Sur la dimension multi-ensemble de différentes classes de graphes

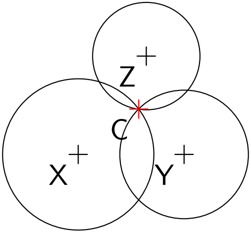
Emile Sorci

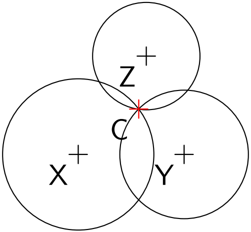
ENS de Lyon

02 septembre 2019

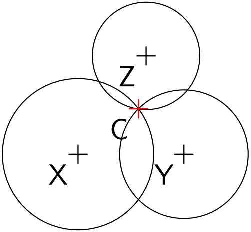
Encadrants : Nicolas Nisse et Julien Bensmail
Laboratoire : INRIA Sophia Antipolis Méditerranée

Table des matières


Z
C
X
Y



Dans le plan, trois points non alignés X, Y et Z suffisent à localier un point cible C à l'aide du vecteur des distances $(d(X,C), d(Y,C), d(Z,C))$. Dans l'espace, il en faut quatre qui ne sont pas coplanaires.



Dans le plan, trois points non alignés X, Y et Z suffisent à localier un point cible C à l'aide du vecteur des distances $(d(X,C), d(Y,C), d(Z,C))$. Dans l'espace, il en faut quatre qui ne sont pas coplanaires.

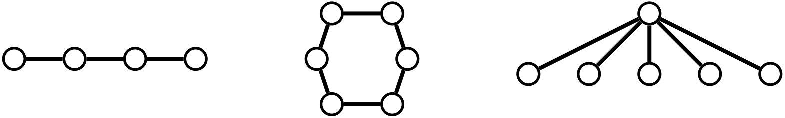
Combien de sommets faut-il pour en faire de même dans un graphe ? [Harary et Melter 76][Slater 75]

Definition (Ensemble résolvant pour la dimension métrique)

Soit $G = (V, E)$ un graphe, un ensemble de sommets S est dit **résolvant** si les vecteurs des distances $(d(u, s))_{s \in S}$ pour $u \in V$ sont tous distincts. Un ensemble résolvant permet de localiser une cible sur un graphe.

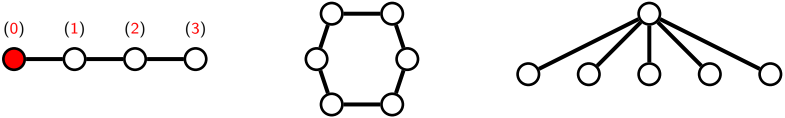
Definition (Ensemble résolvant pour la dimension métrique)

Soit $G = (V, E)$ un graphe, un ensemble de sommets S est dit **résolvant** si les vecteurs des distances $(d(u, s))_{s \in S}$ pour $u \in V$ sont tous distincts. Un ensemble résolvant permet de localiser une cible sur un graphe.



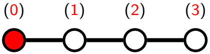
Definition (Ensemble résolvant pour la dimension métrique)

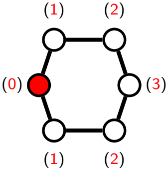
Soit $G = (V, E)$ un graphe, un ensemble de sommets S est dit **résolvant** si les vecteurs des distances $(d(u, s))_{s \in S}$ pour $u \in V$ sont tous distincts. Un ensemble résolvant permet de localiser une cible sur un graphe.

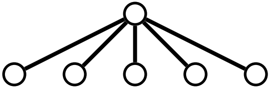


Definition (Ensemble résolvant pour la dimension métrique)

Soit $G = (V, E)$ un graphe, un ensemble de sommets S est dit **résolvant** si les vecteurs des distances $(d(u, s))_{s \in S}$ pour $u \in V$ sont tous distincts. Un ensemble résolvant permet de localiser une cible sur un graphe.

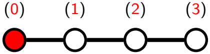


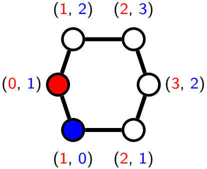


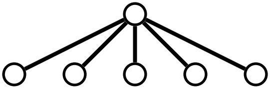


Definition (Ensemble résolvant pour la dimension métrique)

Soit $G = (V, E)$ un graphe, un ensemble de sommets S est dit **résolvant** si les vecteurs des distances $(d(u, s))_{s \in S}$ pour $u \in V$ sont tous distincts. Un ensemble résolvant permet de localiser une cible sur un graphe.

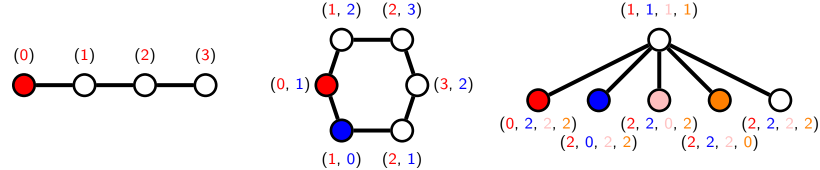






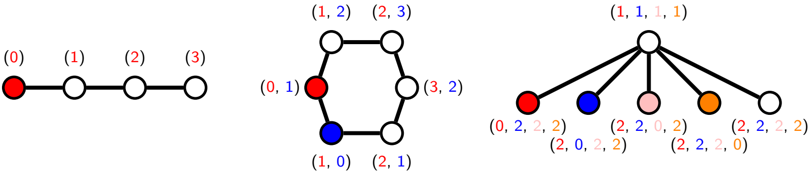
Definition (Ensemble résolvant pour la dimension métrique)

Soit $G = (V, E)$ un graphe, un ensemble de sommets S est dit **résolvant** si les vecteurs des distances $(d(u, s))_{s \in S}$ pour $u \in V$ sont tous distincts. Un ensemble résolvant permet de localiser une cible sur un graphe.



