University Côte d'Azur
Master 1 : Informatique et Interactions

Graphes
Juin 2022

Graphes :

2 heures

Les notes de cours <u>manuscrites</u> sont autorisées (rien d'autre : pas de téléphones, d'ordinateurs, ni de livres...). Vous pouvez répondre en anglais si vous préférez. Chaque réponse doit être expliquée. Les points sont donnés à titre indicatif, mais *a priori*, vous pouvez avoir 26 points sur 20.

1 Couplage maximum dans les graphes bipartis

Étant donné un graphe $G = (V, E)$ et un sommet $v \in V$, on note l'ensemble des voisins de v par $N(v) = \{u \in V \mid \{u, v\} \in E\}$.

On rappelle qu'un graphe $G = (V, E)$ est **biparti** si son ensemble de sommets peut être partitionné en deux ensembles A et B *indépendants*, i.e., $V = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ et il n'existe pas d'arêtes entre deux sommets de A (respectivement de B).

Un **couplage** dans un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble $M \subseteq E$ d'arêtes deux-à-deux disjointes, i.e., pour toutes arêtes $e, f \in M$, $e \cap f = \emptyset$. Un sommet $v \in V$ est **couvert** par le couplage M si il existe une arête $e \in M$ telle que $v \in e$ (i.e., e "touche" le sommet v). Sinon, le sommet v n'est pas couvert par M. Un **chemin M-augmentant** est un chemin $(v_0, \cdots, v_p)$ ($p \geq 1$ et impair) tel que v_0 et v_p ne sont pas couverts par M et, pour tout $1 \leq i \leq \lfloor p/2 \rfloor$, $\{v_{2i-1}, v_{2i}\} \in M$. Soit $\mu(G)$ la taille maximum d'un couplage dans le graphe G.

Question 1 (1 point) *Soit M un couplage d'un graphe $G = (V, E)$. Prouvez que si il existe un chemin M-augmentant, alors le couplage M n'est pas maximum, i.e., $|M| < \mu(G)$.*

Algorithm 1

Require: Un graphe biparti $G = (A \cup B, E)$, i.e., A et B sont des ensembles indépendants, un couplage $M \subseteq E$ de G et un sommet $a \in A$ non couvert par M.

$X \leftarrow \{a\}$.
$Z \leftarrow \emptyset$.
$Continuer \leftarrow Vrai$.
while $Continuer$ **do**
  $Continuer \leftarrow Faux$ et $X' \leftarrow \emptyset$.
  for tout $v \in X$ **do**
    for tout $w \in N(v) \setminus Z$ **do**
      if w n'est pas couvert par M **then**
        return un chemin M-augmentant de a à w
      else
        $Continuer \leftarrow Vrai$ et soit $u \in A$ tel que $\{u, w\} \in M$.
        Ajouter w à Z et ajouter u à X'.
  $X \leftarrow X'$
return $Faux$.

Question 2 (1,5 points) *Appliquez l'algorithme 1 sur l'exemple de la Figure 1(gauche). Décrire précisément l'évolution des variables X, Z et Continuer (notamment après chaque itération de la boucle "while"). Que retourne l'algorithme ?*

Question 3 (1 point) *Appliquez l'algorithme 1 sur l'exemple de la Figure 1(droite). Décrire précisément l'évolution des variables X, Z et Continuer (notamment après chaque itération de la boucle "while"). Que retourne l'algorithme ?*

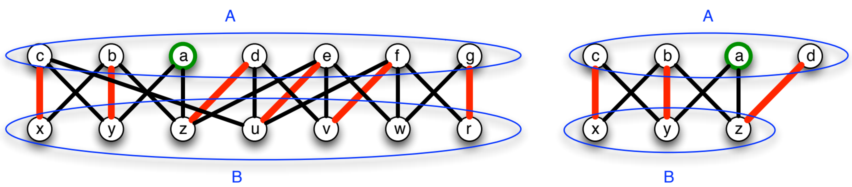

FIGURE 1 – Exemples de graphes bipartis avec un couplage initial M (arêtes en rouge et gras).

Question 4 (1 point) *Quel est le but de l'algorithme 1. En particulier, quels sont les différents résultats possibles (quand l'algorithme renvoie-t-il "Faux" ?).*

Les deux questions suivantes sont indépendantes des questions précédentes.

Pour tous entiers $n, m \in \mathbb{N}^*$ non nuls. La **grille** $G_{n\times m}$ est le graphe défini comme suit. Son ensemble de sommets est $V(G_{n\times m}) = \{(i,j) \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ et deux sommets (i,j) et (i',j') sont adjacents si et seulement si $|i-i'| + |j-j'| = 1$. Intuitivement, n est le nombre de colonnes et m le nombre de lignes.

