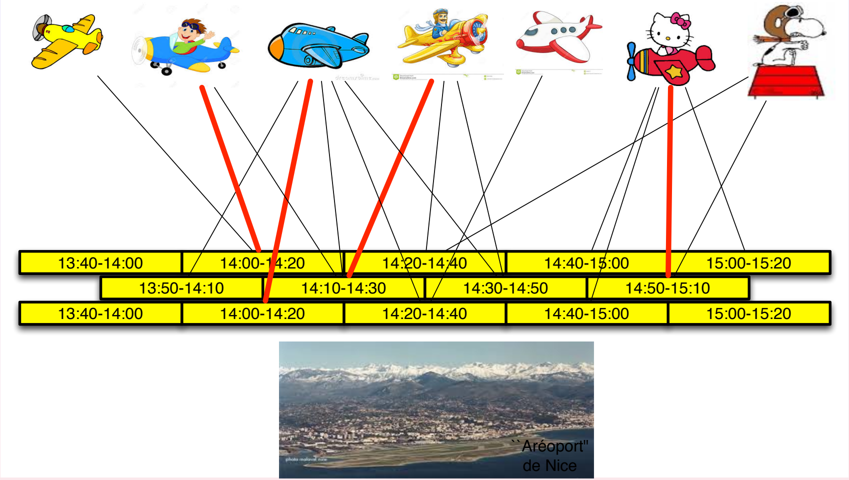
Initialement, un slot admissible est attribué à chaque avion.

Affectation des slots d'atterissage aux avions



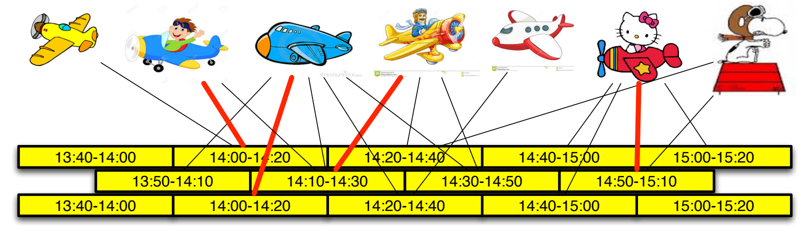
Des "impondérables" (no refund) se produisent...

Affectation des slots d'atterissage aux avions

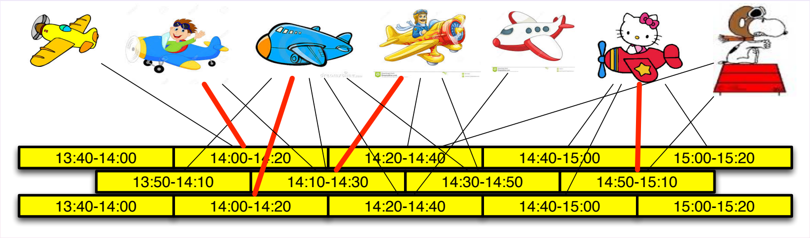


Comment rétablir la situation ?

i.e., maximiser # avions qui peuvent atterrir !!

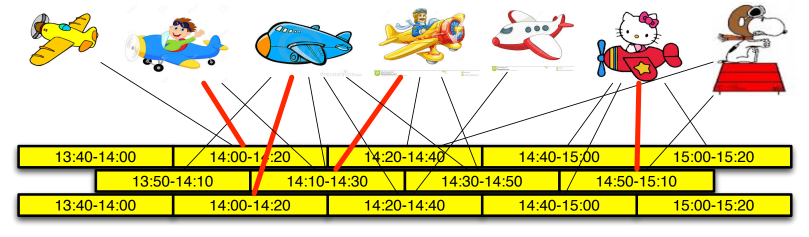


Faire “table rase” et calculer un couplage maximum ?



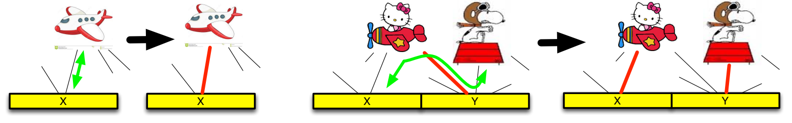
Faire “table rase” et calculer un couplage maximum ?
Non!! Contraintes dues au système/ à la politique des compagnies...

Un simple problème de couplage dans un biparti ?

