Graphs :

1 hour 30

Aucun document (électronique ou pas) n'est autorisé. Vous pouvez répondre en français ou en anglais à votre préférence. Toutes les réponses doivent être justifiées. Les sections sont indépendentes. Les points sont donnés à titre indicatif.

1 Couplage et couverture de graphes

Question 1 *Donner la définition d'un couplage (matching) d'un graphe $G = (V, E)$.*

Rappel : Un couplage M d'un graphe $G = (V, E)$ est **maximal** si, pour toute arête $e \in E$, $M \cup \{e\}$ n'est pas un couplage.

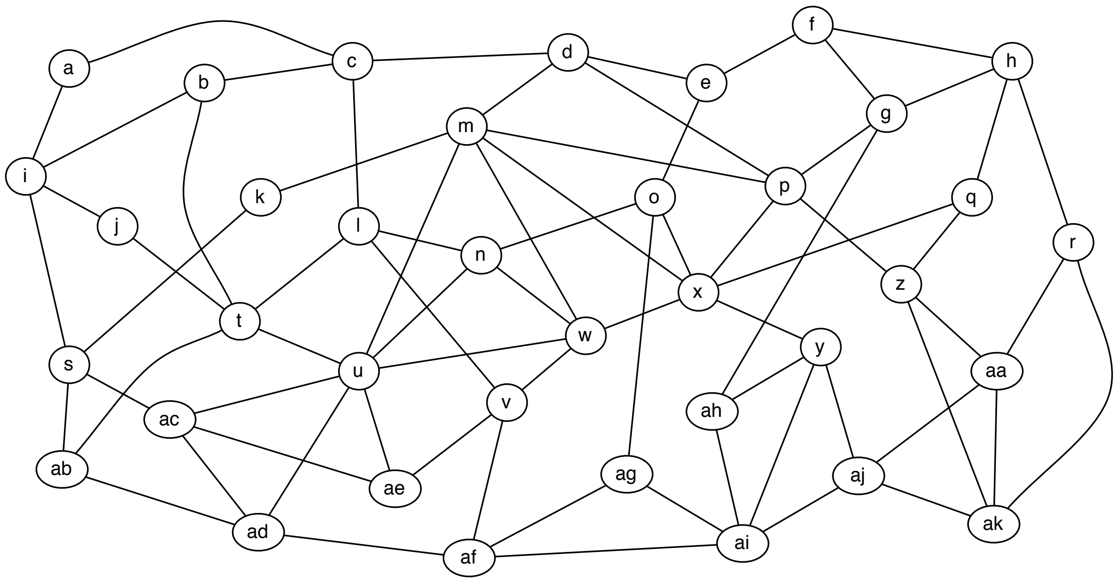


FIGURE 1 – Graphe H

Question 2 *Donner un couplage maximal pour le graphe H de la Figure 1. Vous pouvez dessiner votre couplage sur la Figure 1.*

Justifier que le couplage que vous proposez est maximal.

Question 3 (1.5 pts) *Décrire l'algorithme que vous avez exécuté pour répondre à la question précédente.*

Question 4 *Donner la définition d'une couverture par sommets (vertex cover) dans un graphe $G = (V, E)$ (Donner une définition "en français" (ou "en anglais") et une définition mathématique).*

Question 5 *Donner une couverture par sommets K pour le graphe H de la Figure 1 (proposer une couverture avec le moins de sommets que vous pourrez). Vous pouvez dessiner votre couverture sur la Figure 1.*

Soit $vc(G)$ la plus petite taille (nombre de sommets) d'une couverture par sommets d'un graphe $G = (V, E)$.

Question 6 (1.5 pts) *Comparer la taille de la couverture par sommets K de H que vous avez proposée à la question précédente avec $vc(H)$.*
Vos arguments pourront (devront) se baser sur des résultats vus en cours.