Question 5 (2 points) *Donnez (dessinez) un couplage maximum pour chacune des grilles de la Figure 2. Expliquer pourquoi les couplages que vous proposez sont maximum.*

Question 6 (2 points) *Exprimez $\mu(G_{n\times m})$ pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$ (prouvez le en décrivant un couplage maximum et en prouvant qu'il est maximum).*

Indice : *la parité de n et m joue un rôle.*

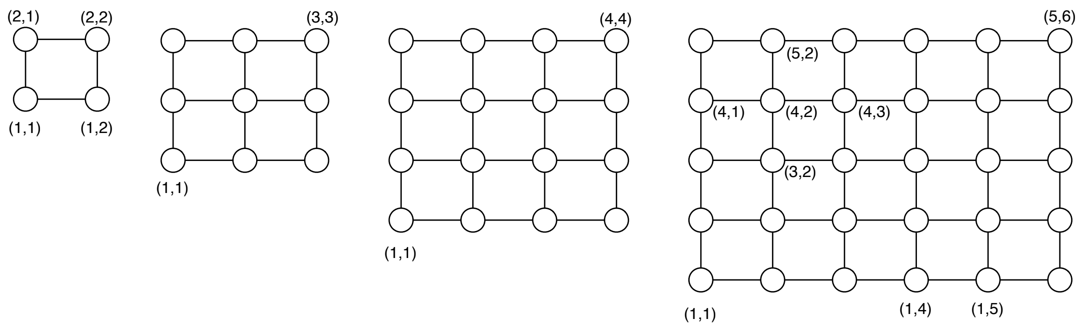

FIGURE 2 – De gauche à droite : les grilles $G_{2\times 2}$, $G_{3\times 3}$, $G_{4\times 4}$ et $G_{6\times 5}$.

2 Ensembles dominants minimum dans les arbres pondérés

Étant donné un graphe $G = (V, E)$, un ensemble $S \subseteq V$ de sommets est dit **dominant** si tout sommet de V est soit dans S, soit voisin d'un sommet de S (ou les deux). C'est-à-dire, pour tout sommet $v \in V$, soit $v \in S$, soit il existe $u \in S \cap N(v)$.

Par exemple, l'ensemble de sommets rouges du graphe de gauche de la Figure 3 est un ensemble dominant. En revanche, l'ensemble de sommets rouges du graphe de droite de la Figure 3 n'est pas dominant car le sommet d n'appartient pas à cet ensemble et n'est voisin d'aucun sommet de cet ensemble.

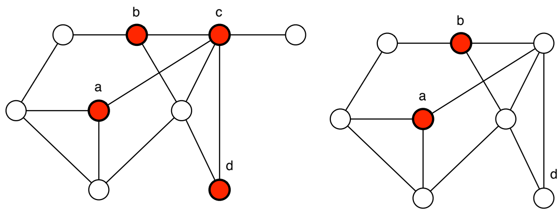

FIGURE 3 – À gauche, un graphe avec un ensemble dominant $\{a, b, c, d\}$ en rouge. À droite, un graphe avec un ensemble $\{a, b\}$ qui n'est pas dominant.

2.1 Ensemble dominant de taille minimum

Le problème que l'on considère est, étant donné un graphe, de calculer un ensemble dominant de taille minimum.

Question 7 (1,5 points) *Pour chacun des trois graphes de la Figure 4, donnez (dessinez) un ensemble dominant de taille minimum. Expliquez pourquoi ils sont minimum.*

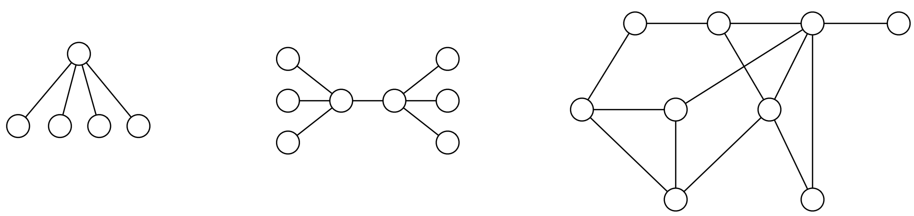

FIGURE 4 – Trois graphes.

Le problème du calcul d'un plus petit ensemble dominant est NP-complet en général.

Question 8 (1,5 points) *Proposez un algorithme qui calcule un ensemble dominant de taille minimum dans les graphes (en général). Donnez sa complexité.*

Dans la suite, nous nous concentrons sur la classe des arbres (graphes connexes sans cycle). Rappelons qu'une **feuille** d'un arbre est un sommet de degré 1 (avec un unique voisin).

