

Rapport de stage

Sur la dimension multi-ensemble de certaines classes de graphes

Emile Sorci
L3 informatique fondamentale
ENS Lyon

Encadrants : Nicolas Nisse et
Julien Bensmail
Laboratoire : INRIA Sophia
Antipolis Méditerranée

3 juin 2019 - 12 juillet 2019

Ce document présente le travail que j'ai pu effectuer lors de mon stage de fin de licence 3 d'informatique fondamentale à l'ENS de Lyon. Pendant ce stage qui a eu lieu du 3 juin 2019 au 12 juillet 2019 à l'INRIA Sophia Antipolis Méditerranée sous l'encadrement de Julien Bensmail et Nicolas Nisse, j'ai eu l'occasion d'étudier le problème de dimension multi-ensemble sur certaines classes de graphes. Ce rapport détaille les différents résultats que j'ai obtenu. En annexe se trouve une partie qui porte sur le contexte institutionnel et social du stage. Cette partie présente aussi ce que j'ai pu tirer du stage d'un point de vue personnel.

Table des matières

1	Introduction	2
2	Préliminaires	4
3	Chemins	4
4	Cycles	5
5	Chenilles	6
6	Araignées	12
7	Unions de chemins	17
8	Lien avec les automorphismes de graphe	18
9	Conclusion	19
10	Annexe	21
10.1	Introduction	21
10.2	Chenilles	21
10.3	Araignées	22
10.4	Contexte institutionnel et social du stage	23

1. Introduction

Le problème que nous avons abordé lors de ce stage est un problème de localisation dans un graphe, plus précisément une variante du problème de la *dimension métrique* d'un graphe introduit par Harary et Melter [6] et Slater [11] en 1976 et 1975. Étant donné un graphe $G = (V, E)$ connexe, non orienté, un ensemble de sommets R est dit *résolvant* si tous les vecteurs $(d(u, r))_{r \in R}$ pour $u \in V$, où $d(u, r)$ est la distance de u à r , sont distincts. En d'autres termes, on souhaite pouvoir localiser avec certitude une cible dans un graphe à l'aide des distances entre cette cible et un certain nombre de sommets interrogés. La *dimension métrique* du graphe est alors $MD(G) = \min\{|R|, R \text{ ensemble résolvant de } G\}$. Par exemple les chemins ont une dimension métrique de 1 et les étoiles à n branches ont une dimension métrique de $n - 1$. Le problème a été bien étudié; notamment, il existe une caractérisation simple de la dimension métrique d'un arbre [8]. Le problème de décision associé (étant donné un graphe G et un entier k a-t-on $MD(G) \leq k$) est NP-complet dans les graphes en général et dans certaines classes de graphes comme les graphes planaires [3] et les graphes de diamètre 2 [4]. Plusieurs variations de ce problème ont déjà été étudiées. Bensmail et al. [1] ont notamment étudié une version séquentielle du problème dans laquelle, à chaque tour, on questionne un nombre fixe de sommets qui nous répondent la distance à la cible que l'on souhaite localiser. Le problème de décision associé est lui aussi NP-complet [1]. Bensmail et al. ont aussi étudié la dimension métrique dans les graphes orientés [2]. Dans d'autres variantes, on autorise la cible à se déplacer au sein du graphe [9].

La variante que nous allons étudier ici est proche du problème de dimension métrique initial. La seule différence étant qu'au lieu d'obtenir le vecteur des distances, on obtient le multi-ensemble des distances. Plus précisément, soient G un graphe connexe, non orienté, S un ensemble de sommets et u un sommet de G . Nous notons $M(u|S)$ le multi-ensemble $\{d(u, s), \forall s \in S\}$ où $d(u, s)$ est la distance entre les sommets u et s , ou plus simplement $M(u)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté. Pour $d \in \mathbb{N}$ on dénotera par $M(u|S)[d]$ la multiplicité de d dans $M(u|S)$. Nous écrirons toujours $M(u)$ trié dans l'ordre croissant. Deux sommets u et v d'un graphe muni d'un ensemble S sont dits *distinguables* par S (ou juste distinguables s'il n'y a pas d'ambiguïté) si $M(u|S) \neq M(v|S)$. Un ensemble S de sommets d'un graphe G est dit *résolvant* dans le cadre de la dimension multi-ensemble pour G (ou juste *résolvant* s'il n'y a pas d'ambiguïté) si toute paire de sommets distincts de G est distinguable par S . On définit la *dimension multi-ensemble* d'un graphe G par $dm(G) = \min\{|S|, S \text{ ensemble résolvant de } G\}$ si G admet un ensemble résolvant et $dm(G) = +\infty$ sinon. Pour assurer la bonne compréhension nous allons détailler les raisons pour lesquelles l'ensemble en rouge sur la Figure 1 est un ensemble résolvant. Nous allons montrer que les multi-ensembles sont différents. Cette explication est un cas particulier d'un théorème dans [10] qui donne la dimension multi-ensemble des arbres complets et binaires. Soient u et v deux sommets de l'arbre. Si u et v ne sont pas à la même hauteur, alors, le maximum de leur multi-ensemble les distingue. Par exemple, pour distinguer 3 de 6 il suffit de remarquer que 5, qui est le sommet de l'arbre dans l'ensemble résolvant le plus éloigné de 3 et de 6, est à distance 3 de 3 mais 4 de 6. Si u et v sont à la même hauteur dans l'arbre il y a deux cas. Soit l'un est dans l'ensemble résolvant et pas l'autre et ils sont distinguables car 0 est dans le multi-ensemble de l'un et pas de l'autre. Soit les deux sont dans l'ensemble résolvant ou aucun n'y est et les autres éléments de l'arbre à même hauteur, ou à hauteur plus élevée, contribuent de la même façon aux deux multi-ensembles. En effet, 5 et 4 sont à même distance que 7 et 6 et inversement. Mais c'est les fils du premier ancêtre commun qui les distingue. En effet, 2 est à distance 1 de 4 mais 6 n'a pas de sommet dans l'ensemble résolvant à distance 1.