Definition (Ensemble résolvant pour la dimension métrique)

Soit $G = (V, E)$ un graphe, un ensemble de sommets S est dit **résolvant** si les vecteurs des distances $(d(u, s))_{s \in S}$ pour $u \in V$ sont tous distincts. Un ensemble résolvant permet de localiser une cible sur un graphe.



Definition (Dimension métrique)

La **dimension métrique** de G est $MD(G) = min\{|S|, S \text{ ensemble résolvant}\}$.

- Le problème de décision associé est NP-complet dans les graphes planaires [Díaz *et al.* 17].
- Le calcul de la dimension métrique d'un arbre se fait en temps polynomial [Khuller *et al.* 96].

- Le problème de décision associé est NP-complet dans les graphes planaires [Díaz *et al.* 17].
- Le calcul de la dimension métrique d'un arbre se fait en temps polynomial [Khuller *et al.* 96].

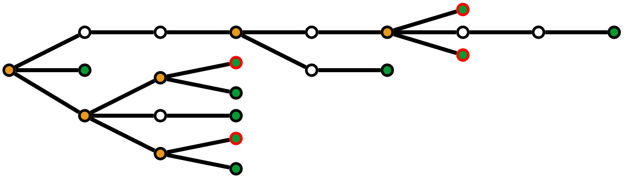
Soit T un arbre, F l'ensemble de ses feuilles, B l'ensemble des noeuds de branchement.

$$MD(T) = |F| - |B|$$

- Le problème de décision associé est NP-complet dans les graphes planaires [Díaz *et al.* 17].
- Le calcul de la dimension métrique d'un arbre se fait en temps polynomial [Khuller *et al.* 96].

Soit T un arbre, F l'ensemble de ses feuilles, B l'ensemble des noeuds de branchement.

$$MD(T) = |F| - |B|$$

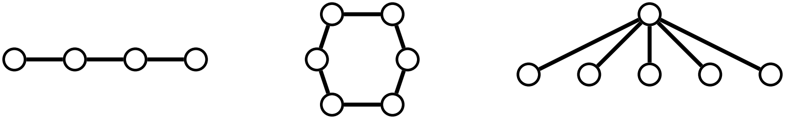


Definition (Ensemble résolvant pour la dimension multi-ensemble)

Soit $G = (V, E)$ un graphe, un ensemble de sommets S est dit **résolvant** si les multi-ensembles des distances $\{d(u, s)\}_{s \in S}$ pour $u \in V$ sont tous distincts.

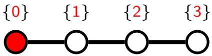
Definition (Ensemble résolvant pour la dimension multi-ensemble)

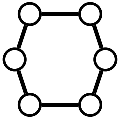
Soit $G = (V, E)$ un graphe, un ensemble de sommets S est dit **résolvant** si les multi-ensembles des distances $\{d(u, s)\}_{s \in S}$ pour $u \in V$ sont tous distincts.

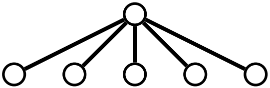


Definition (Ensemble résolvant pour la dimension multi-ensemble)

Soit $G = (V, E)$ un graphe, un ensemble de sommets S est dit **résolvant** si les multi-ensembles des distances $\{d(u, s)\}_{s \in S}$ pour $u \in V$ sont tous distincts.

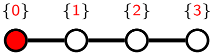


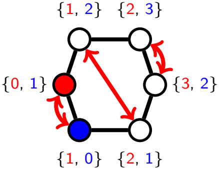


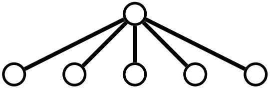


Definition (Ensemble résolvant pour la dimension multi-ensemble)

Soit $G = (V, E)$ un graphe, un ensemble de sommets S est dit **résolvant** si les multi-ensembles des distances $\{d(u, s)\}_{s \in S}$ pour $u \in V$ sont tous distincts.

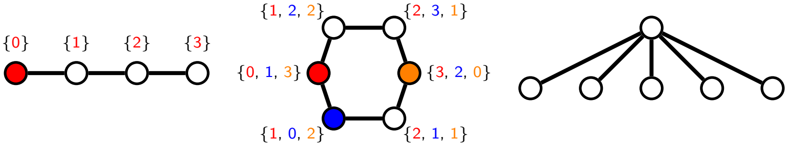






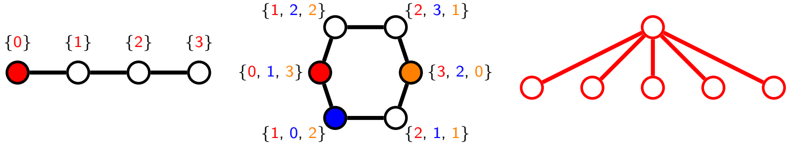
Definition (Ensemble résolvant pour la dimension multi-ensemble)

Soit $G = (V, E)$ un graphe, un ensemble de sommets S est dit **résolvant** si les multi-ensembles des distances $\{d(u, s)\}_{s \in S}$ pour $u \in V$ sont tous distincts.