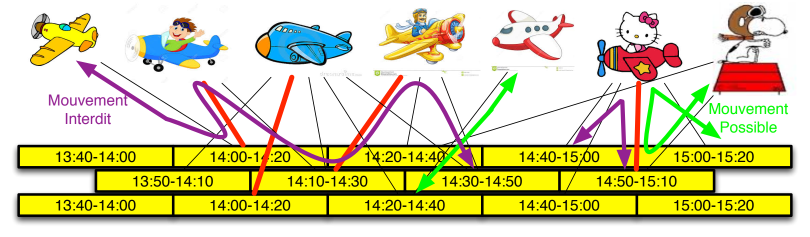


Faire "table rase" et calculer un couplage maximum ?
Non!! Contraintes dues au système/ à la politique des compagnies...
SEULEMENT 2 "mouvements" possibles

pour satisfaire toutes les demandes

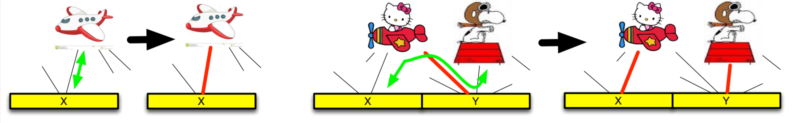


Un simple problème de couplage dans un biparti ?



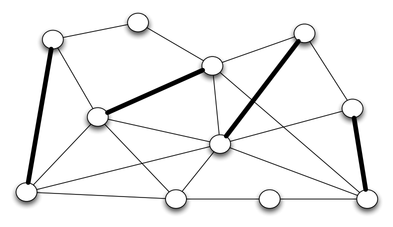
Faire "table rase" et calculer un couplage maximum ?
Non!! Contraintes dues au système/ à la politique des compagnies...
SEULEMENT 2 "mouvements" possibles

pour satisfaire toutes les demandes



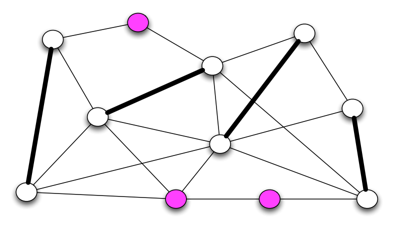
Rappels sur les couplages dans les graphes

Soit $G = (V, E)$ un graphe.
Un couplage $M \subseteq E =$ ensemble d'arêtes disjointes



Rappels sur les couplages dans les graphes

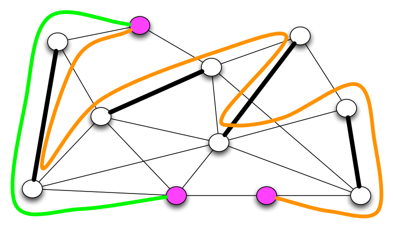
Soit $G = (V, E)$ un graphe.
Un couplage $M \subseteq E$ = ensemble d'arêtes disjointes



Sommet *exposé* : n'appartient pas au couplage

Rappels sur les couplages dans les graphes

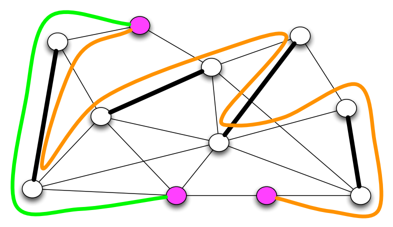
Soit $G = (V, E)$ un graphe.
Un couplage $M \subseteq E$ = ensemble d'arêtes disjointes



Sommet *exposé* : n'appartient pas au couplage
Chemin *M-augmentant* : "alternant" et extrémités exposées

Rappels sur les couplages dans les graphes

Soit $G = (V, E)$ un graphe.
Un couplage $M \subseteq E$ = ensemble d'arêtes disjointes



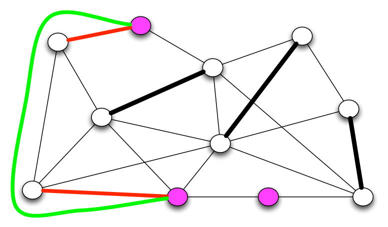
Sommet *exposé* : n'appartient pas au couplage
Chemin *M-augmentant* : "alternant" et extrémités exposées

Lemme de Berge 1957: Soit un graphe G

M couplage maximum ($|M| = \mu(G)$) ssi pas de chemin M-augmentant.

Rappels sur les couplages dans les graphes

Soit $G = (V, E)$ un graphe.
Un couplage $M \subseteq E$ = ensemble d'arêtes disjointes



Sommet *exposé* : n'appartient pas au couplage
Chemin *M-augmentant* : "alternant" et extrémités exposées

Lemme de Berge 1957: Soit un graphe G

M couplage maximum ($|M| = \mu(G)$) ssi pas de chemin M-augmentant.

