

# Voleur véloce dans un réseau planaire <sup>†</sup>

Nicolas Nisse<sup>1</sup> and Karol Suchan<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>*DIM, Université du Chili, Chili* et <sup>2</sup>*Faculty of App. Maths., AGH - U. of Science and Technology, Cracow, Poland*

---

Le jeu des gendarmes et du voleur impliquent deux joueurs qui jouent à tour de rôle dans un réseau. Le premier déplace les gendarmes le long des liens du réseau, puis c'est au tour du second qui déplace le voleur. Le but des gendarmes est d'attraper le voleur, tandis que ce dernier essaie d'éviter la capture indéfiniment. Le problème dans ce contexte est de minimiser le nombre de gendarmes nécessaires pour capturer le voleur. Ce nombre s'appelle *l'indice d'évasion* du réseau. Si les gendarmes et le voleur ont la même vitesse, Schröder (2001) a prouvé que  $3 + \frac{3}{2}g$  gendarmes suffisent à capturer tout voleur dans un réseau de *genre* borné  $g$ . En particulier, cela signifie que la capture d'un voleur dans un réseau *planaire* est facile puisque 3 gendarmes suffisent (en fait deux gendarmes sont suffisants dans toute grille).

Dans ce papier, nous aidons le voleur en lui permettant de se déplacer plus vite que les gendarmes. Nous montrons que cela conduit à une augmentation drastique du nombre de gendarmes. Plus précisément, nous prouvons que  $\Omega(\sqrt{\log n})$  gendarmes sont nécessaires pour capturer un voleur véloce dans une grille carrée de côté  $n$ . La preuve que nous proposons consiste en une élégante et simple stratégie d'évasion pour le voleur. Il est alors intéressant de savoir si le fait qu'un réseau planaire  $H$  ait un indice d'évasion élevé est lié au fait que  $H$  "contient" une large grille  $G$ . Nous montrons que ce n'est pas le cas lorsque la notion de contenance correspond à la notion de minoration topologique (c'est à dire si  $G$  peut être obtenu de  $H$  en remplaçant des chemins dont les sommets internes sont de degré deux, par des arêtes). Cependant, nous prouvons que si  $H$  planaire contient une large grille comme sous-graphe induit, alors son indice d'évasion est élevé. Notons que ce dernier résultat n'est pas vrai dans le cas d'un réseau  $H$  non planaire.

**Keywords:** Jeu des gendarmes et du voleur, stratégie, grille, graphe planaire

---

## 1 Des gendarmes et un voleur dans un réseau

Défini par Nowakowsky et Winkler [NW83], et indépendamment par Quilliot [Qui83], le jeu des gendarmes et du voleur implique deux joueurs déplaçant leurs pions à tour de rôle dans un réseau. Le joueur  $\mathcal{C}$ , qui joue avec les *gendarmes*, commence par placer ses pions sur des nœuds du réseau. Puis, le joueur  $\mathcal{R}$ , qui joue avec le *voleur*, choisi sa position initiale en un nœud du réseau. Ensuite, chacun à leur tour,  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{R}$  déplacent leurs pions le long de chemins du réseau. A chaque tour, la longueur d'un chemin emprunté par le voleur ne peut excéder  $v_{\text{voleur}}$  liens, alors que la longueur de chaque chemin emprunté par un gendarme est au plus  $v_{\text{gendarme}}$  liens.  $v_{\text{voleur}}$  et  $v_{\text{gendarme}}$  représentent la *vitesse* du voleur et celle des gendarmes respectivement. Notons que les deux joueurs voient leurs pions mutuellement. Le voleur est capturé si il existe un tour au cours duquel il occupe le même sommet qu'un gendarme. Le but des gendarmes est de capturer le voleur alors que ce dernier essaie d'éviter la capture. Pour tout réseau  $G$ , l'indice de  $(p, q)$ -évasion de  $G$ ,  $c_{p,q}(G)$ , est le plus petit nombre de gendarmes de vitesse  $p$  suffisant pour capturer un voleur de vitesse  $q$  dans  $G$ .

Le cas  $p = q = 1$  a fait l'objet d'un intérêt particulier, et l'étude de l'indice de  $(1, 1)$ -évasion, ou simplement de *l'indice d'évasion*, des graphes a donné lieu à de nombreux résultats. Une caractérisation des graphes d'indice d'évasion un est proposée dans [NW83, Qui83]. En particulier, les arbres et les graphes sans cycle induit de longueur au moins cinq ont un indice d'évasion un [Che97]. Plusieurs algorithmes ont été conçus pour déterminer, en temps  $O(n^k)$ , si l'indice d'évasion d'un graphe de taille  $n$  valait au plus  $k$  [HM06]. Goldstein et Reingold [GR95] ont prouvé que le calcul de ce paramètre est EXPTIME-complet, lorsque les positions initiales des joueurs sont fixées à l'avance.