2 Arbre couvrant et TSP

Question 7 *Donner la définition d'un arbre couvrant (spanning tree) d'un graphe $G = (V, E)$.*

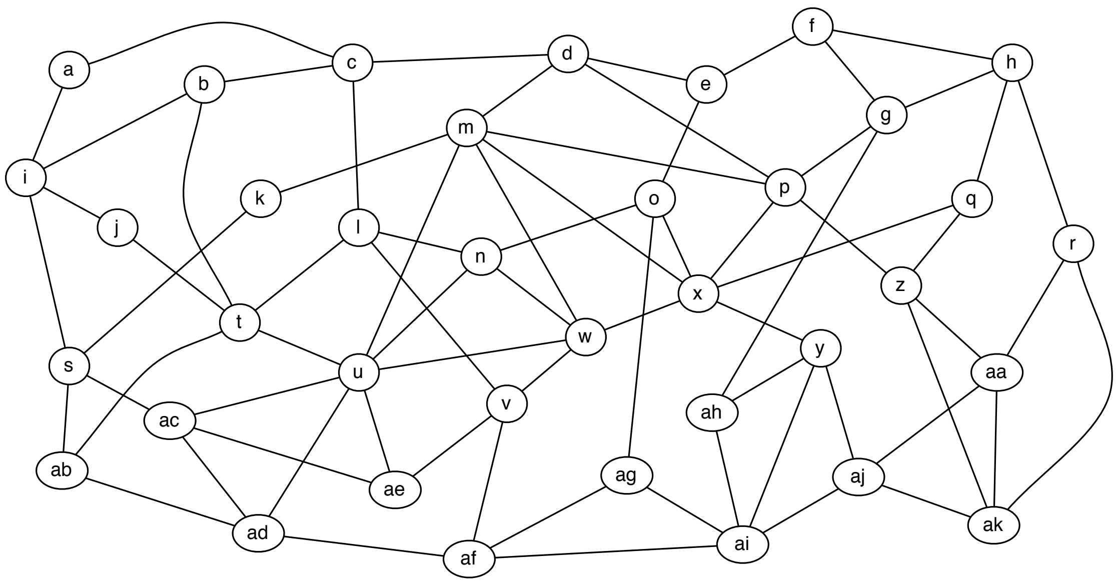


FIGURE 2 – Graphe H

Question 8 *Donner un arbre couvrant du graphe H de la Figure 2. Vous pouvez dessiner votre arbre couvrant sur la Figure 2.*

Question 9 *Décrire l'algorithme que vous avez exécuté à la question précédente.*

Un circuit Hamiltonien d'un graphe $G = (V, E)$ est une séquence $\mathcal{S} = (v_1, \cdots, v_p)$ de sommets (possiblement avec répétitions) tels que, pour tout $1 \leq i < p$, $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ (deux sommets consécutifs de $\mathcal{S}$ sont adjacents), $\{v_p, v_1\} \in E$ (le circuit revient à son point de départ) et $\mathcal{S}$ passe par chaque sommet de G au moins une fois (formellement, $\bigcup_{1 \leq i \leq p} v_i = V$).

Question 10 *Donner un circuit Hamiltonien du graphe H de la Figure 2 qui soit aussi petit que vous pourrez (i.e., avec p aussi petit que possible). Vous pouvez dessiner votre circuit Hamiltonien sur la Figure 2.*

Soit $\color{red}{TSP(G)}$ la plus petite longueur (le plus petit p) d'un circuit Hamiltonien d'un graphe $G = (V, E)$.

Question 11 (2 pts) *Comparer la taille du circuit Hamiltonien de H que vous avez proposé dans la question précédente avec $TSP(H)$.*

3 Enquête : à la recherche de l'arête perdue

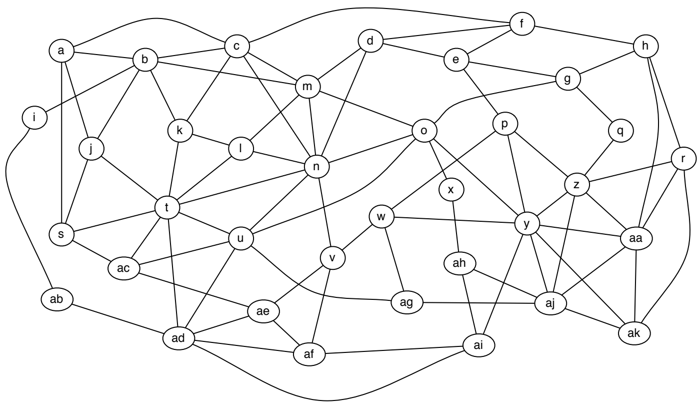


FIGURE 3 – Graphe M

Le graphe M de la Figure 3 a été construit de la façon suivante. Les sommets $\{a, b, c, \cdots, z, aa, ab, \cdots, ak\}$ ont d'abord été placés (sans arêtes). Puis, un cycle a été ajouté, puis un autre, puis un autre, puis un autre, puis un autre, *etc.* (voir un exemple concret d'une telle construction en dernière page). Une fois le graphe M construit, votre professeur étourdi a effacé une (unique) arête.

