University Côte d'Azur
Master 1 : Informatique et Interactions

Graphs
Juin 2023

Graphs :

3 heures

Aucun ordinateur, smartphone, téléphone, minitel, polycopié ou livre... n'est autorisé. Vous pouvez disposer de notes manuscrites. Vous pouvez répondre en français ou en anglais comme vous le désirez. Toutes les réponses doivent être expliquées/argumentées (principalement pour les questions commençant par "Montrez que"). **Chaque section est indépendante. Les temps proposés pour chaque section sont seulement à titre indicatif. Les étoiles à côté des questions donnent un indice sur leur difficulté. Le sujet est volontairement long : n'oubliez pas de tout lire pour répondre au plus grand nombre de questions.**

Rappelons qu'un graphe $G = (V, E)$ a un ensemble de **sommets** V et un ensemble d'**arêtes** $E \subseteq V \times V$.

1 Algorithme et résultats vus en cours (25 min.)

Un ensemble de sommets $Q \subseteq V$ est une **couverture par sommets** de $G = (V, E)$ si Q "touche" chaque arête, i.e., si $e \cap Q \neq \emptyset$ pour toute arête $e \in E$.

Question 1 *Donnez une couverture par sommets du graphe G de la Figure 1.*

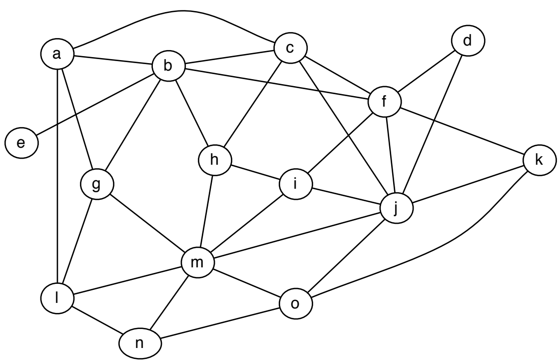

FIGURE 1 – Le graphe G des questions 1, 17 et 22.

Étant donnés un entier $k \in \mathbb{N}$ fixé et un graphe G, on veut déterminer si G admet une couverture par sommets Q de taille $|Q| \leq k$.

Question 2 *Soient un graphe $G = (V, E)$, un sommet $v \in V$ de degré $> k$ et une couverture par sommets $Q \subseteq V$ telle que $|Q| \leq k$. Prouvez que $v \in Q$.* *Aide : par l'absurde.*

Question 3 *Soit un graphe $G = (V, E)$, dont le degré maximum est $\leq k$ et qui admet une couverture par sommets $Q \subseteq V$ telle que $|Q| \leq k$. Prouvez que $|E| \leq k^2$.*

Algorithm 1 Algo1(G, k, Q)

Require: Un graphe $G = (V, E)$, un entier $k \in \mathbb{N}$ et un ensemble Q.

1: **Si** $|E| = 0$, **Renvoyer** Q
2: **Sinon**, **si** $k = 0$, **renvoyer** "*Pas de solution*"
3: **Sinon**, **si** il existe un sommet v de degré $> k$
4:     Soit G' le graphe obtenu de G en supprimant v (et ses arêtes incidentes)
5:     **Renvoyer** $Algo1(G', k-1, Q \cup \{v\})$
6: **Sinon**, **si** $|E| > k^2$, **renvoyer** "*Pas de solution*"
7: **Sinon**, effectuer une recherche exhaustive :
8:     **Si** G admet une couverture par sommets Q' de taille $\leq k$, **retourner** $Q \cup Q'$.
9:     **Sinon**, **renvoyer** "*Pas de solution*"

Question 4 *Appliquez $Algo1(H, 6, \emptyset)$ au graphe H de la Figure 2 : décrivez les valeurs de G, k et Q lors des différents appels récursifs, argumentez brièvement votre résultat pour les lignes 8 et/ou 9, et bien sûr donnez le résultat renvoyé par l'exécution.*

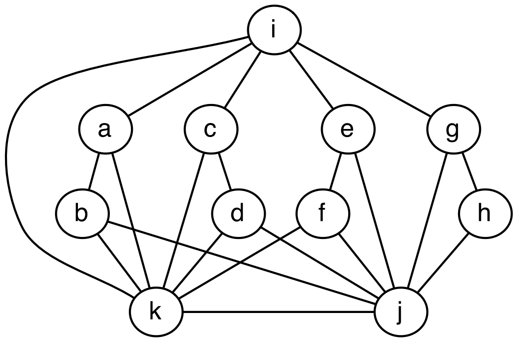

FIGURE 2 – Le graphe H de la question 4.

Question 5 *Soient G un graphe et $k \in \mathbb{N}$. Que renvoie $Algo1(G, k, \emptyset)$ et quelle est sa complexité temporelle (en fonction du nombre de sommets et de k) ?*

Justifiez votre réponse quant à la complexité.