---

<sup>†</sup>Les auteurs ont reçu le support du CONICYT via le projet Anillo en Redes, ACT 08. La version étendue, en anglais, de cet article est disponible à l'adresse <http://www.lri.fr/~nisse/publications/FastRobber.pdf>

La classe des graphes planaires a été particulièrement étudiée. Aigner et Fromme [AF84] prouvent que trois gendarmes suffisent à capturer un voleur avec vitesse un dans tout graphe planaire. En particulier, dans le cas de la grille, deux gendarmes sont suffisant. Le résultat de Aigner et Fromme est basé sur le simple fait que, pour tout plus court chemin  $P$ , au bout d'un nombre fini de tours, un unique gendarme peut empêcher le voleur de traverser  $P$ . Puis, Aigner et Fromme décrivent comment diviser récursivement un graphe planaire, utilisant à chaque étape de la récursion au plus trois plus court chemins. Généralisant ce résultat, Schröder [Sch01] a prouvé que l'indice d'évasion de tout graphe de genre  $g$  est au plus  $3 + \frac{3}{2}g$ .

Il est intéressant de noter que peu de bornes inférieures de l'indice d'évasion ont été prouvées. Frankl [Fra87] a prouvé que tout graphe de degré minimum  $d + 1$  et de maille (longueur du plus petit cycle induit) au moins  $8t - 3$  avait un indice d'évasion au moins  $d^t$ , améliorant ainsi un résultat de [AF84]. Il est également connu que, pour tout  $k \geq 3$  et  $n \geq 1$ , il existe des graphes  $k$ -régulier d'indice d'évasion  $n$  [And84].

Dans cet article, nous donnons un peu plus de pouvoir au voleur, dans le sens où nous lui permettons d'aller plus vite que les gendarmes, i.e.,  $v_{\text{voleur}} > v_{\text{gendarme}}$ . Dans ce contexte, nous proposons une stratégie très simple permettant au voleur vélocité d'échapper à un grand nombre de gendarmes dans une grille. Puis nous généralisons notre résultat à une classe plus large de graphes planaires. Pour simplifier la présentation, dans la suite, nous considérons que  $2 = v_{\text{voleur}} > v_{\text{gendarme}} = 1$ , et l'indice d'évasion d'un graphe  $G$ , noté  $ie(G)$ , désignera le nombre minimum de gendarmes de vitesse 1 nécessaire à la capture d'un voleur de vitesse 2 dans  $G$ . Nos résultats se généralisent à tous  $v_{\text{voleur}} > v_{\text{gendarme}}$ .

## 1.1 Nos résultats

Notre principal résultat est la conception d'une stratégie simple permettant à un voleur avec vitesse 2 d'échapper à au moins  $\Omega(\sqrt{\log n})$  gendarmes de vitesse 1 dans toute grille carrée de côté  $n$ . Plus précisément, nous prouvons qu'il existe  $a > 0$  et  $b > 2$ , tels que  $ie(G) \geq k$  pour toute grille carrée  $G$  de côté au moins  $f(k) = 4a^k b^{k(k+1)/2}$ . Une question naturelle est alors de se demander si cette borne inférieure est toujours valide dans un graphe planaire contenant une grande grille carrée. En d'autres termes peut-on lier le fait qu'un graphe planaire  $H$  a un indice d'évasion élevé au fait qu'il contient une grande grille carrée  $G$ ? D'une part, nous répondons par la négative à cette question lorsque  $G$  est obtenu à partir de  $H$  par suppressions de sommets, ou par suppressions d'arêtes, ou par contractions d'arêtes. Par exemple, il existe des réseaux planaires d'indice d'évasion 2 et tels qu'en contractant un petit nombre de chemins, on obtient une grille carrée de côté arbitrairement grand (la grille est alors dite une *subdivision* du graphe initial). La bonne nouvelle est que, si  $H$  planaire contient une grille carrée de côté  $2f(k)$  comme sous-graphe induit, alors  $ie(H) \geq ie(G) \geq k$ . Notons que l'indice d'évasion n'est généralement pas clos par sous-graphe induit, comme le montre l'exemple suivant. Soient  $G$  un cycle de 4 sommets et  $H$  le graphe planaire obtenu en ajoutant un sommet universel à  $G$ , alors  $ie(G) = 2 > ie(H) = 1$ .