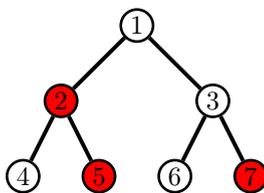


Figure 1: En rouge un exemple d'ensemble résolvant.

Le fait que les distances soient mélangées ici entraîne que tout graphe n'admet pas de dimension

multi-ensemble finie. Les Figures 2 et 3 sont deux exemple de graphes dont la dimension métrique est finie mais la dimension multi-ensemble est infinie. Pour s'en convaincre, il suffit de regarder tous les ensembles de sommets de ces graphes, et de remarquer que quelque soit l'ensemble considéré, il existera toujours deux sommets du graphe qui ont même multi-ensemble. Pour trouver certains contre-exemples, j'ai eu l'occasion d'utiliser la bibliothèque sage de Python qui met à disposition des outils pour travailler sur les graphes. Nous montrerons des façons plus astucieuses de prouver ce résultat. Le fait que le graphe de la Figure 2 a dimension multi-ensemble infinie est une conséquence du Théorème 2.2. Des variantes de ce problème qui évitent d'avoir des graphes avec une dimension multi-ensemble infinie ont été étudiées [5].

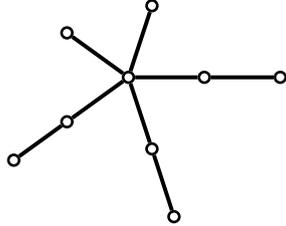


Figure 2: Ce graphe a dimension multi-ensemble infinie mais dimension métrique 4.

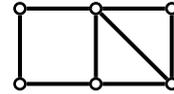


Figure 3: Ce graphe a dimension multi-ensemble infinie mais dimension métrique 4.

Ce problème a peu été étudié. Seuls quelques résultats partiels ont été donnés. Notamment excepté le chemin à trois sommets, tous les graphes de diamètre 2 ont une dimension multi-ensemble infinie [10]. On connaît aussi la dimension multi-ensemble des chemins, des arbres binaires complets et des cycles [10]. On sait aussi qu'aucun graphe n'a d'ensemble résolvant de taille 2 [10].

Une notion à laquelle nous allons nous intéresser est la notion de *gaps*. Elle n'a pas été abordée à notre connaissance.

Définition 1.1. *Un graphe G admet un gap si et seulement si il existe $r, d > 1$ tels que G admet un ensemble résolvant de taille r et de taille $r + d$ mais pas de taille $k \in \{r + 1, \dots, r + d - 1\}$. On dit alors que G présente un gap en $r + 1$ de taille $d - 1$.*

Notre intérêt pour cette notion vient de l'observation que pour certains graphes un tel gap existe. Les chemins présentent un gap. En effet nous verrons qu'un chemin à $n > 3$ sommets a un ensemble résolvant de taille 1 et de tailles $3, \dots, n - 1$. Mais ce ne sont pas les seuls graphes présentant un gap. Surtout, il existe des graphes qui ont un gap en $k \neq 2$. Cela nous semble plus intéressant car le cas des chemins est pathologique car aucun graphe n'a d'ensemble résolvant de taille 2. Nous avons pu trouver, à l'aide de la bibliothèque sage d'autres graphes présentant des gaps. Le graphe de la Figure 4 est le plus petit graphe qui n'est pas un chemin et qui présente un gap. Nous avons aussi trouvé des graphes qui présentent plusieurs gaps (Figure 18 en annexe) et des graphes qui présentent des gaps de taille $k > 1$ (Figure 19 en annexe).

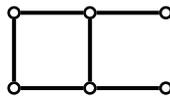


Figure 4: Ce graphe présente un gap en 4 de taille 1.