2 Couverture par sommets dans les graphes bipartis (60 min.)

Un **couplage** $M \subseteq E$ dans un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble d'arêtes deux-à-deux disjointes, i.e., pour toutes $e, f \in M$, $e \cap f = \emptyset$. Un chemin $P = (v_1, \cdots, v_\ell)$ de G est M-**alternant** si, pour tout $1 < i < \ell$, $\{v_{i-1}, v_i\} \in M$ ou $\{v_i, v_{i+1}\} \in M$. Le chemin P est M-**augmentant** si il est M-alternant et si v_1 et v_ℓ ne sont **pas couverts** par M (ne sont pas extrémités d'une arête de M).

Question 6 *Énoncez le théorème de Berge (lien entre couplage maximum et chemins augmentants).*

Question 7 *Soient $G = (V, E)$ un graphe, $M \subseteq E$ un couplage de G et $Q \subseteq V$ une couverture par sommets de G. Montrez que $|M| \leq |Q|$.*

Un ensemble de sommets $I \subseteq V$ est un **ensemble stable** de $G = (V, E)$ si il n'y a aucune arête entre les sommets de I, i.e., si pour tous $u, v \in I$, $\{u, v\} \notin E$.

Un graphe $G = (V = A \cup B, E)$ est **biparti** si son ensemble de sommets V peut être partitionné en deux stables A et B.

Question 8 *Soit $G = (A \cup B, E)$ un graphe biparti. Montrez que A est une couverture par sommets de G.*

On dit qu'un couplage $M \subseteq E$ d'un graphe $G = (V, E)$ **sature** un ensemble de sommets $W \subseteq V$ si tout sommet de W est extrémité d'une arête de M (M "touche" tous les sommets de W), i.e., $\forall v \in W$, $\exists e \in M$ telle que $v \in e$.

Question 9 *Soit $G = (A \cup B, E)$ un graphe biparti qui admet un couplage M saturant A. Montrez que A est une couverture par sommets de G de taille minimum.*

Aide : Montrez que $|M| = |A|$.

Dans les questions 10 à 14, on utilisera les notations suivantes.

Soient $G = (A \cup B, E)$ un graphe biparti et $M \subseteq E$ un couplage maximum de G. Supposons que M ne sature pas A et soit $U \subseteq A$ les sommets de A non couverts par M. Soit $X \subseteq V$ les sommets qui sont liés aux sommets de U par un chemin M-alternant (i.e., X est l'ensemble des sommets w tels qu'il existe un chemin M-alternant de w à un sommet de U). Soient $A' = X \cap A$ et $B' = X \cap B$. Notez que $U \subseteq A'$. Un exemple est décrit sur la Figure 3.

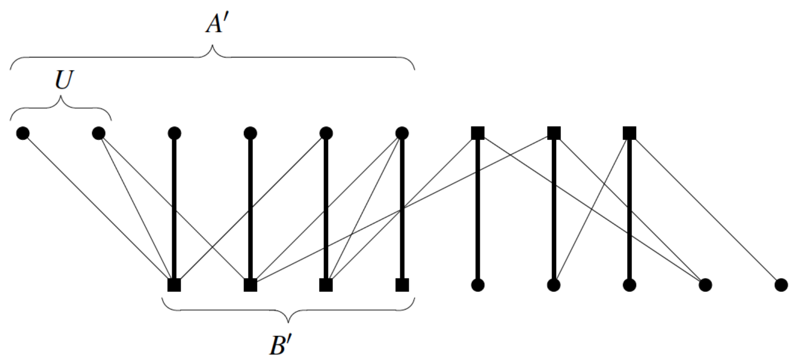

FIGURE 3 – Exemple d'un graphe biparti $G = (A \cup B, E)$ et d'un couplage maximum M illustrant les notations utilisées dans les questions 10 à 14. L'ensemble A correspond aux sommets du haut, et l'ensemble B à ceux du bas. Les arêtes du couplage M sont celles en gras.

Question 10 *Montrez que $N(A') = B'$.*

On rappelle que $N(A')$ est l'ensemble des voisins des sommets de A'.

Question 11 *Montrez que B' est saturé par M (i.e., les sommets de B' sont couverts par M : $\forall v \in B'$, $\exists e \in M$ telle que $v \in e$)* *Aide : par l'absurde en utilisant le théorème de Berge.*

Dans les questions 12 à 14, on pose $Y = B' \cup (A \setminus A')$.

Question 12 *(*) Montrez que Y est une couverture par sommets de G.*

Aide : pour toute $e \in E$, montrez que $e \cap Y \neq \emptyset$.

Question 13 *(***) Montrez que* $|Y| = |M|$.