## 2 Stratégie pour le voleur vélocité dans la grille

**Théorème 1** *pour tout  $k \geq 1$ , il existe  $a > 0$  et  $b > 2$ , tels que  $ie(G) \geq k$  pour toute grille carrée  $G$  de côté au moins  $f(k) = 4a^k b^{k(k+1)/2}$ .*

**Idée de la preuve.** Pour prouver ce théorème, nous décrivons une stratégie d'évasion  $\mathcal{S}$  pour le voleur contre  $k \geq 1$  gendarmes. La clé de notre analyse repose sur une partition récursive de  $G$  en sous-grilles graduellement plus petites de niveau  $i$ ,  $0 \leq i \leq k$ . Une grille de niveau  $i$ , ou  $i$ -grille, est une grille-carrée de côté  $taille_i$  sommets, composée de  $(taille_i / taille_{i-1})^2$   $(i-1)$ -grilles sommet-disjoint. Nous posons  $taille_0 = 2$ . Notons que le voleur peut "traverser" une 0-grille en 1 étape, alors qu'il en faut au moins 2 aux gendarmes.  $G$  est une grille carrée de côté  $2 * taille_k$  sommets, i.e., composée de 4  $k$ -grilles sommet-disjoint.

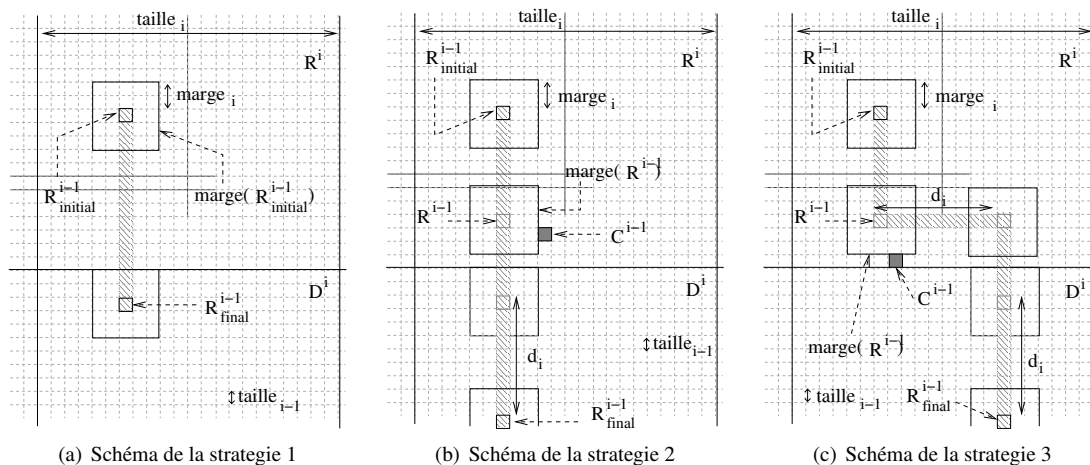
Introduisons quelques notations. Fixons un ordre sur les gendarmes:  $(c_1, \dots, c_k)$ . Soit  $i \leq k$ . Deux  $i$ -grilles sont *voisines* si elles possèdent des sommets adjacents. Etant donnée une  $(i-1)$ -grille  $R$ , nous notons  $marge(R)$  la grille carrée composée de  $(2 * marge_i + 1)^2$   $(i-1)$ -grilles et dont la  $(i-1)$ -grille centrale est  $R$  (cf. Figures 1(a)-1(e)).  $marge_i$  correspond à une marge de sécurité pour le voleur. Dans la suite, lorsque nous considérons une étape de la stratégie pour le voleur, pour tout  $i \leq k$ ,  $R^i$  désigne la  $i$ -grille occupée par le voleur. Un *chemin de  $i$ -grilles* est une séquence de  $i$ -grilles telles qu'une  $i$ -grille du chemin est voisine de son prédécesseur (e.g., parties hachurées des Figures 1(a)-1(c)).

La stratégie d'évasion  $\mathcal{S}$  que nous proposons pour le voleur est également définie selon plusieurs niveaux. Pour tout  $i > 0$ , une *stratégie de niveau  $i$*  est simplement un chemin de  $(i - 1)$ -grilles que le voleur va traverser successivement pour passer d'une position dans une  $i$ -grille à une position dans une  $i$ -grille voisine. La façon dont le voleur traverse une  $(i - 1)$ -grille est décrite récursivement par une stratégie de niveau  $i - 1$ .