Question 12 (2 pts) *Quelle arête a-t-elle été affacée ? (Expliquer votre réponse)*

4 Ensemble indépendant (stable set)

Soit un graphe $G = (V, E)$. Un ensemble $I \subseteq V$ de sommets est *indépendant* (ou *stable*) si, pour tout $u, v \in I$, $\{u, v\} \notin E$ (i.e., il n'y a aucune arête entre les sommets de I). Une couverture par sommets de G est un ensemble $K \subseteq V$ tel que $K \cap e \neq \emptyset$ pour toute arête $e \in E$.
Notation : $\color{red}{X \setminus Y}$ est l'ensemble constitué des éléments de X qui ne sont pas dans Y.

Question 13 (1.5 pts) *Soit K une couverture par sommets d'un graphe $G = (V, E)$. Montrer que $V \setminus K$ est un ensemble indépendant de G.*

Question 14 (1.5 pts) *Soit I un ensemble indépendant d'un graphe $G = (V, E)$. Montrer que $V \setminus I$ est une couverture par sommets de G.*

Soit $\color{red}{\alpha(G)}$ la plus grande taille (nombre de sommets) d'un ensemble indépendant dans G.

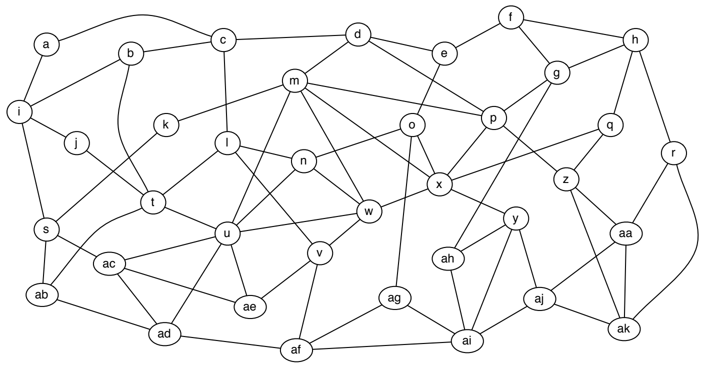
Question 15 *En déduire que, pour tout graphe $G = (V, E)$, $\alpha(G) = |V| - vc(G)$.*
Rappelons que $vc(G)$ est le plus petit nombre de sommets d'une couverture par sommets de G.

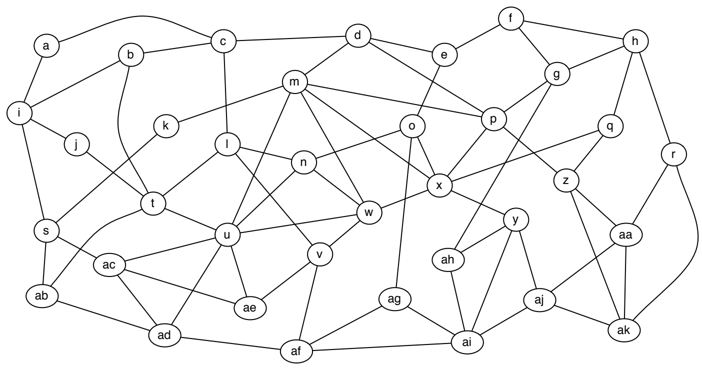
Question 16 *En déduire qu'il n'existe aucun algorithme connu qui calcule $\alpha(G)$ en temps polynomial pour tout graphe G.*

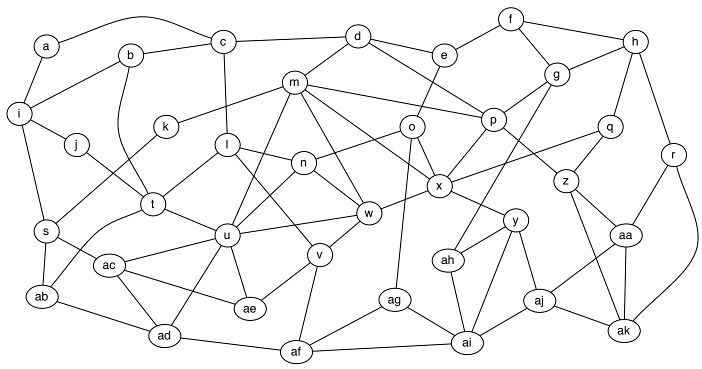
Le sujet s'arrête ici, il n'y a plus de questions...

