University Côte d'Azur
Master 1 : Informatique

Graphes
15 avril 2025

Graphes :

2 heures

Une feuille de notes manuscrite est autorisée (pas d'autres documents ni appareils électroniques). Vous pouvez répondre en français ou en anglais à votre convenance. Les sections sont indépendantes. Toutes les réponses doivent être argumentées.

1 Cycle Eulerien

Question 1 *Donner la définition d'un graphe connexe et la définition d'un cycle Eulerien.*

Question 2 *Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe connexe ait un cycle Eulerien.*

Question 3 *Décrire précisément un algorithme qui calcule un cycle Eulerien dans un graphe qui satisfait la condition précédente.*

Question 4 *Donner une application réelle de ce problème (donner une réponse en 3 lignes max.).*

2 Couplage

Question 5 *Donner la définition d'un couplage dans un graphe.*

Question 6 *Donner une application réelle du problème de trouver un couplage maximum dans un graphe (donner une réponse en 3 lignes max.).*

Question 7 *Étant donné un graphe $G = (V, E)$ et un couplage $M \subseteq E$, donner la définition d'un chemin M-augmentant. Expliquer pourquoi ce nom.*

Question 8 *En supposant que l'on dispose d'un algorithme $\mathcal{A}$ qui trouve un chemin M-augmentant (si il en existe) en temps $f(n)$, décrire un algorithme qui calcule un couplage maximum dans un graphe de n sommets. Prouver qu'il est correct et donner sa complexité.*

Dans un graphe $G = (V, E)$ avec un couplage $M \subseteq E$, un sommet $v \in V$ n'est pas **saturé** par M si il ne "touche" aucune arête de M, i.e., $\forall e \in M, v \notin e$. On rappelle que, pour tout sommet v d'un graphe, $N(v)$ est l'ensemble des voisins de v. Plus généralement, si $S \subseteq V$, $N(S) = \bigcup_{v \in S} N(v) \setminus S$.

Question 9 *Appliquer la méthode hongroise décrite dans l'Algorithme* 1 *pour calculer un couplage maximum dans le graphe biparti de la Figure 1.*

Décrire précisément les différentes étapes : en particulier, quelles sont les paramètres d'entrée à chaque application de l'algorithme ? quelle est l'évolution des valeurs des variables $X_i, Y_i, P, M\ldots$ à chaque exécution ? quels sont les résultats intermédiares et le résultat final ?

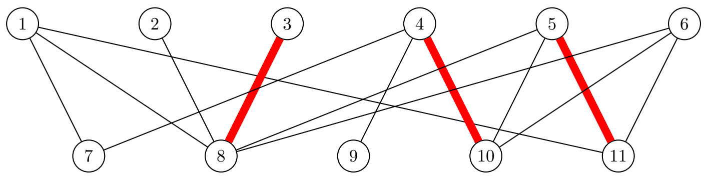

FIGURE 1 – Un graphe biparti $G = (A \cup B, E)$ avec $A = \{1, \cdots, 6\}$ et $B = \{7, \cdots, 11\}$ et un couplage initial $M = \{\{3,8\},\{4,10\},\{5,11\}\}$ indiqué en gras et rouge.

Algorithm 1 Méthode Hongroise(G, M, v)

Require: Graphe biparti $G = (V = A \cup B, E)$, couplage $M \subseteq E$ et $v \in A$ non saturé par M.

Soit $X_0 = \{v\} \subseteq A$ et $Y_0 = N(v) \subseteq B$ et $i = 0$.
Tant que $Y_i \neq \emptyset$, **faire**
  Si il existe $w \in Y_i$ non saturé par M, **faire**
    Soit un chemin M-augmentant P entre v et w
      et dont les sommets sont dans $\bigcup_{0 \le j \le i}(X_j \cup Y_j)$.
    Renvoyer $(P, True)$.
  Sinon
    Soit $X_{i+1} = \{w \in A \mid \exists z \in Y_i, \{z, w\} \in M\}$ et soit $Y_{i+1} = N(X_{i+1}) \setminus Y_i \subseteq B$.
    Et $i \leftarrow i + 1$.
Renvoyer $(\bigcup\limits_{0 \le j \le i} X_j, False)$.

3 Ensemble indépendant maximum

Étant donné un graphe $G = (V, E)$, un ensemble $S \subseteq V$ de sommets est dit *indépendant* si les sommets de S sont deux-à-deux **non** adjacents. C'est-à-dire, $S \subseteq V$ est indépendant si, $\forall u, v \in S$, $\{u, v\} \notin E$.

Question 10 *Étant donné un graphe G et $k \in \mathbb{N}$, le problème de décider si il existe un ensemble indépendant S de G tel que $|S| \geq k$ est NP-complet. Expliquer informellement ce que cela signifie (donner une réponse en 3 lignes max.).*

Question 11 *Décrire un algorithme "naïf" qui, étant donné un graphe $G = (V, E)$, calcule un ensemble indépendant de G de taille maximum. Donner sa complexité temporelle en fonction de $|V| = n$.*

On rappelle qu'une couverture par sommets de $G = (V, E)$ est un ensemble de sommets qui "touchent" toutes les arêtes. C'est-à-dire, $Q \subseteq V$ est une couverture si, $\forall e \in E, \exists v \in Q, v \in e$.

Dans la suite, on note $\alpha(G)$ la taille maximum d'un ensemble indépendant de G et $\beta(G)$ la taille minimum d'une couverture par sommets de G.