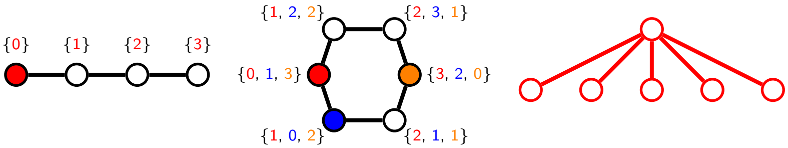
Definition (Ensemble résolvant pour la dimension multi-ensemble)

Soit $G = (V, E)$ un graphe, un ensemble de sommets S est dit **résolvant** si les multi-ensembles des distances $\{d(u, s)\}_{s \in S}$ pour $u \in V$ sont tous distincts.



Definition (Ensemble résolvant pour la dimension multi-ensemble)

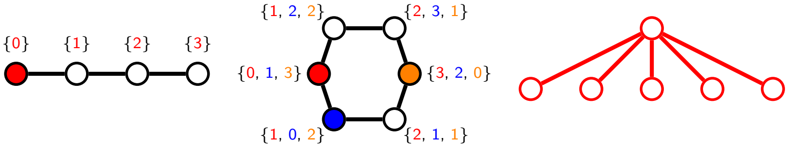
Soit $G = (V, E)$ un graphe, un ensemble de sommets S est dit **résolvant** si les multi-ensembles des distances $\{d(u,s)\}_{s \in S}$ pour $u \in V$ sont tous distincts.



Il n'existe pas d'ensemble résolvant pour les étoiles !

Definition (Ensemble résolvant pour la dimension multi-ensemble)

Soit $G = (V, E)$ un graphe, un ensemble de sommets S est dit **résolvant** si les multi-ensembles des distances $\{d(u, s)\}_{s \in S}$ pour $u \in V$ sont tous distincts.



Il n'existe pas d'ensemble résolvant pour les étoiles !

Definition (Dimension multi-ensemble)

La **dimension multi-ensemble** de G est $dm(G) = min\{|S|, S$ ensemble résolvant$\}$ si il existe un ensemble résolvant, $dm(G) = +\infty$ sinon.

- On connaît la dimension multi-ensemble pour les chemins, les cycles et les arbres binaires complets.
- Aucun graphe n'a d'ensemble résolvant de taille 2.
- Tout graphe G de diamètre 2 qui n'est pas un chemin vérifie $dm(G) = +\infty$.
- Si dans un graphe G il existe un sommet qui au moins trois voisins de degré 1 alors $dm(G) = +\infty$.

[Simanjuntak *et al.* 17]

Definition

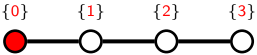
Un graphe G admet un **gap** si et seulement si il existe $r, d > 1$ tels que G admet un ensemble résolvant de taille r et de taille $r + d$ mais pas de taille $k \in \{r + 1, ..., r + d - 1\}$. On dit alors que G présente un gap en $r + 1$ de taille $d - 1$.

Definition

Un graphe G admet un **gap** si et seulement si il existe $r, d > 1$ tels que G admet un ensemble résolvant de taille r et de taille $r + d$ mais pas de taille $k \in \{r + 1, ..., r + d - 1\}$. On dit alors que G présente un gap en $r + 1$ de taille $d - 1$.

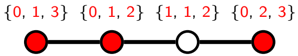
Definition

Un graphe G admet un **gap** si et seulement si il existe $r, d > 1$ tels que G admet un ensemble résolvant de taille r et de taille $r + d$ mais pas de taille $k \in \{r + 1, ..., r + d - 1\}$. On dit alors que G présente un gap en $r + 1$ de taille $d - 1$.



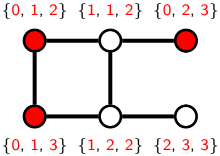
Definition

Un graphe G admet un **gap** si et seulement si il existe $r, d > 1$ tels que G admet un ensemble résolvant de taille r et de taille $r + d$ mais pas de taille $k \in \{r + 1, ..., r + d - 1\}$. On dit alors que G présente un gap en $r + 1$ de taille $d - 1$.



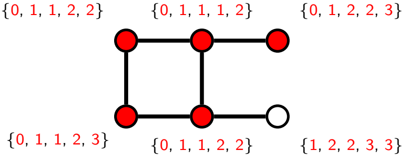
Definition

Un graphe G admet un **gap** si et seulement si il existe $r, d > 1$ tels que G admet un ensemble résolvant de taille r et de taille $r + d$ mais pas de taille $k \in \{r + 1, ..., r + d - 1\}$. On dit alors que G présente un gap en $r + 1$ de taille $d - 1$.



Definition

Un graphe G admet un **gap** si et seulement si il existe $r, d > 1$ tels que G admet un ensemble résolvant de taille r et de taille $r + d$ mais pas de taille $k \in \{r + 1, ..., r + d - 1\}$. On dit alors que G présente un gap en $r + 1$ de taille $d - 1$.