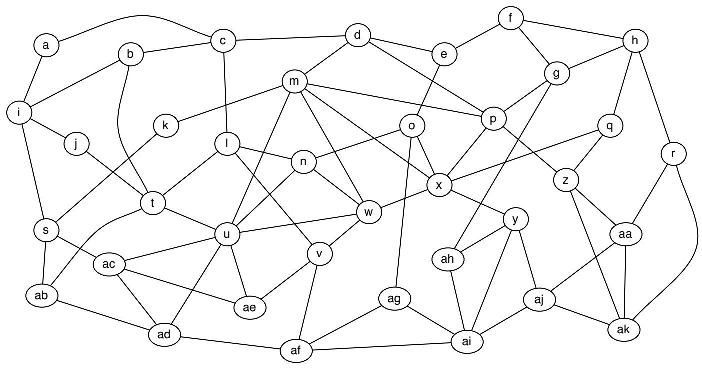
5 Brouillon (draft)

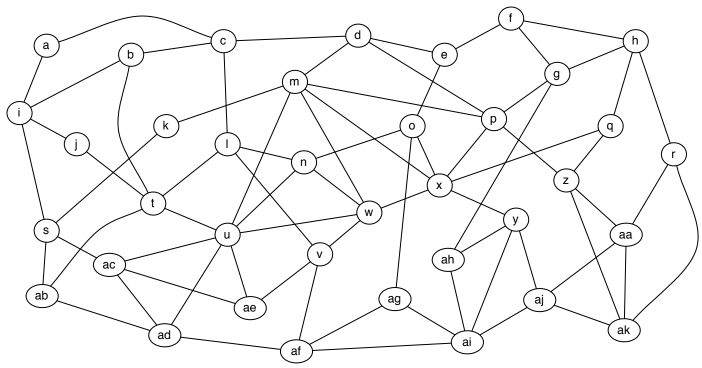
Les dessins ci-dessous sont destinés à vos essais préliminaires.

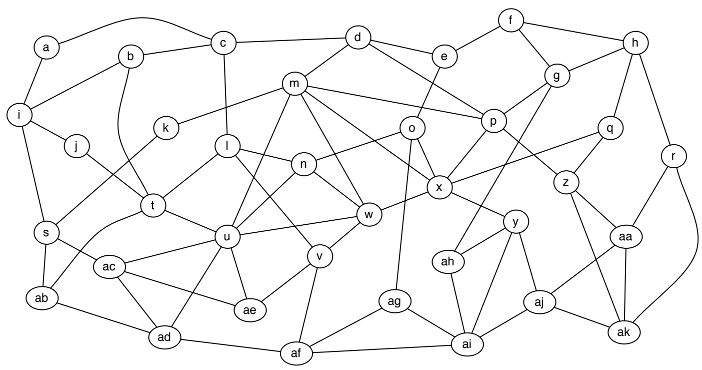







f
d
h
a
c
e
b
g
m
i
p
o
q
k
j
l
r
n
x
z
t
w
y
s
u
aa
ah
ac
v
ag
aj
ab
ae
ak
ad
ai
af


f
d
h
a
c
e
b
g
m
i
p
o
q
k
j
l
r
n
x
z
t
w
y
s
u
aa
ah
ac
v
ag
aj
ab
ae
ak
ad
ai
af


f
d
h
a
c
e
b
g
m
i
p
o
q
k
j
l
r
n
x
z
t
w
y
s
u
aa
ah
ac
v
ag
aj
ab
ae
ak
ad
ai
af

Ci-dessous, un exemple de la construction proposée en Section 3. On commence par l'ensemble de sommets $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. On lui ajoute un cycle (en bleu), puis un cycle (en rouge), puis un cycle (en vert), *etc.*