Question 14 *En déduire que* Y *est une couverture par sommets de taille minimum.*

Question 15 *Déduire des questions précédentes (et des résultats vus en cours) qu'une couverture par sommets de taille minimum peut être calculée en temps polynomial dans la classe des graphes bipartis.*

Question 16 *Donnez une couverture par sommets de taille minimum du graphe de la Figure 3.*

3 Algorithme paramétré pour clique maximum (35 min.)

Un ensemble de sommets $K \subseteq V$ est une **clique** de $G = (V, E)$ si les sommets de K sont tous "liés" les uns aux autres dans G, i.e., si pour tous $u, v \in K$, $\{u, v\} \in E$ (si il y une arête entre u et v pour tous sommets u et v dans K).

Question 17 *Donnez une clique du graphe* G *de la Figure 1.*

Étant donné un graphe G, on cherche une clique de G de taille maximum.

Question 18 *Donnez un algorithme "naïf" qui calcule une clique maximum dans un graphe* G*. Quelle est la complexité de votre algorithme en fonction du nombre de sommets de* G *?*

Le problème qui, étant donnés un graphe G et un entier $k \in \mathbb{N}$, vise à décider si G contient une clique de taille au moins k est NP-complet. La suite de cette section est dédiée à un algorithme pour ce problème paramétré par la **dégénérescence** du graphe G.

Soient $G = (V, E)$ un graphe et $\mathcal{O} = (v_1, \cdots, v_n)$ un ordre sur les sommets de G.

Pour tout $1 \leq i \leq n$, on note $G_i(\mathcal{O}) = G[\{v_i, \cdots, v_n\}]$ le **sous-graphe de G induit** par $\{v_i, \cdots, v_n\}$, c'est-à-dire, $G_i(\mathcal{O})$ est le graphe obtenu de G en supprimant les sommets $v_1, \cdots, v_{i-1}$ (i.e., $G_i(\mathcal{O})$ est le graphe obtenu de G en "ne gardant que" les sommets $v_i, \cdots, v_n$).

Pour tout $1 \leq i \leq n$, on note $G^*_i(\mathcal{O})$ le sous-graphe de $G_i(\mathcal{O})$ induit par v_i et ses voisins dans $G_i(\mathcal{O})$ (donc, $G^*_i(\mathcal{O})$ est le sous-graphe de G induit par v_i et ses voisins v_j avec $j > i$, i.e., $G^*_i(\mathcal{O})$ est obtenu de G en "ne gardant que" le sommet v_i et ses voisins v_j, $j > i$).

Voir un exemple sur la Figure 4.

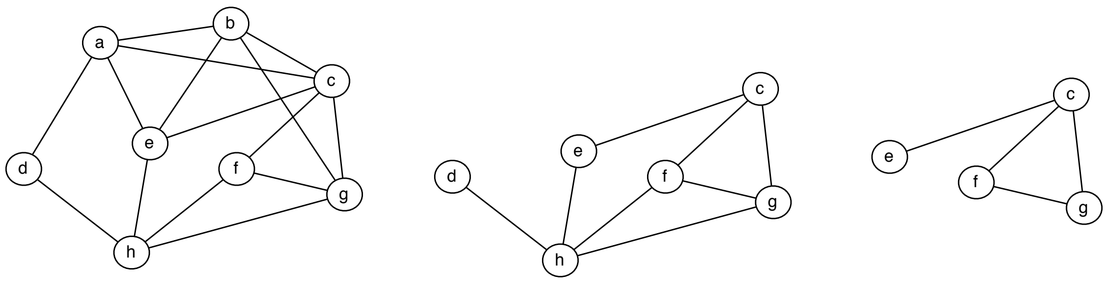

Figure 4 – Exemple d'un graphe G (gauche) avec un ordre $\mathcal{O} = (v_1 = a, v_2 = b, v_3 = c, \cdots, h)$ de ses sommets, le graphe $G_3(\mathcal{O})$ (milieu) et le graphe $G^*_3(\mathcal{O})$ (à droite).

Algorithm 2 Algo2$(G, \mathcal{O})$

Require: Un graphe $G = (V, E)$ et $\mathcal{O} = (v_1, \cdots, v_n)$ un ordre sur les sommets de G.

$K = \emptyset$
for $i = 1$ à n **do**
    Soit $G_i^*(\mathcal{O})$ le graphe obtenu de G en ne gardant que v_i et ses voisins v_j avec $j > i$.
    Déterminer (par recherche exhaustive) une clique maximum K_i de $G_i^*(\mathcal{O})$ contenant v_i.
    Si $|K_i| > |K|$, $K \leftarrow K_i$.
Renvoyer K.