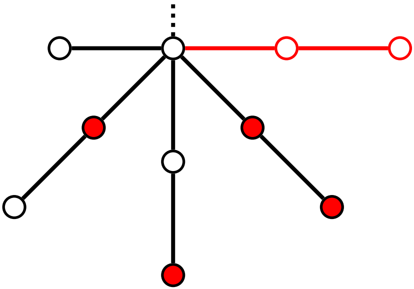


Pas trop de petits chemins pendants

Si G est un graphe de dimension multi-ensemble finie, alors pour tout sommet s de G, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, il y a **au plus** 2^n **chemins pendants de longueur** n **ou moins**.

Pas trop de petits chemins pendants

Si G est un graphe de dimension multi-ensemble finie, alors pour tout sommet s de G, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, il y a **au plus** 2^n **chemins pendants de longueur** n **ou moins**.

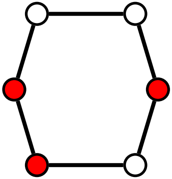


On peut ajouter des feuilles

Soient G un graphe et S un ensemble résolvant de G. Si G' est un graphe obtenu depuis G en **ajoutant des feuilles sans créer de nouveaux jumeaux**, alors S est un ensemble résolvant de G'.

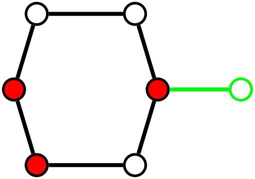
On peut ajouter des feuilles

Soient G un graphe et S un ensemble résolvant de G. Si G' est un graphe obtenu depuis G en **ajoutant des feuilles sans créer de nouveaux jumeaux**, alors S est un ensemble résolvant de G'.



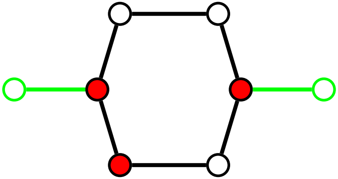
On peut ajouter des feuilles

Soient G un graphe et S un ensemble résolvant de G. Si G' est un graphe obtenu depuis G en **ajoutant des feuilles sans créer de nouveaux jumeaux**, alors S est un ensemble résolvant de G'.



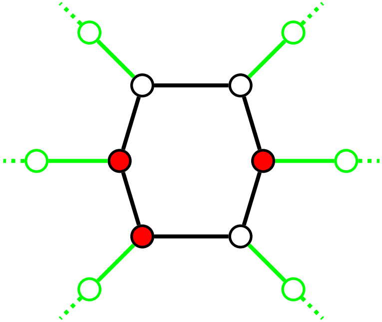
On peut ajouter des feuilles

Soient G un graphe et S un ensemble résolvant de G. Si G' est un graphe obtenu depuis G en **ajoutant des feuilles sans créer de nouveaux jumeaux**, alors S est un ensemble résolvant de G'.



On peut ajouter des feuilles

Soient G un graphe et S un ensemble résolvant de G. Si G' est un graphe obtenu depuis G en **ajoutant des feuilles sans créer de nouveaux jumeaux**, alors S est un ensemble résolvant de G'.



Un ensemble de $k > 1$ sommets S du chemin P_n est résolvant s'il est **asymétrique**.

Un ensemble de $k > 1$ sommets S du chemin P_n est résolvant s'il est **asymétrique**.

Un ensemble de $k > 1$ sommets S du chemin P_n est résolvant s'il est **asymétrique**.

Un ensemble de $k > 1$ sommets S du chemin P_n est résolvant s'il est **asymétrique**.

Dans le cas des chenilles une notion de **symétrie** similaire permet de trouver des ensembles résolvants.

Un ensemble de $k > 1$ sommets S du chemin P_n est résolvant s'il est **asymétrique**.

Dans le cas des chenilles une notion de **symétrie** similaire permet de trouver des ensembles résolvants.

Pas de gaps !

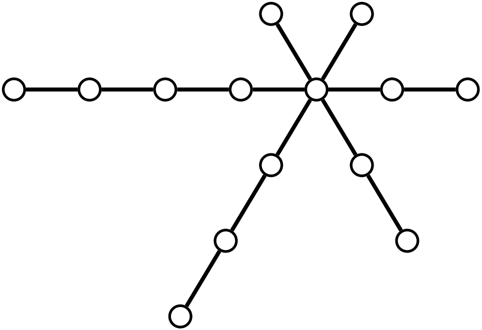
Après avoir énuméré les ensembles de tailles d'ensembles résolvants, on se rend compte qu'il n'y a **pas de gaps** dans les cycles et les chenilles et qu'il existe un seul gap dans les chemins avec $n > 3$ sommets.

Notations

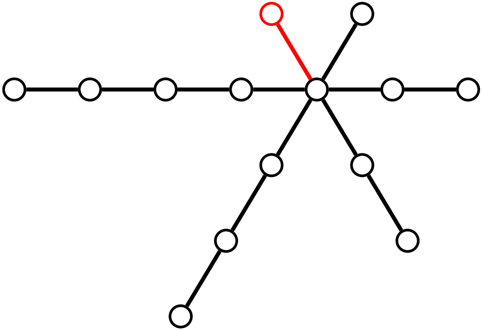
Soit $A = (c, B_1, ..., B_l)$ l'araignée de centre c et pour tout i, le vecteur $B_i = (u^i_1, ..., u^i_{k_i})$ est une **branche** tel que $\{u^i_1, c\}$ est une arête et les vecteurs sont triés par taille croissante.
Soit S un ensemble de sommets de A, alors, S_i **est la séquence de** k_l **bits telle que pour tout** j **on a** $S_{i\,j} = 1$ **si** $u^i_j \in S$ **et** $S_{i\,j} = 0$ **sinon.**
On note $i_{max}(S_i) = max\{j|S_{i\,j} = 1\}$ et $i_{max}(S) = max\{i_{max}(S_i)\}$.