Question 12 *Prouver que, pour tout ensemble $S \subseteq V$, S est un indépendant si et seulement si $V \setminus S$ est une couverture par sommets. Donner une relation entre $\alpha(G)$ et $\beta(G)$ et le nombre n de sommets de G.*

Question 13 *Déduire de la question précédente (et du cours) un algorithme qui, étant donné un graphe $G = (V, E)$ de n sommets, calcule en temps $O(|E|)$ un ensemble indépendant de taille au moins $2\alpha(G) - n$.*

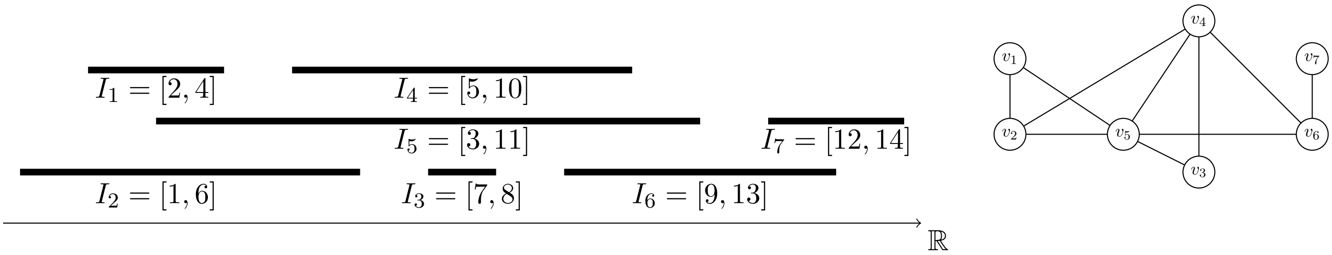

FIGURE 2 – Exemple d'un ensemble d'intervalles $\mathcal{I} = \{I_1 = [2,4], I_2 = [1,6], I_3 = [7,8], I_4 = [5,10], I_5 = [3,11], I_6 = [9,13], I_7 = [12;14]\}$ et du graphe d'intervalle correspondant.

3.1 Graphes d'intervalle

Étant donné un ensemble $\mathcal{I} = \{I_1 = [a_1, b_1], \cdots, I_k = [a_k, b_k]\}$ d'intervalles de $\mathbb{R}$, le graphe **d'intervalle** correspondant est le graphe avec un sommet v_i par intervalle I_i, $1 \leq i \leq k$, et deux sommets v_i et v_j sont adjacents si les intervalles correspondants s'intersectent, i.e., si $I_i \cap I_j \neq \emptyset$. Un exemple est donné sur la Figure 2.

Question 14 *Soit $\mathcal{I} = \{I_1 = [1,6], I_2 = [2,4], I_3 = [3,11], I_4 = [5,10], I_5 = [7,8], I_6 = [9,13], I_7 = [12,14]\}$. Dessiner le graphe d'intervalle correspondant.*
Donner un ensemble indépendant de ce graphe.

Soit $\mathcal{I} = \{I_1 = [a_1, b_1], \cdots, I_k = [a_k, b_k]\}$ un ensemble d'intervalles. On suppose que $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_k$. Dans la suite, $G = (V = \{v_1, \cdots, v_k\}, E)$ est le graphe d'intervalle correspondant à $\mathcal{I}$. On rappelle que, pour tout sommet v d'un graphe, $N(v)$ est l'ensemble des voisins de v, et $N[v] = N(v) \cup \{v\}$.

Question 15 *Soient $1 < i < j \leq k$ tels que $v_i, v_j \in N(v_1)$. Montrer que $\{v_i, v_j\} \in E$.*

Donc l'ensemble des voisins de v_1 induit un graphe complet.

Question 16 *Montrer qu'il existe un ensemble indépendant maximum de G qui contient v_1.*
aide : Soit S un indépendant maximum de G. Considerer 3 cas : $v_1 \in S$, $N(v_1) \cap S \neq \emptyset$, $N[v_1] \cap S = \emptyset$.

Question 17 *Soit S un indépendant maximum de G tel que $v_1 \in S$. Montrer (par l'absurde) que $S \setminus \{v_1\}$ est un indépendant maximum de $G - N[v_1]$ (le graphe obtenu de G en supprimant tous les sommets de $N[v_1]$).*

Question 18 *Déduire des questions précédentes un algorithme glouton pour calculer un ensemble indépendant maximum dans un graphe d'intervalle. Décrire l'algorithme et expliquer pourquoi il est correct.*

Question 19 *Un beau mardi d'avril, k cours $C_1, \cdots, C_k$ du Master 1 d'informatique doivent être dispensés. Pour tout $1 \leq i \leq k$, le cours C_i débute à l'heure d_i et finit à l'heure $f_i > d_i$. Bien sûr, deux cours ne peuvent pas être dispensés simultanément dans une même salle. La salle $TD06$ est très appréciée par les élèves et les professeurs, donc le responsable du Master veut que, ce mardi, le plus de cours possibles soient dispensés dans la salle $TD06$.*
Expliquer comment modéliser ce problème comme un problème de graphes.

3.2 Cas pondéré dans les arbres

On considére maintenant un graphe $G = (V, E)$ dont les sommets sont pondérés. On a une fonction $w : V \to \mathbb{R}^+$ de poids sur les sommets. Le poids d'un ensemble $S \subseteq V$ de sommets est la somme $\sum_{v \in S} w(v)$ des poids des sommets de S.

Dans cette section, on cherche à calculer un ensemble indépendant de poids maximum.

Question 20 *Donner un exemple (simple) de graphe pondéré tel que tout ensemble indépendant de poids maximum n'est pas un ensemble indépendant de taille maximum.*

Question 21 *Décrire un algorithme qui calcule un ensemble indépendant de poids maximum dans un arbre.*

aide : Étant donné un arbre pondéré (T, r, w) enraciné en r, on pourra chercher (par programmation dynamique) un indépendant de poids maximum parmi ceux qui contiennent r et un indépendant de poids maximum parmi ceux qui ne contiennent pas r.