Durant ce stage j'ai eu l'occasion d'étudier ce problème sur plusieurs classes de graphe en espérant que les résultats obtenus ouvrent des pistes vers une meilleure compréhension générale du problème. En effet pour le moment, il n'y a que peu de classes de graphes sur lesquelles on comprend bien ce problème. Ce problème nous semble difficile, même dans le cas des arbres. Nous présentons dans ce rapport, en plus de deux résultats sur les graphes en général, une étude plus détaillée des ensembles résolvants dans les chemins, les cycles, les chenilles et les araignées. Nous prouvons que le chemin d'ordre $n \geq 4$, admet des ensembles résolvants de taille $1, 3, \dots, n - 1$, que les cycles C_3, C_4 et C_5 n'ont pas d'ensemble résolvant mais que pour $n \geq 6$, C_n admet des ensembles résolvants de taille $3, \dots, n - 3$, et que toutes les chenilles admettent un ensemble résolvant et que comme avec les cycles, il n'y a pas de gaps dans les chenilles non plus. Nous caractérisons dans

quel cas la dimension multi-ensemble d'une araignée A est finie et nous proposons un algorithme polynomial qui renvoie un ensemble résolvant de taille inférieure ou égale à $dm(A) + 1$. Nous abordons ensuite le travail effectué sur les ensembles de chemins. Cette partie comprend surtout de nombreux contre-exemples à certaines intuitions que nous avons pu avoir. Enfin, nous décrivons le lien que nous avons pu faire entre la dimension multi-ensemble et les automorphismes de graphe. En choisissant de traiter les chenilles et les araignées, nous espérons obtenir des pistes pour l'étude du problème sur les arbres.

2. Préliminaires

Cette section détaille quelques résultats généraux qui seront réutilisés au cours de ce rapport.

Définition 2.1. *Un chemin u_0, u_1, \dots, u_p dans un graphe $G = (V, E)$ est dit pendant à un sommet s si $\{u_0, s\} \in E$ et pour tout $i \in \llbracket 0; p-1 \rrbracket$, le degré de u_i noté $\deg(u_i)$ est égal à 2 et $\deg(u_p) = 1$.*

Théorème 2.2. *Si G est un graphe de dimension multi-ensemble finie, alors pour tout sommet s de G , et pour tout $n \in \mathbb{N}$, il y a au plus 2^n chemins pendants de longueur n ou moins.*

Preuve. Soit S un ensemble de sommets de G et supposons qu'il existe un sommet s de G tel qu'il y a strictement plus de 2^n chemins pendants de taille n . Alors, il y a deux de ces chemins $P^1 = \{u_1^1, \dots, u_n^1\}$ et $P^2 = \{u_1^2, \dots, u_n^2\}$ tels que $\forall i, u_i^1 \in S \iff u_i^2 \in S$. Alors, $M(u_i^1) = M(u_i^2)$ donc S n'est pas un ensemble résolvant \square

Lemme 2.3. *Soit $G = (V, E)$ un graphe muni d'un ensemble résolvant S . Soit $G' = (V', E')$ un graphe obtenu depuis G en enlevant des feuilles n'appartenant pas à S . Soit $F = \{u_1, \dots, u_n\} \subseteq V$ tel que pour tout i , $\deg_G(u_i) = 1$, $u_i \notin S$ et $V \setminus F = V'$. Alors, S est résolvant pour G' .*

Preuve. La transformation de G à G' conserve les multi-ensembles. \square

Le corollaire suivant est très utile dans le cas des chenilles.

Corollaire 2.4. *Soient G un graphe et S un ensemble résolvant de G . Si G' est un graphe obtenu depuis G en ajoutant des feuilles sans créer de nouveaux jumeaux, alors S est un ensemble résolvant de G' .*

L'observation suivante donnée par [10] est souvent utilisée dans ce rapport.

Remarque 2.5. *Un ensemble de taille 2 n'est jamais résolvant.*

Preuve. Soit $S = \{u, v\}$ deux sommets distincts d'un graphe. On a alors $M(u) = M(v)$ et donc S n'est pas résolvant. \square

3. Chemins

Dans cette section nous approfondirons la connaissance superficielle que nous avons du problème sur les chemins notamment en caractérisant toutes les tailles d'ensembles résolvents.

D'après [10] on sait déjà que $dm(G) = 1$ si et seulement si G est un chemin $P_n = \{u_1, \dots, u_n\}$ le chemin de taille $n \geq 2$ et l'ensemble résolvant minimal est alors $\{u_1\}$ ou $\{u_n\}$. Nous allons généraliser ce résultat.

Définition 3.1. *Soient le chemin $P_n = \{u_1, \dots, u_n\}$ et $S = \{u_{i_1}, \dots, u_{i_k}\}$ un ensemble de sommets de P_n . On définit le chemin interne à P_n pour S par le chemin $I(P_n, S) = \{u_{i_1}, u_{i_1+1}, \dots, u_{i_k}\} = \{x_1, \dots, x_{|I|}\}$, qui est le sous chemin de P_n allant de u_{i_1} à u_{i_k} . C'est la plus petite section de G qui contient S .*

Définition 3.2. *Un chemin P_n muni d'un ensemble résolvant S est dit symétrique si pour tout $x_l \in I(P_n, S)$ on a l'équivalence suivante $x_l \in S \iff x_{|I|-l+1} \in S$.*

Voici une caractérisation des ensembles résolvents pour les chemins.