Un **algorithme polynomial** qui crée un ensemble résolvant pour une araignée **s'il en existe un.**

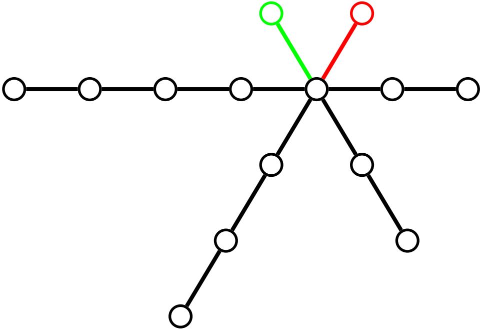
Un **algorithme polynomial** qui crée un ensemble résolvant pour une araignée **s'il en existe un.**



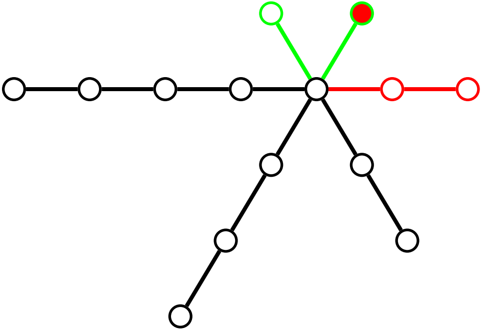
Un **algorithme polynomial** qui crée un ensemble résolvant pour une araignée **s'il en existe un.**



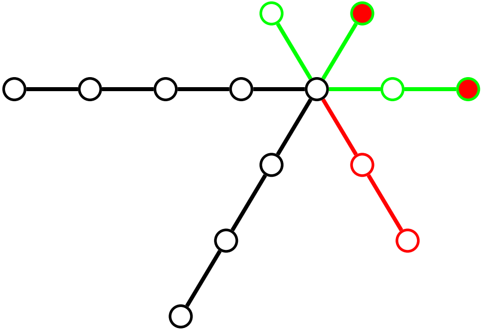
Un **algorithme polynomial** qui crée un ensemble résolvant pour une araignée **s'il en existe un.**



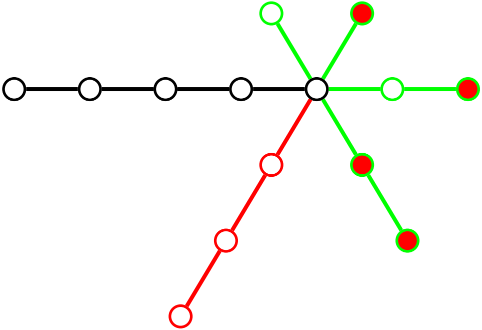
Un **algorithme polynomial** qui crée un ensemble résolvant pour une araignée **s'il en existe un.**



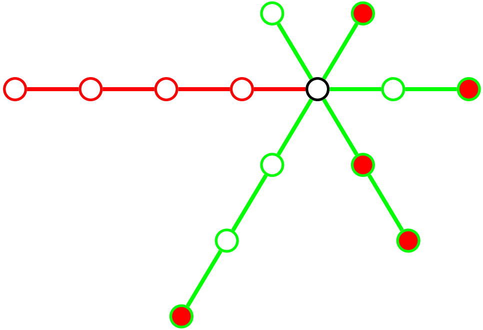
Un **algorithme polynomial** qui crée un ensemble résolvant pour une araignée **s'il en existe un.**



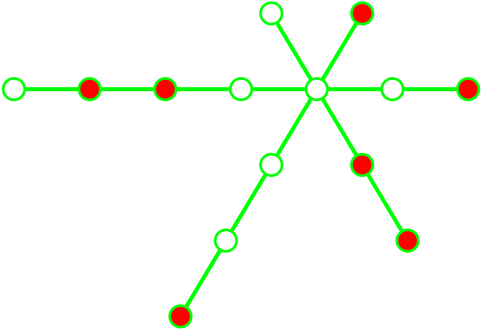
Un **algorithme polynomial** qui crée un ensemble résolvant pour une araignée **s'il en existe un.**



Un **algorithme polynomial** qui crée un ensemble résolvant pour une araignée **s'il en existe un.**



Un **algorithme polynomial** qui crée un ensemble résolvant pour une araignée **s'il en existe un.**



Un **algorithme polynomial** qui crée un ensemble résolvant pour une araignée **s'il en existe un.**

Condition d'existence pour les araignées

Une araignée $A = (c, B_1, ..., B_l)$ admet un ensemble résolvant si et seulement si pour tout n il y a moins de 2^n branches de taille n ou moins.

Un **algorithme polynomial** qui crée un ensemble résolvant de taille **inférieure à** $dm(A) + 1$ pour une araignée A si elle admet un ensemble résolvant.