Calcul de couplage maximum

Couplage maximum dans un graphe biparti

"facile" [Méthode hongroise]

Couplage maximum $\mu(G)$

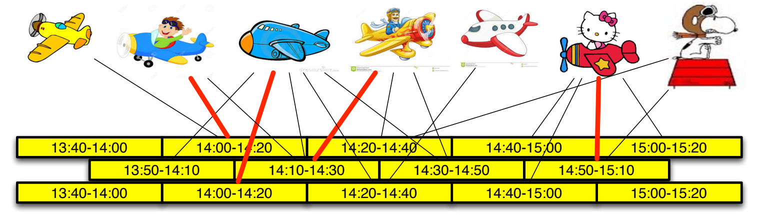
Polynomial [Edmonds 1965]

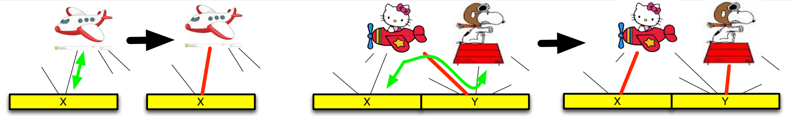
Augmenter "gloutonnement" des chemins de longueur $\leq k$

$\frac{k-1}{k}$-Approximation pour $\mu(G)$ [Hopcroft,Kraft 1973]

Application pour transmission dans réseaux sans-fil

Retour sur l'assignation des slots d'atterrisage





Soient un graphe G, un coupage (partiel) M et $k \in \mathbb{N}$ impair

Soit $\mu_k(G, M)$ la taille maximum d'un couplage qui puisse être obtenu de M en augmentant des chemins de longueur impaire $\leq k$. ici $k = 3$

Nos contributions

Problème: Soient un graphe G, un coupage M et $k \in \mathbb{N}$ impair

Calculer un couplage de taille $\mu_k(G, M)$, qui puisse être obtenu de M en augmentant des chemins de longueur impaire au plus k.

Cas $M = \emptyset$**.** Pour tout $k \geq 0$ impair, $\mu_k(G, \emptyset) = \mu(G)$
Cas $k = 1$**.** Pour tout couplage M, $\mu_1(G, M) = \mu(G \setminus V(M)) + |M|$.

Soient un graphe G, un coupage M

Calculer un couplage de taille $\mu_3(G, M)$, obtenu de M en augmentant des chemins de longueur impaire au plus 3, est dans P.

Soient un graphe G biparti planaire de degré max. 3, un coupage M

Calculer un couplage de taille $\mu_k(G, M)$, obtenu de M en augmentant des chemins de longueur impaire au plus $k \geq 5$ est NP-complet.

Nos contributions

Problème: Soient un graphe G, un coupage M et $k \in \mathbb{N}$ impair

Calculer un couplage de taille $\mu_k(G,M)$, qui puisse être obtenu de M en augmentant des chemins de longueur impaire au plus k.

Cas $M = \emptyset$**.** Pour tout $k \geq 0$ impair, $\mu_k(G,\emptyset) = \mu(G)$
Cas $k = 1$**.** Pour tout couplage M, $\mu_1(G,M) = \mu(G \setminus V(M)) + |M|$.

Soient un graphe G, un coupage M

Calculer un couplage de taille $\mu_3(G,M)$, obtenu de M en augmentant des chemins de longueur impaire au plus 3, est dans P.

Soient un graphe G biparti planaire de degré max. 3, un coupage M

Calculer un couplage de taille $\mu_k(G,M)$, obtenu de M en augmentant des chemins de longueur impaire au plus $k \geq 5$ est NP-complet.

Nos contributions

Problème: Soient un graphe G, un coupage M et $k \in \mathbb{N}$ impair

Calculer un couplage de taille $\mu_k(G,M)$, qui puisse être obtenu de M en augmentant des chemins de longueur impaire au plus k.

Cas $M = \emptyset$. Pour tout $k \geq 0$ impair, $\mu_k(G,\emptyset) = \mu(G)$
Cas $k = 1$. Pour tout couplage M, $\mu_1(G,M) = \mu(G \setminus V(M)) + |M|$.