Théoreme 3.3. S est un ensemble résolvant pour P_n si et seulement si P_n muni de S n'est pas symétrique ou $S = \{u_1\}$ ou $S = \{u_n\}$.

Preuve. (\Leftarrow) Si $S = \{u_1\}$ ou $S = \{u_n\}$ on sait que S est un ensemble résolvant. Sinon, si $|S| > 1$ et $I(P_n, S)$ est asymétrique alors considérons u_i et u_j deux sommets de P_n . Si u_i et u_j sont dans $I(P_n, S)$ et si $\max(M(u_i)) = \max(M(u_j))$ alors soit $u_i = u_j$, soit u_i et u_j sont à des positions symétriques sur le chemin I . Considérons alors l l'indice minimal tel que $u_l \in S$ et $u_{|I|-l+1} \notin S$ (on considère avoir numéroté les sommets de sorte qu'un tel l soit défini). Alors $M(u_i)[\max(d(u_i, u_l), d(u_j, u_l))] \neq M(u_j)[\max(d(u_i, u_l), d(u_j, u_l))]$, ce qui les distingue. Si $u_i \in I$ et $u_j \notin I$ alors $\max(M(u_j)) > \max(M(u_i))$. Si $u_i \notin I$ et $u_j \notin I$ alors le même type d'argument que dans le cas $u_i \in I$ et $u_j \in I$ permet de distinguer u_i et u_j .

(\Rightarrow) Si $|S| = 1$ alors on sait que $S = \{u_1\}$ ou $S = \{u_n\}$. Si $|S| > 1$, supposons $I(P_n, S)$ symétrique. Alors u_{i_1} et u_{i_k} ne sont pas distinguables. S est donc forcément asymétrique. \square

Corollaire 3.4. Il y a un et un seul gap pour les chemins P_n avec $n \geq 4$. Il n'y a jamais d'ensemble résolvant de taille 2 mais il y a un ensemble résolvant de taille 3, ..., $n - 1$.

Preuve. Il n'y a jamais d'ensemble résolvant de taille 2. De plus, il n'y a pas d'ensemble résolvant de la taille du chemin, c'est pourquoi on se restreint à $n \geq 4$. Et pour construire un ensemble résolvant de taille $t \in \{3, \dots, n - 1\}$ il suffit de prendre $S = \{u_1, \dots, u_{t-1}, u_n\}$. \square

Corollaire 3.5. Cela donne un algorithme en $O(n)$ pour vérifier si un ensemble S de sommets de P_n est résolvant.

Corollaire 3.6. Il y a exactement

$$\frac{\sum_{l=k}^n (n-l+1) \left(\binom{l-2}{k-2} - \binom{\lfloor \frac{l}{2}-1 \rfloor}{\lfloor \frac{k}{2}-1 \rfloor} \right) Q(k, l)}{2}$$

ensembles résolvants asymétriques entre eux de taille k dans le chemin P_n où

$$Q(k, l) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est impair et } l \text{ est pair.} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Corollaire 3.7. Il y a exactement

$$\frac{\sum_{l=k}^n \left(\binom{l-2}{k-2} - \binom{\lfloor \frac{l}{2}-1 \rfloor}{\lfloor \frac{k}{2}-1 \rfloor} \right) Q(k, l)}{2}$$

ensembles résolvants asymétriques entre eux et tels que l'un ne soit pas la translation d'un autre de taille k dans le chemin P_n .

Ces formules sont données car elles semblaient utiles pour l'étude des ensembles de chemins.

4. Cycles

Dans cette section nous approfondirons la connaissance superficielle que nous avons du problème sur les chemins notamment en caractérisant toutes les tailles d'ensembles résolvants.

On sait déjà d'après [10] que si $n \geq 6$, il existe un ensemble résolvant de taille 3 qui est minimal car seul les chemins ont des ensembles résolvants de taille 1 et aucun graphe n'a d'ensemble résolvant de taille 2. Généralisons ce résultat.

Théoreme 4.1. C_3, C_4 et C_5 n'ont pas d'ensembles résolvants.

Preuve. Exhaustivement, on observe qu'aucun ensemble de sommet n'est résolvant pour ces graphes. Nous allons développer le cas de $C_5 = \{u_0, \dots, u_4\}$. On sait déjà qu'il n'y a pas d'ensemble résolvant de taille 1 et 2. Il y a deux types d'ensembles de sommets de taille 3 et un de taille 4 : $S_1 = \{u_0, u_1, u_2\}$, $S_2 = \{u_0, u_1, u_3\}$ et $S_3 = \{u_0, u_1, u_2, u_3\}$. Mais aucun n'est résolvant car $M(u_0|S_1) = M(u_2|S_1)$, $M(u_2|S_2) = M(u_4|S_2)$ et $M(u_0|S_3) = M(u_3|S_3)$. \square

Théoreme 4.2. *Pour tout $n \geq 6$ le cycle $C_n = \{u_0, \dots, u_{n-1}\}$ admet un ensemble résolvant de taille $t \in \{3, \dots, n-3\}$ mais pas de taille $n-1$ ni $n-2$.*

Preuve. Considérons $S = \{u_0, u_1, \dots, u_{t-2}, u_t\}$. Soient $u_i, u_j \in C_n$, montrons que $M(u_i) \neq M(u_j)$ ssi. $u_i \neq u_j$.