Question 19 *Prouvez que, pour tout ordre $\mathcal{O}$ des sommets d'un graphe G, Algo2$(G, \mathcal{O})$ renvoie une clique maximum de G.*

Aide : Soit K^* une clique de G et soit $1 \leq j \leq n$ le plus petit entier (dans l'ordre $\mathcal{O}$) tel que $v_j \in K^*$. Montrez que l'itération j de Algo2$(G, \mathcal{O})$ renvoie une clique de taille au moins $|V(K^*)|$.

Un ordre $\mathcal{O}$ des sommets d'un graphe G a une **dégénérescence** $\leq k$ si $|V(G_i^*(\mathcal{O}))| \leq k+1$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Question 20 *Donnez la complexité temporelle (en fonction de k et du nombre de sommets de G) de Algo2$(G, \mathcal{O})$ pour un ordre $\mathcal{O}$ de dégénérescence $\leq k$.*

Question 21 *L'algorithme Algo2 est il FPT (Fixed Parameter Tractable) en la dégénérescence du graphe ? Justifiez votre réponse.*

4 Programmation dynamique pour ensemble stable (60 min.)

Un ensemble de sommets $I \subseteq V$ est un **ensemble stable** de $G = (V, E)$ si il n'y a aucune arête entre les sommets de I, i.e., si pour tous $u, v \in I$, $\{u, v\} \notin E$.

Question 22 *Donnez un ensemble stable du graphe G de la Figure 1.*

Étant donné un graphe G, on cherche un ensemble stable de G de taille maximum.

Question 23 *Donnez un algorithme "naïf" qui calcule un ensemble stable maximum dans un graphe G. Quelle est la complexité de votre algorithme en fonction du nombre de sommets de G ?*

Rappelons qu'un **arbre** est un graphe connexe sans cycle (et une **forêt** est un graphe sans cycle). Une **feuille** est un sommet de degré 1 (avec un unique voisin).

Question 24 *Soient $F = (V, E)$ une forêt et $L \subseteq V$ l'ensemble des feuilles de F. Montrez qu'il existe un stable maximum $I \subseteq V$ de F tel que $L \subseteq I$.*

Aide : Soit un stable maximum I et une feuille $v \in L$: si $v \notin I$, transformez I en un autre stable (sans diminuer sa taille) qui contient v.

Question 25 *Donnez un algorithme polynomial qui calcule un stable maximum dans la classe des arbres.*

Dans la suite de cette section, on considère un arbre $T = (V, E)$ dont les sommets sont pondérés, i.e., on se donne aussi une fonction $\omega : V \to \mathbb{R}^+$ de poids sur les sommets. Le poids d'un ensemble de sommets $W \subseteq V$ est la somme des poids de ses sommets : $\omega(W) = \sum_{v \in W} \omega(v)$. Étant donné un arbre pondéré, on cherche un stable de poids maximum dans cet arbre.

Question 26 *Donnez (sans justification), pour chacun des deux arbres pondérés de la Figure 5, un stable de poids maximum.*

FIGURE 5 – Deux arbres pondérés T_1 (gauche) et T_2 (droite). Les poids des sommets sont indiqués (en bleu et en gras) à côté de chaque sommet.

Soit un arbre pondéré $(T = (V, E), \omega)$ enraciné en un sommet arbitraire $r \in V$, et soient $v_1, \cdots, v_d$ les voisins (enfants) de r. Pour tout $1 \leq i \leq d$, on note T_i le sous-arbre de T enraciné en v_i (donc, T_i est le sous-arbre induit par v_i et ses descendants). On note :

— $OPT(T, \omega)$ le poids maximum d'un stable dans T ;

— $OPT_1(T, \omega)$ le poids maximum d'un stable dans T qui ne contient pas r, i.e., $OPT_1(T, \omega) = \max\{\omega(I) \mid r \notin I \subseteq V \texttt{ et } I \texttt{ est un stable de T}\}$;

— $OPT_2(T, \omega)$ le poids maximum d'un stable dans T qui contient r, i.e., $OPT_2(T, \omega) = \max\{\omega(I) \mid r \in I \subseteq V \texttt{ et } I \texttt{ est un stable de T}\}$.

Question 27 *Montrez que* $OPT(T, \omega) = \max\{OPT_1(T, \omega), OPT_2(T, \omega)\}$.

Question 28 *(*) Montrez que* $OPT_1(T, \omega) = \sum_{1 \leq i \leq d} OPT(T_i, \omega)$.

Question 29 *(*) Montrez que* $OPT_2(T, \omega) = \omega(r) + \sum_{1 \leq i \leq d} OPT_1(T_i, \omega)$.

Question 30 *(**) Décrivez (par exemple, donnez un pseudo code) un algorithme (récursif) qui calcule $OPT(T, \omega)$. Justifiez que votre algorithme renvoie la solution attendue en utilisant les questions précédentes. Donnez sa complexité en fonction de $|V(T)|$.*