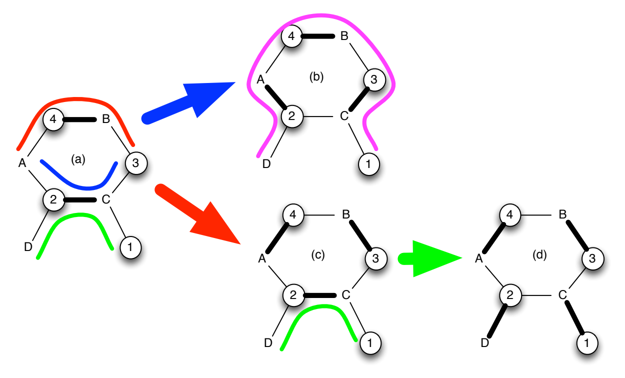
Soient un graphe G, un coupage M

Calculer un couplage de taille $\mu_3(G,M)$, obtenu de M en augmentant des chemins de longueur impaire au plus 3, est dans P.

Soient un graphe G biparti planaire de degré max. 3, un coupage M

Calculer un couplage de taille $\mu_k(G,M)$, obtenu de M en augmentant des chemins de longueur impaire au plus $k \geq 5$ est NP-complet.

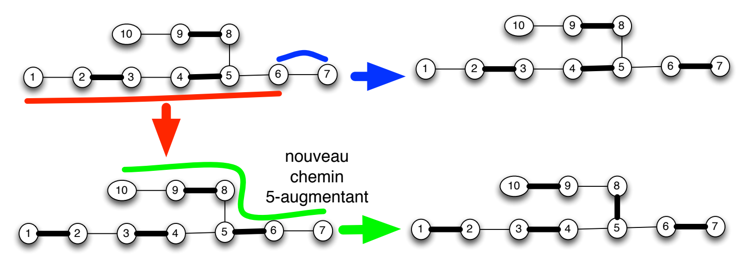
Pourquoi borner la longueur des chemins augmentants complexifie le problème ? ex: $k = 3$



$(a) \rightarrow (b)$ pas optimal, mais $(a) \rightarrow (c) \rightarrow (d)$ optimal

$\Rightarrow$ Pour $k = 3$, l'ordre d'augmentation influe sur le résultat

Pourquoi borner la longueur des chemins augmentants complexifie le problème ? ex: $k = 5$



$\Rightarrow$ Pour $k = 5$, l'ordre d'augmentation influe sur la création de nouveaux chemins augmentants qui sont nécessaires pour atteindre l'optimum

Complexité du calcul de $\mu_k(G, M)$

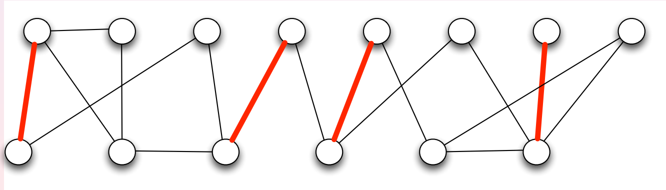
Soient G un graphe et M un couplage. Soit $\mathcal{P}_3(G, M)$ les chemins M-augmentants de longueur impaire au plus 3.

Théorème : [N., Salch et Weber'15]

Un couplage de taille $\mu_3(G, M)$ peut être obtenu en augmentant uniquement des chemins de $\mathcal{P}_3(G, M)$.

Conséquence : [N., Salch et Weber'15]

$\mu_3(G, M)$ peut être calculé en temps polynomial.



Exemple du déroulement de l'algorithme

Complexité du calcul de $\mu_k(G, M)$

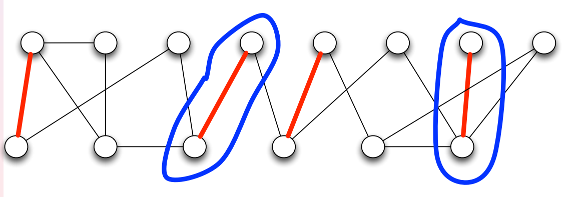
Soient G un graphe et M un couplage. Soit $\mathcal{P}_3(G, M)$ les chemins M-augmentants de longueur impaire au plus 3.

Théorème : [N., Salch et Weber'15]

Un couplage de taille $\mu_3(G, M)$ peut être obtenu en augmentant uniquement des chemins de $\mathcal{P}_3(G, M)$.

Conséquence : [N., Salch et Weber'15]

$\mu_3(G, M)$ peut être calculé en temps polynomial.