- Si $u_i \in S$ et $u_j \notin S$, alors $0 \in M(u_i)$ et $0 \notin M(u_j)$.
- Si $u_i \in S$ et $u_j \in S$, si $M = \max(M(u_i)) \neq \max(M(u_j))$ alors u_i et u_j sont distinguables. Sinon, si le maximum est atteint en u_0 (le cas où le maximum est atteint en u_t est semblable) par u_i et u_j il y a deux cas. Soit $u_i = u_j$ et soit $i = M$ et $j = n - M$ dans ce cas $M(u_j)[t-1-j] = 1$ mais $M(u_i)[t-1-j] = 2$. Sinon, si le maximum est atteint en u_t par u_i et en u_0 par u_j , alors $M = j = t - i$ on distingue encore deux cas. Si $M(u_i)[M-1] = 0$, alors $M(u_j)[M-1] = 1$ et si $M(u_i)[M-1] = 1$, alors $M(u_j)[M-1] = 2$. Dans les deux cas, u_i et u_j sont distinguables.
- Si $u_i \notin S$ et $u_j \notin S$, si u_i (resp. u_j) = u_{t-1} alors $M(u_i)[1] = 2$ (resp. $M(u_j)[1] = 2$) et c'est le seul tel sommet n'appartenant pas à S car $t \leq n-2$. Sinon, si $u_i \neq u_{t-1}$ et $u_j \neq u_{t-1}$ alors si $m = \min(M(u_i)) \neq \min(M(u_j))$ alors u_i et u_j sont distinguables. Sinon, si le minimum est atteint en u_0 (resp. u_t) par u_i et u_j alors $u_i = u_j$. En effet, il y a au plus deux sommets dans le cycle à distance m de u_0 (resp. u_t). Les chemins de ces deux sommets vers le u_0 de longueur m sont distincts, donc l'un d'eux rencontre S et ce n'est donc pas un minimum. Sinon, si le minimum est atteint en u_0 par u_i et en u_t par u_j , alors si $M(u_j)[m+1] = 1$ c'est atteint en u_0 mais alors $M(u_i)[m+1] = 2$, en u_1 et u_t . Sinon, si $m+1 \notin M(u_j)$ alors $m+1 \in M(u_i)$.

Supposons qu'il y avait un ensemble résolvant à $n-1$ sommets. On peut supposer que c'est $\{u_0, \dots, u_{n-2}\}$ quitte à renommer les sommets. Alors, u_0 et u_{n-2} ne sont pas distinguables.

Supposons qu'il y avait un ensemble résolvant à $n-2$ sommets. Soit il a la forme $\{u_0, \dots, u_{n-3}\}$ et alors u_0 et u_{n-2} ne sont pas distinguables. Soit il a la forme $\{u_0, \dots, u_t, u_{t+2}, \dots, u_{n-2}\}$ avec $t \in \{0, \dots, n-2\}$ et alors u_{t+1} et u_{n-1} ne sont pas distinguables. \square

Corollaire 4.3. *Il n'y a pas de gaps pour les cycles.*

5. Chenilles

Dans cette partie nous présenterons les résultats obtenus sur la classe de graphes que nous appelons les chenilles. Un arbre est une *chenille* s'il est de la forme suivante : un chemin principal, appelé *colonne vertébrale*, (u_1, \dots, u_{d+1}) et tout sommet de la colonne vertébrale peut avoir une ou plusieurs feuilles appelées *pattes*. La j -ème patte du sommet u_i est notée v_i^j . D'après le Théorème 2.2 un sommet de la colonne vertébrale peut avoir au plus deux pattes. On supposera que v_1^1 et v_{d+1}^1 existent toujours. Un sommet de la colonne vertébrale qui a i pattes sera nommé un i -sommet. Ici nous nous ne nous concentrons pas sur les chemins, nous considérons donc qu'une chenille possède au moins un i -sommet avec $i \geq 1$. Un exemple du type d'arbres que nous appelons chenilles avec les notations que nous utilisons est donné dans la Figure 5.

Dans nos figures nous indiquons en rouge les sommets de l'ensemble résolvant.

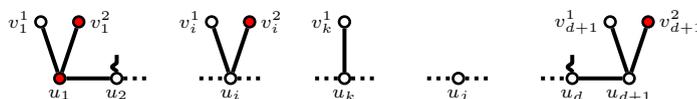


Figure 5: Les différentes notations utilisées au cours des preuves.

Un premier résultat sur les chenilles a été obtenu dans [7]. Il concerne les chenilles telles que pour tout i , u_i est un 2-sommet. Dans cette partie nous allons généraliser ce théorème à toutes les chenilles et montrer qu'il n'y a pas de gaps sur les chenilles.