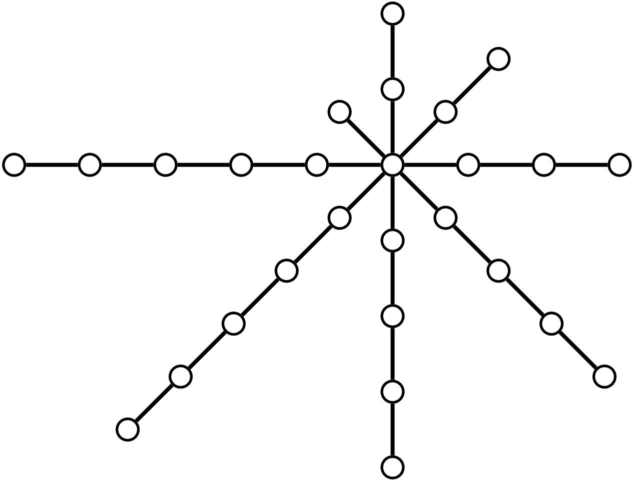
Un **algorithme polynomial** qui crée un ensemble résolvant de taille **inférieure à** $dm(A) + 1$ pour une araignée A si elle admet un ensemble résolvant.

Une quasi-caractérisation pour les araignéees.

Si $\forall i \neq j, S_i \neq S_j$ et il existe $i, j, i \neq j$ tels que $i_{max}(S_i) = i_{max}(S_j) = i_{max}(S)$ alors S est résolvant.

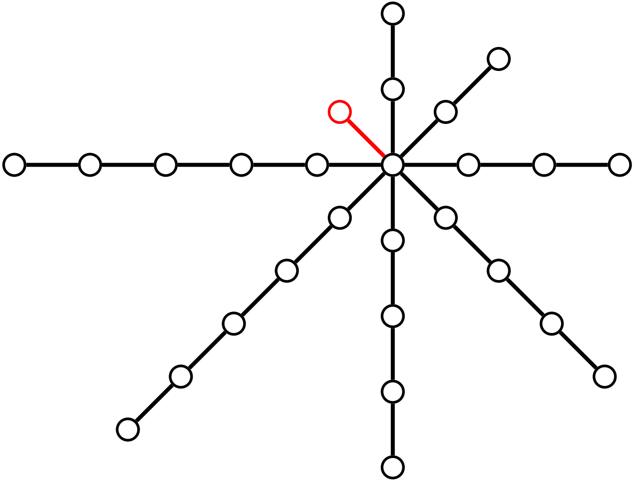
Première étape

On traite chaque branche en mettant le moins de sommets que possible dans l'ensemble résolvant.



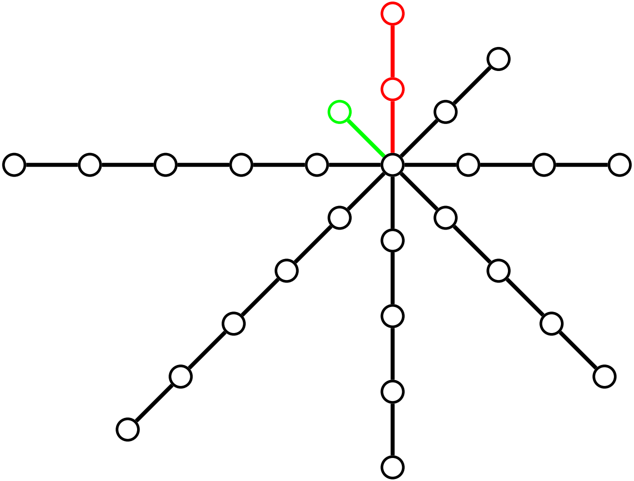
Première étape

On traite chaque branche en mettant le moins de sommets que possible dans l'ensemble résolvant.



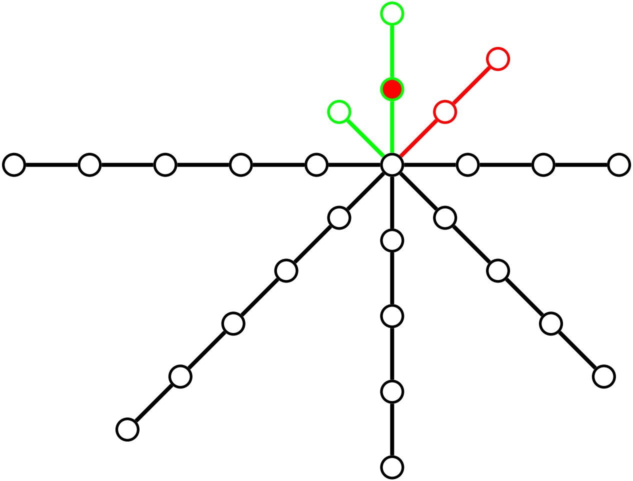
Première étape

On traite chaque branche en mettant le moins de sommets que possible dans l'ensemble résolvant.



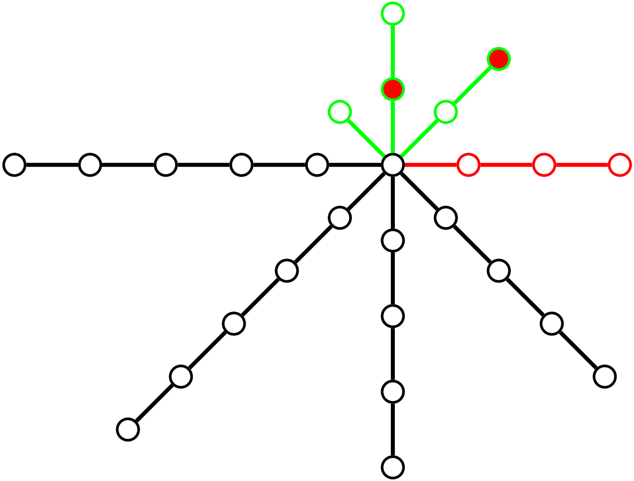
Première étape

On traite chaque branche en mettant le moins de sommets que possible dans l'ensemble résolvant.