Certaines arêtes dans aucun chemin 3-augmentant initiallement

Complexité du calcul de $\mu_k(G, M)$

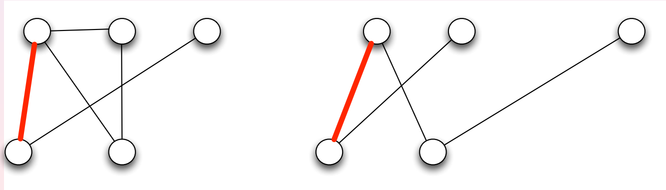
Soient G un graphe et M un couplage. Soit $\mathcal{P}_3(G, M)$ les chemins M-augmentants de longueur impaire au plus 3.

Théorème : [N., Salch et Weber'15]

Un couplage de taille $\mu_3(G, M)$ peut être obtenu en augmentant uniquement des chemins de $\mathcal{P}_3(G, M)$.

Conséquence : [N., Salch et Weber'15]

$\mu_3(G, M)$ peut être calculé en temps polynomial.



Grace au Théorème, on peut les enlever

Complexité du calcul de $\mu_k(G, M)$

Soient G un graphe et M un couplage. Soit $\mathcal{P}_3(G, M)$ les chemins M-augmentants de longueur impaire au plus 3.

Théorème : [N., Salch et Weber'15]

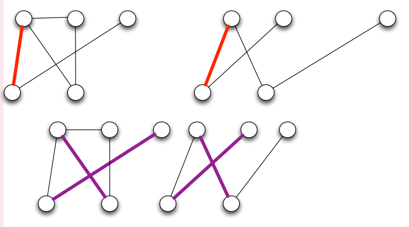
Un couplage de taille $\mu_3(G, M)$ peut être obtenu en augmentant uniquement des chemins de $\mathcal{P}_3(G, M)$.

Conséquence : [N., Salch et Weber'15]

$\mu_3(G, M)$ peut être calculé en temps polynomial.

On applique un algorithme de couplage maximum "classique"

On peut passer de l'un à l'autre (car le couplage restant a de bonnes propriétés)



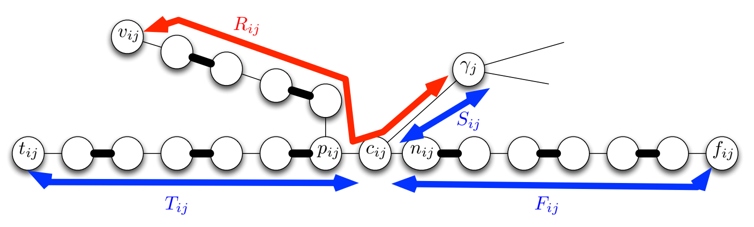
Complexité du calcul de $\mu_k(G, M)$

Le théorème précédent n'est pas vrai pour $k \geq 5$.

Théorème : [N., Salch et Weber'15]

Pour tout $k \geq 5$ impair, calculer $\mu_k(G, M)$ est NP-complet dans la classe des graphes G bipartis planaires de degré au plus 3.

Réduction de 3-SAT planaire

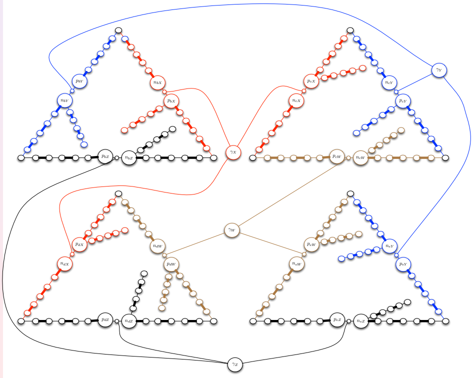


Gadget pour Variable i positive dans Clause j.

Le théorème précédent n'est pas vrai pour $k \geq 5$.

Théorème : [N., Salch et Weber'15]

Pour tout $k \geq 5$ impair, calculer $\mu_k(G, M)$ est NP-complet dans la classe des graphes G bipartis planaires de degré au plus 3.



Conclusion et futurs travaux

Calcul de $\mu_k(G, M)$

- si G est un arbre (polynomial dans les chemins)
- si G est un graphe d'intervalle/cordal
- ...

Couplage maximum avec d'autres contraintes

- si des cycles peuvent être inversés
- meilleurs algorithmes d'approximation
- ...

Principal travail futur !!

Apprendre à communiquer avec les industriels

Après plusieurs mois de questionnement, les hypothèses/questions changent...

Véritables (?) contraintes du système/des contrôleurs aériens

- Echanger le couplage de cycles de longueur 4 et augmenter des chemins de longueur 1
- deux classes de slots : ceux de la compagnie et les autres
- what else?