Définition 5.1. *Une chenille est dite stable si u_1 et u_{d+1} sont des 2-sommets.*

Définition 5.2. Une chenille est dite symétrique si pour tout i, v_i^2 existe ssi v_{d+2-i}^2 existe aussi.

Dans le cadre des chenilles stables asymétriques, on ordonne les sommets de la colonne vertébrale de sorte que si il existe i tel que pour tout $j < i$ u_j est un 2-sommet et u_i est un 1-sommet alors il existe $j < i$ tel que u_{d+2-j} est un 1-sommet. C'est-à-dire que le sommet avec moins d'une patte le plus proche d'une extrémité est le plus proche de u_{d+1} .

Définition 5.3. Soit $G = (V, E)$ une chenille non stable. On dira que $G' = (V', E')$ est la version stable de G si, si u_1 (resp. u_{d+1} ou les deux) n'est pas un 2-sommet, alors $V' = V \cup \{v_1^2\}$ (resp. $V' = V \cup \{v_{d+1}^2\}$ ou $V' = V \cup \{v_1^2, v_{d+1}^2\}$) et $E' = E \cup \{\{u_1, v_1^2\}\}$ (resp. $E' = E \cup \{\{u_{d+1}, v_{d+1}^2\}\}$ ou $E' = E \cup \{\{u_1, v_1^2\}, \{u_{d+1}, v_{d+1}^2\}\}$). Autrement dit, on ajoute aux extrémités leur patte manquante. Les sommets ajoutés à G lors de la stabilisation seront dits fictifs.

Définition 5.4. Deux sommets u, v d'un graphe seront dits jumeaux par rapport à un ensemble de sommets S si $\forall s \in S, d(u, s) = d(v, s)$.

Lemme 5.5. Si G est une chenille stable alors elle admet $S = \{u_1\} \cup \{v_i^2 | \forall i \text{ tel que } u_i \text{ est un 2-sommet}\}$ comme ensemble résolvant. Cet ensemble est illustré dans la Figure 6 et la Figure 7.

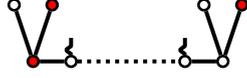


Figure 6: Le motif pour le choix des sommets aux extrémités de la colonne vertébrale.



Figure 7: Le motif pour le choix des pattes.

Preuve. La preuve traite plusieurs sous-cas :

1. Pour tout i , on peut distinguer v_i^1 de u_i et v_i^2 de u_i . En effet, $M(v_i^1) = M(u_i) + 1 = \{d(u_i, s) + 1 | \forall s \in S\}$ et $M(v_i^2) = (M(u_i) \setminus \{1\} + 1) \cup \{0\}$.

2. Pour tous $i, j, i \neq j$, on peut distinguer u_i et u_j .

Supposons $M(u_i) = M(u_j) = \{d_1, \dots, d_k\}$. On sait que la distance d_k est atteinte pour u_i et u_j à l'une des deux pattes de l'ensemble S situées sur les extrémités. Sachant que u_i et u_j sont sur la colonne vertébrale, on sait que u_i et u_j sont symétriques. C'est-à-dire $i + j = d + 2$. Considérons sans perte de généralité que u_i est à distance d_k du sommet v_1^2 et que u_j est à distance d_k du sommet v_{d+1}^2 , donc, $i \geq j$.

- Si $d_{k-1} = d_k$ alors u_i est aussi à distance d_k de v_{d+1}^2 et u_j est aussi à distance d_k de v_1^2 . Alors, $u_i = u_j$, ce qui est interdit.
- Sinon, $d_{k-1} = d_k - 1$ qui est atteinte pour u_i avec le sommet u_1 . Pour que $d_k - 1$ soit atteinte par u_j , il faut que v_d^2 existe, alors u_j a une fois $d_k - 1$ dans son multi-ensemble. On remarque que $d_k - 1$ pourrait être atteinte par u_j en v_{d+1}^2 mais alors u_i atteint $d_k - 1$ en v_1^2 , on peut mettre ce cas de côté. Mais alors pour vérifier la propriété de construction de l'ensemble résolvant, v_2^2 existe et il y a alors une fois de plus $d_k - 1$ dans le multi-ensemble de u_i que dans celui de u_j . Il y a donc une contradiction.

3. Pour tous $i, j, i \neq j$, on peut distinguer u_i et v_j^2

- Si $u_i \notin S$ on peut les distinguer car $0 \in M(v_j^2)$ mais $0 \notin M(u_i)$
- Sinon, $u_i = u_1$. Alors, $1 \in M(u_i)$ donc soit $1 \notin M(v_j^2)$ alors on peut les distinguer. Soit $1 \in M(v_j^2)$ et alors $v_j^2 = v_1^2$ et $M(v_j^2) = \{\dots, d + 2\} \neq M(u_i) = \{\dots, d + 1\}$.

4. Pour tous $i, j, i \neq j$, on peut distinguer u_i et v_j^1 .

Supposons que $M(u_i) = M(v_j^1) = \{d_1, \dots, d_k\}$.