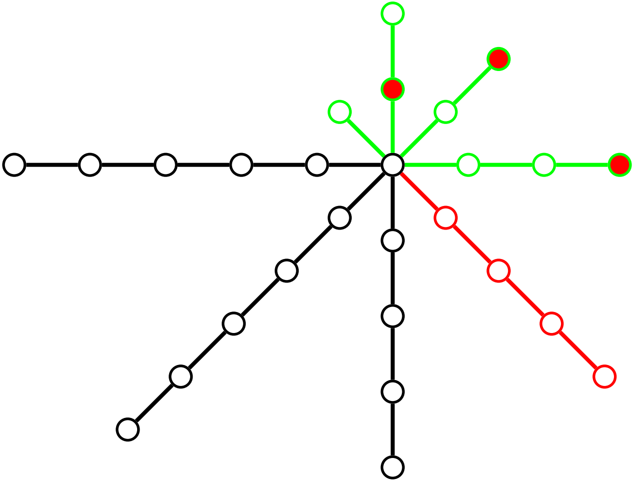
Première étape

On traite chaque branche en mettant le moins de sommets que possible dans l'ensemble résolvant.



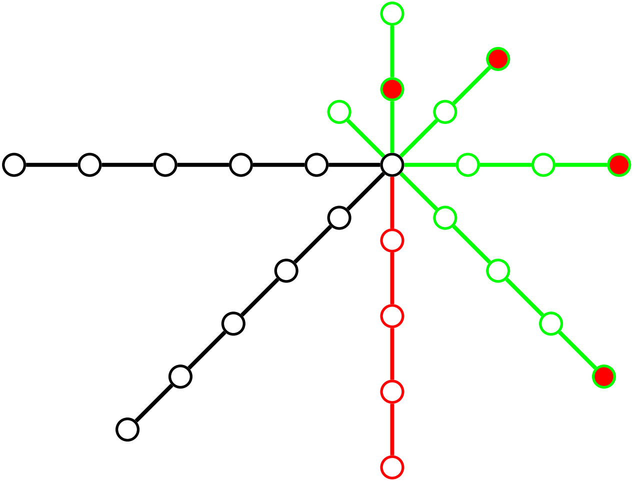
Première étape

On traite chaque branche en mettant le moins de sommets que possible dans l'ensemble résolvant.



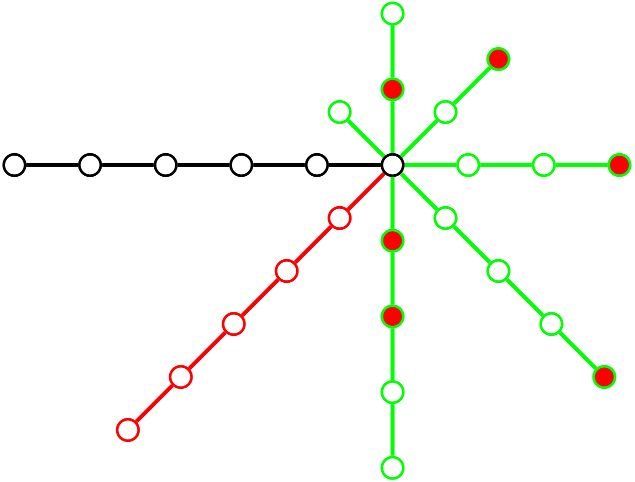
Première étape

On traite chaque branche en mettant le moins de sommets que possible dans l'ensemble résolvant.



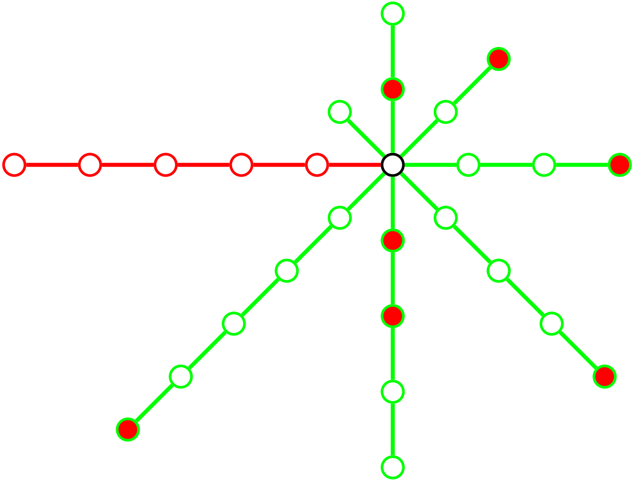
Première étape

On traite chaque branche en mettant le moins de sommets que possible dans l'ensemble résolvant.