Question 9 (2 points) *Soit $T = (V, E)$ un arbre et un sommet $v \in V$ qui n'est pas une feuille (donc v a au moins 2 voisins) et qui est adjacent à (au moins) une feuille $u \in V$. Montrez qu'il existe un ensemble dominant de taille minimum qui contient v.*

Indice : *considérez un ensemble dominant $D \subseteq V$ de taille minimum de T. Considérez les deux cas suivants. Soit $v \in D$, conclusion ? Soit $v \notin D$, dans ce cas, montrez que $u \in D$ et qu'il existe un ensemble dominant de taille minimum qui contient v.*

Question 10 (1 point) *Soit $T = (V, E)$ un arbre et un sommet $v \in V$ qui n'est pas une feuille (donc v a au moins 2 voisins) et qui est adjacent à (au moins) deux feuilles de T. Montrez que v appartient à tout ensemble dominant de taille minimum de T.*

Question 11 (3 points) *Proposez un algorithme qui calcule, en temps polynomial, un ensemble dominant de taille minimum dans les arbres.*

2.2 Ensemble dominant de poids minimum dans les arbres

Maintenant, on suppose qu'il y a une fonction de poids $w : V \to \mathbb{R}^+$ sur les sommets de l'arbre $T = (V, E)$. Le **poids** $w(S)$ d'un ensemble de sommets $S \subseteq V$ est la somme $\sum_{v \in S} w(v)$ des poids des sommets de S.

Cette section est dédiée à un algorithme pour calculer un ensemble dominant de poids minimum dans les arbres.

Question 12 (1,5 points) *Pour chacun des deux arbres de la Figure 5, donnez (dessinez) un ensemble dominant de POIDS minimum. Expliquez pourquoi ils sont minimum.*

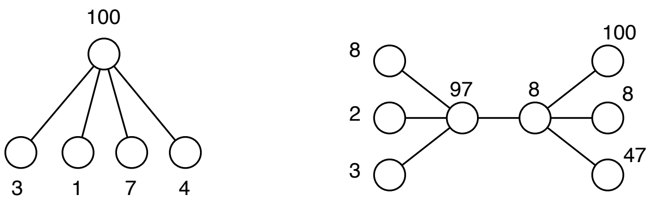

FIGURE 5 – Deux arbres.

Dans la suite, on considère un arbre $T = (V, E)$ enraciné en un sommet $r \in V$ avec d enfants $v_1, \cdots, v_d$ (i.e., $N(r) = \{v_1, \cdots, v_d\}$) et, pour tout $1 \leq i \leq d$, on note T_i le sous-arbre enraciné en v_i (voir Figure 6).

Question 13 (1 point) *Soit $1 \leq j \leq d$. Soit $S_j \subseteq V(T_j)$ un ensemble dominant de T_j contenant v_j. De plus, pour tout $1 \leq i \leq d$, $i \neq j$, soit $S_i \subseteq V(T_i)$ un ensemble dominant de T_i. Montrez que $\bigcup_{1 \leq i \leq d} S_i$ est un ensemble dominant de T.*

Question 14 (1 point) *Pour tout $1 \leq i \leq d$, soit S_i un ensemble dominant tous les sommets de T_i sauf (éventuellement) v_i. C'est-à-dire, pour tout sommet $v \in V(T_i) \setminus \{v_i\}$ de T_i sauf v_i, soit $v \in S_i$, soit v est voisin d'un sommet de S_i. Montrez que $\{r\} \cup \bigcup_{1 \leq i \leq d} S_i$ est un ensemble dominant de T.*

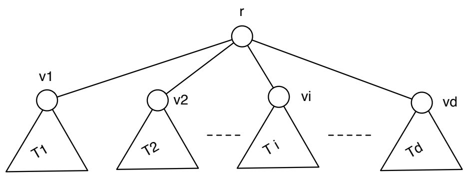

FIGURE 6 – Notations.

Question 15 (2 points) *Soit S un ensemble dominant de T. Montrez que, pour tout $1 \leq i \leq d$:*

— *Si $r \in S$, alors $S \cap V(T_i)$ domine tous les sommets de $V(T_i) \setminus \{v_i\}$;*
— *Sinon (si $r \notin S$), alors $S \cap V(T_i)$ est un ensemble dominant de T_i et il existe $1 \leq i \leq d$ tel que $v_i \in S$.*

Question 16 (3 points) *Proposez un algorithme qui calcule, en temps polynomial, le poids minimum d'un ensemble dominant dans les arbres pondérés.*

Indice : *Pour cela, on considérera un algorithme récursif plus général qui calcule les trois informations suivantes :*

— *le poids minimum $OPT(T)$ d'un ensemble dominant de l'arbre T ;*
— *le poids minimum $OPT'(T)$ d'un ensemble dominant de T contenant r ;*
— *le poids minimum $OPT''(T)$ d'un ensemble de sommets de T dominant tous les sommets de T sauf (éventuellement) r.*

Dit autrement, exprimez $OPT(T), OPT'(T)$ et $OPT''(T)$ si T est un arbre avec un seul sommet (cas de base : quand T consiste uniquement en un sommet, sa racine r) puis, si T a au moins deux sommets, exprimez $OPT(T), OPT'(T)$ et $OPT''(T)$ en fonction des valeurs de $OPT(T_i), OPT'(T_i)$ et $OPT''(T_i)$ pour tout $1 \leq i \leq d$ et en fonction de $w(r)$.