- Si v_j^1 atteint d_k en v_1^2 . Si u_i atteint d_k en v_1^2 aussi. Alors, v_j^1 et u_i sont des jumeaux par rapport à la partie gauche du graphe $\{u_1, \dots, u_j\} \cup \{v_1^1, v_1^2, \dots, v_{j-1}^1, v_{j-1}^2\}$. Donc la partie de l'ensemble S qui appartient à ce graphe donne les mêmes distances pour u_i et v_j^1 . Ils se distinguent donc par la partie droite car v_j^1 est à distance $4 + d - d_k$ du sommet v_{d+1}^2 alors que u_i est à distance $2 + d - d_k$ de ce sommet. Et tous les autres sommets restants sont à distance strictement inférieure. On différencie donc bien u_i et v_j^1 . Si u_i atteint d_k en v_{d+1}^2 , alors on adopte les mêmes arguments que pour prouver que u_i et u_j sont distinguables.
 - Si v_j^1 atteint d_k en v_{d+1}^2 , il s'agit d'un cas symétrique au précédent.
5. Pour tous $i, j, i \neq j$, on peut distinguer v_i^1 et v_j^2 . En effet, $M(v_i^1) = \{x, \dots\} \neq M(v_j^2) = \{0, \dots\}$ car $x \geq 1$
 6. Pour tous $i, j, i \neq j$, on peut distinguer v_i^1 et v_j^1 , on adopte les mêmes arguments que pour u_i et u_j .
 7. Pour tous $i, j, i \neq j$, on peut distinguer v_i^2 et v_j^2 , on adopte les mêmes arguments que pour u_i et u_j . \square

Théorème 5.6. *Toute chenille admet un ensemble résolvant.*

Preuve. Si l'on dispose d'une chenille G stable on peut appliquer la preuve précédente. Sinon, si G n'est pas stable alors on peut ajouter une ou deux feuilles pour obtenir G' la version stable de G . Pour retomber dans le cas précédent, on ajoute dans S , ensemble résolvant pour G les deux sommets aux extrémités qui ne sont pas les sommets fictifs comme l'illustre la Figure 8. Le Théorème 5.5 nous donne un ensemble résolvant S pour G' et d'après le Lemme 2.3 on peut en conclure que S est aussi résolvant pour G . \square



Figure 8: Les sommets et arêtes grises sont celles qui sont ajoutées artificiellement.

Nous allons construire un ensemble résolvant minimal et ainsi déterminer la dimension multi-ensemble pour chaque chenille dans le théorème suivant.

Définition 5.7. *Soit $G = (V, E)$ une chenille non-stable et $e \in \{1, d + 1\}$ tel que u_e est un 1-sommet. On dira que $G' = (V', E')$ est la réduction de G en e si $V' = V \setminus \{v_e^1\}$ et $E' = E \setminus \{\{u_e, v_e^1\}\}$.*

Si G n'est pas stable, on note $n_g + 2$ (resp. $n_d + 2$) le nombre de sommets à gauche du 2-sommet le plus à gauche (resp. le plus à droite) si il y a des sommets à gauche de ce sommet. On sait que ce nombre de sommets est au moins 2 d'après le Théorème 2.2. Si dans G , u_1 est un 2-sommet et u_{d+1} est un 1-sommet, on ne considèrera que n_d . Soit t le nombre de 2-sommets.

Théorème 5.8. *Soit G une chenille. Alors :*

1. Si G est stable et asymétrique, alors $dm(G) = t$.
2. Si G est stable et symétrique, alors $dm(G) = t + 1$.
3. Si une seule extrémité de G a deux feuilles et $t > 1$ et que la version stable de G est asymétrique, alors $dm(G) = t + 1$.
4. Si une seule extrémité de G a deux feuilles et $t > 1$ et que la version stable de G est symétrique et que $n_d > 0$, alors $dm(G) = t + 1$.
5. Si une seule extrémité de G a deux feuilles et $t > 1$ et que la version stable de G est symétrique et que $n_d = 0$, alors $dm(G) = t + 2$.

6. Si G n'a aucune extrémité avec deux feuilles et $t > 1$ et que la version stable de G est asymétrique alors $dm(G) = t + 2$.
7. Si G n'a aucune extrémité avec deux feuilles et $t > 1$ et que la version stable de G est symétrique et que $n_g = n_d > 0$, alors $dm(G) = t + 2$.
8. Si G n'a aucune extrémité avec deux feuilles et $t > 1$ et que la version stable de G est symétrique et que $n_g = n_d = 0$, alors $dm(G) = t + 3$.
9. Si G a une extrémité avec deux feuilles et $t = 1$ alors $dm(G) = 3$.
10. Si G n'a aucune extrémité avec deux feuilles et $t = 1$ et que la version stable de G est asymétrique alors $dm(G) = 3$.
11. Si G n'a aucune extrémité avec deux feuilles et $t = 1$ et que la version stable de G est symétrique et que $n_g = n_d > 0$, alors $dm(G) = 3$.
12. Si G n'a aucune extrémité avec deux feuilles et $t = 1$ et que la version stable de G est symétrique et que $n_g = n_d = 0$, alors $dm(G) = 4$.
13. Si $t = 0$ alors $dm(G) = 3$.