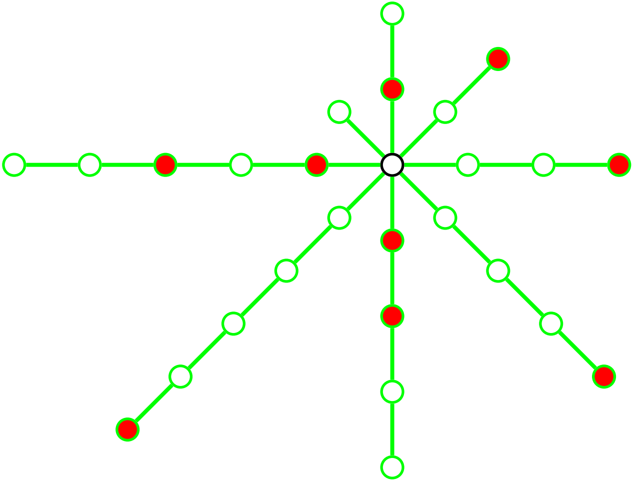
Première étape

On traite chaque branche en mettant le moins de sommets que possible dans l'ensemble résolvant.



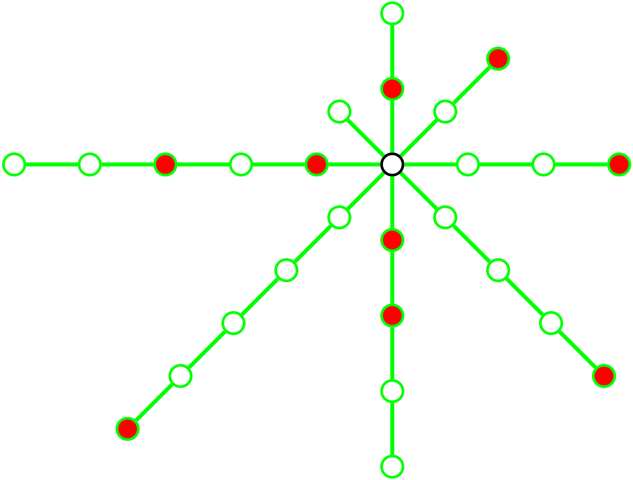
Première étape

On traite chaque branche en mettant le moins de sommets que possible dans l'ensemble résolvant.



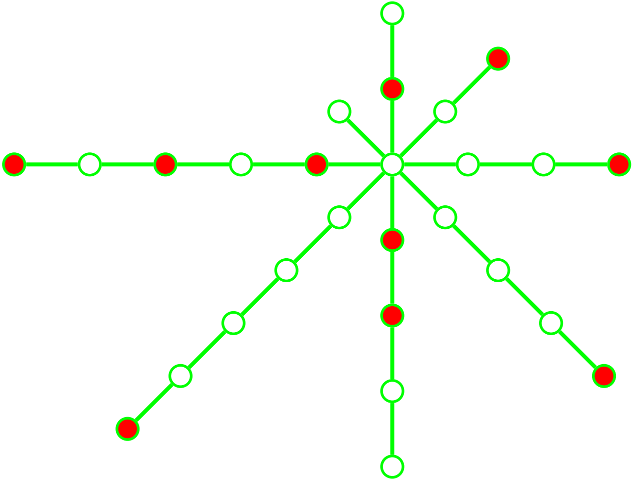
Deuxième étape

On adapte l'ensemble résolvant s'il le faut.



Deuxième étape

On adapte l'ensemble résolvant s'il le faut.



Avec ce travail :

- j'apporte une meilleure compréhension du problème dans le cas des chemins, cycles, chenilles et araignées.
- j'étudie l'importance des symétries pour décider si un ensemble est résolvant ou non.

Avec ce travail :

- j'apporte une meilleure compréhension du problème dans le cas des chemins, cycles, chenilles et araignées.
- j'étudie l'importance des symétries pour décider si un ensemble est résolvant ou non.

Certaines questions qui restent ouvertes sont :

- Comment peut-on caractériser les ensembles résolvants dans les arbres avec les automorphismes ?
- Le problème de décision associé est-il NP-complet dans les graphes en général ? Et dans les arbres ?
- Peut-on trouver un algorithme polynomial qui décide si un graphe admet un ensemble résolvant ?
- Peut-on trouver des gaps aussi grands que l'on veut ? Et des graphes avec autant de gaps que l'on veut ?

Les automorphismes pour décrie les symétries qui nous concernent ?

Les automorphismes pour décrie les symétries qui nous concernent ?

Une première intuition

A-t-on pour G un arbre, $dm(G) < +\infty$ si et seulement si $\exists S \subseteq V$ tel que $\forall \phi$ automorphisme de G tel que $\phi(S) = S$ alors $\phi = Id$?

Les automorphismes pour décrie les symétries qui nous concernent ?

Une première intuition

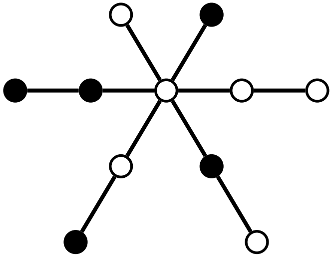
A-t-on pour G un arbre, $dm(G) < +\infty$ si et seulement si $\exists S \subseteq V$ tel que $\forall \phi$ automorphisme de G tel que $\phi(S) = S$ alors $\phi = Id$?

Un coté de l'équivalence est vrai !

Soit G un arbre qui admet un ensemble résolvant $S \subseteq V$ alors $\forall \phi$ automorphisme de G tel que $\phi(S) = S$ on a $\phi = Id$.

Malheureusement l'autre implication n'est pas vraie.

Malheureusement l'autre implication n'est pas vraie.



Rappel

Si G est un graphe de dimension multi-ensemble finie, alors pour tout sommet s de G, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, il y a **au plus** 2^n **chemins pendants de longueur** n **ou moins**.