Le but de notre stratégie est que les gendarmes ne s'approchent jamais "trop près" du voleur. Le voleur occupe une *position  $i$ -sûre* si, pour tout  $j \leq i$ ,  $c_j$  est à l'extérieur de  $\text{marge}(R^{j-1})$  et, pour tout  $j > i$ ,  $c_j$  est à l'extérieur de  $R^i$ . Le but d'une *stratégie de niveau  $i$*  est de permettre au voleur de se déplacer d'une position  $i$ -sûre dans une  $i$ -grille  $R^i$  à une position  $i$ -sûre dans une  $i$ -grille voisine  $D^i$ , et cela plus rapidement qu'un gendarme.  $\text{temps}_i$  représente le nombre d'étapes maximum nécessaire au voleur pour traverser une  $i$ -grille en suivant notre stratégie. Notons que  $\text{temps}_i = \text{nombre maximum de } (i - 1)\text{-grilles que le voleur doit traverser} * \text{temps}_{i-1}$ , et un gendarme met au moins  $\text{taille}_i$  étapes pour traverser une  $i$ -grille.

**Lemme:** Soit  $i \leq k$ . Supposons que, pour tout  $j > i$  et durant toute la stratégie,  $c_j$  est hors de  $R^i$ .  $\mathcal{S}$  permet au voleur de passer d'une position  $i$ -sûre dans  $R^i$  à une autre dans  $D^i$  en au plus  $\text{temps}_i < \text{taille}_i$  étapes.

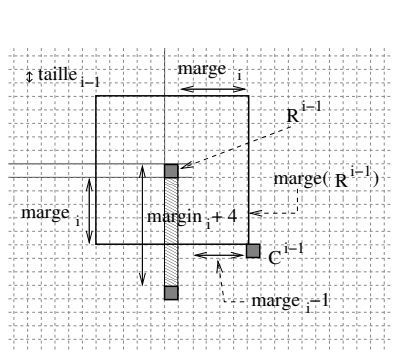
Supposons que ce lemme soit vrai pour  $i = k$ . La taille de  $G$  permet de choisir la position initiale du voleur  $k$ -sûre (pour toutes positions initiales des gendarmes). Il suffit alors simplement au voleur de passer d'une position sûre dans une  $k$ -grille à une position  $k$ -sûre dans une  $k$ -grille adjacente, et cela indéfiniment. Nous prouvons le lemme par récurrence en explicitant une stratégie de niveau  $i$  pour le voleur.



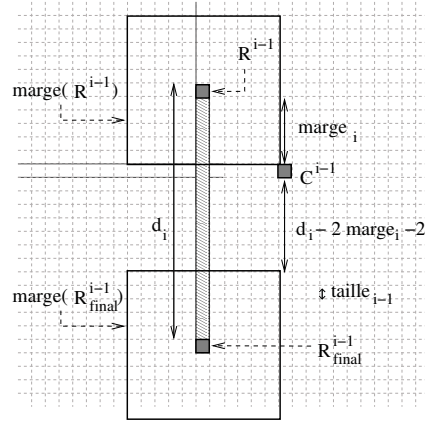
Il y a trois stratégies possibles selon que le gendarme  $c_i$  s'approche "trop près" du voleur au cours du déplacement ou non. Ces trois stratégies sont schématisées sur les Figures 1(a)-1(c). Les zones hachurées représentent les  $(i - 1)$ -grilles que le voleur doit successivement traverser, de sa position initiale  $R_{initial}^{i-1} \subseteq R^i$  à  $R_{final}^{i-1} \subseteq D^i$ . Sur ces Figures,  $d_i$  représente un nombre de  $(i - 1)$ -grilles à traverser, c'est un détour que le voleur doit effectuer pour que  $c_i$  ne l'approche pas de "trop près". La stratégie 1 (cf. Schéma 1(a)) est effectuée si  $c_i$  ne s'approche jamais de  $\text{marge}(R^{i-1})$ . La stratégie 2 (cf. Schéma 1(b)) est effectuée si la première fois que  $c_i$  atteint une  $(i - 1)$ -grille, notée  $C^{i-1}$  sur les Figures 1(b)-1(c), voisine de  $\text{marge}(R^{i-1})$ ,  $C^{i-1}$  ne se trouve pas entre  $\text{marge}(R^{i-1})$  et  $D^i$ . Sinon, la stratégie 3 (cf. Schéma 1(c)) est effectuée.

Comme nous l'avons dit, pour passer d'une  $(i - 1)$ -grille à la suivante, le voleur utilise une stratégie de niveau  $i - 1$ . D'après l'hypothèse de récurrence, une  $(i - 1)$ -grille est traversée en  $\text{temps}_{i-1}$  étapes. Cependant pour pouvoir appliquer l'hypothèse de récurrence, nous devons nous assurer que  $c_i$  n'entre jamais dans  $R^{i-1}$ . Cela est assuré par l'égalité décrite sur la Figure 1(d). En effet, il est facile de prouver par des considérations sur les distances, que si cette égalité est respectée, alors  $c_i$  ne peut pas intercepter la trajectoire du voleur. De plus, pour que le voleur ait bien atteint une position  $i$ -sûre dans  $D^i$ , nous devons nous assurer que  $c_i$  est à l'extérieur de  $\text{marge}(R_{final}^{i-1})$ . Cela est assuré par l'égalité décrite sur la Figure 1(e).

En posant les 2 égalités précédentes, nous montrons qu'il existe  $a > 0$  et  $b > 2$  tels que, si l'on pose, pour tout  $0 < i \leq k$ ,  $\text{taille}_i / \text{taille}_{i-1} = ab^i$ , alors  $\text{temps}_i = (\text{taille}_i / \text{taille}_{i-1} + 2d_i) \text{temps}_{i-1} < \text{taille}_i$ .  $\square$



(d)  $(\text{marge}_i - 1) * \text{taille}_{i-1} = (4 + \text{marge}_i) * \text{temps}_{i-1}$



(e)  $(d_i - 2 * \text{marge}_i - 2) * \text{taille}_{i-1} = d_i * \text{temps}_{i-1}$

**Théorème 2** Pour toute grille  $G$  de côté  $n \geq 2$ , il existe une subdivision  $H$  de  $G$  avec  $ie(H) = 2$ .

**Idée de la preuve.** Soit  $G$  de côté  $n \geq 2$ .  $H$  est obtenue remplaçant chaque arête verticale de  $G$ , sauf celle d'une colonne  $C$ , par un chemin de longueur  $6n$ . Cette colonne  $C$  sert de raccourci aux 2 gendarmes.  $\square$

**Théorème 3** Soit  $H$  planaire avec  $G$ , grille de côté  $2f(k)$  sommets, comme sous-graphe induit,  $ie(H) \geq k$ .

**Idée de la preuve.** Par planarité de  $H$  et le fait que  $G$  soit un sous graphe induit, nous prouvons que  $H$  contient une grille  $G'$  de côté  $f(k)$  sommets comme sous-graphe induit et tel que  $G'$  est isométrique dans  $G$ . La validité de la stratégie proposée au théorème 1 étant essentiellement basée sur les distances, celle-ci reste valide dans  $H$ . Il suffit donc au voleur de faire comme s'il se trouvait dans  $G'$  et de suivre cette stratégie.  $\square$

## References

- [AF84] M. Aigner and M. Fromme. A game of cops and robbers. *Discrete Applied Maths.*, 8:1–12, 1984.
- [And84] T. Andreae. Note on a pursuit game played on graphs. *Discrete Applied Maths.*, 9:111–115, 1984.
- [Che97] V. Chepoi. Bridged graphs are cop-win graphs: An algorithmic proof. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 69(1):97–100, 1997.
- [Fra87] P. Frankl. Cops and robbers in graphs with large girth and cayley graphs. *Discrete Applied Maths.*, 17:301–305, 1987.
- [GR95] A. S. Goldstein and E. M. Reingold. The complexity of pursuit on a graph. *Theor. Comput. Sci.*, 143(1):93–112, 1995.
- [HM06] G. Hahn and G. MacGillivray. A note on  $k$ -cop,  $l$ -robber games on graphs. *Discrete Maths.*, 306:2492–2497, 2006.
- [NW83] R. J. Nowakowski and P. Winkler. Vertex-to-vertex pursuit in a graph. *Discrete Maths.*, 43:235–239, 1983.
- [Qui83] A. Quilliot. *Thèse de doctorat d'état*. PhD thesis, Université de Paris VI, France, 1983.
- [Sch01] B. S. W. Schröder. The copnumber of a graph is bounded by  $\lfloor \frac{3}{2} \text{genus}(g) \rfloor + 3$ . *Trends Math.*, pages 243–263, 2001.