$dm(G)$	condition
t	G est stable et asymétrique
$t + 1$	G est stable et symétrique ou dans G , u_1 est un 2-sommet mais u_{d+1} est un 1-sommet et sa version stable est asymétrique ou sa version stable est symétrique et $n_d > 0$
$t + 2$	dans G , u_1 est un 2-sommet mais u_{d+1} est un 1-sommet et sa version stable est symétrique et $n_d = 0$ ou dans G , u_1 est un 1-sommet et sa version stable est asymétrique ou sa version stable est symétrique et $n_g = n_d > 0$
$t + 3$	dans G , u_1 est un 1-sommet et sa version stable est symétrique et $n_g = n_d = 0$
3	$t = 1$ et dans G , u_1 est un 2-sommet mais u_{d+1} est un 1-sommet ou $t = 1$ et dans G , u_1 est un 1-sommet et sa version stable est asymétrique ou $t = 1$ et sa version stable est symétrique et $n_g = n_d > 0$ ou $t = 0$
4	$t = 1$ et dans G , u_1 est un 1-sommet et sa version stable est symétrique et $n_g = n_d = 0$

Table 1: Tableau récapitulatif des valeurs de dm selon la forme de la chenille.

Preuve. On va prouver le théorème cas par cas.

1. Si la chenille est stable et n'est pas symétrique, alors il suffit de prendre les $|S| - 1$ feuilles.
Montrons que cette stratégie donne bien un ensemble résolvant; on sait déjà que cela donne une borne inférieure d'après le Théorème 2.2.
 - On voit facilement que l'on peut distinguer u_i de v_i^1 , u_i de v_i^2 et u_i de v_j^2 .
 - Pour distinguer u_i de u_j , on va à nouveau considérer les distances maximales. On peut supposer que u_i est à distance d_k de v_1^2 et u_j à distance d_k de v_{d+1}^2 . Soit l l'entier tel que u_{d+2-l} n'est pas un 2-sommet mais u_l en est un. On sait que $l < i$ car $l < \frac{d}{2} + 1$ et $i > \frac{d}{2} + 1$ car sinon, soit $u_i = u_j$ soit la distance maximale à u_i n'est pas atteinte en v_1^2 . Il y a deux cas :
 - (a) Si $1 < l \leq j$, notons d_{i_l} la distance entre u_i et v_l . Dans ce cas, si u_j a un sommet à distance d_{i_l} aussi, alors il ne peut pas avoir un rang supérieur à i car il serait alors v_{d+2-l}^2 qui n'existe pas. Il ne peut pas être strictement supérieur à j et inférieur à i car sinon, $j - i \geq d_{i_l}$ ce qui est impossible vu la position de v_l . Donc, ce sommet aurait pour rang $m < l$. Mais alors v_m^2 a un symétrique v_{d+2-m}^2 qui est à distance d_{i_l} de u_i . Donc dans tous les cas, u_i a un sommet à distance d_{i_l} de plus que u_j . On peut les distinguer.

- (b) Si $j < l < i$, on a le même genre de discours avec un sommet de rang $m \leq j$ et un symétrique qui existe.
- Pour distinguer v_i^1 de v_j^1 et v_i^2 de v_j^2 et v_i^2 de v_j^1 la preuve du Théorème 5.5 convient.
 - Pour distinguer v_j^1 et u_i , si u_i et v_j^1 atteignent d_k en v_1^2 (resp. v_{d+1}^2) le même argument que pour la preuve d'existence fonctionne. Supposons que u_i atteint d_k en v_{d+1}^2 et v_j^1 en v_1^2 . u_i n'a pas de feuille car sinon, $1 \in M(u_i)$ mais $1 \notin M(v_j^1)$. Donc le premier l qui casse la symétrie vérifie $l < i$. v_l^2 est à distance d_{i_l} de v_j^1 . Puis, on réutilise l'argument utilisé pour distinguer u_i et u_j .
2. Si la chenille est stable et symétrique, alors la stratégie de la preuve d'existence qui construit un ensemble résolvant S est optimale. Il faut prendre au moins l'une des deux feuilles si un sommet a deux feuilles. De plus, cela ne suffit pas pour distinguer u_1 et u_{d+1} . Il faut donc au moins un sommet en plus pour distinguer tout le monde et donc, $|S|$ est une borne inférieure. Or elle est atteinte, S est un ensemble résolvant minimal.
 3. On se place dans le cas où on a une seule extrémité avec deux feuilles. Et le chemin contient au moins deux 2-sommets. Ce cas est illustré par la Figure 9 et la Figure 10.

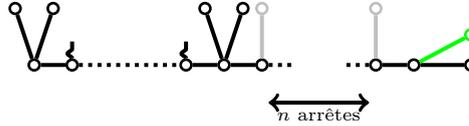


Figure 9: On travaille ici sur les graphes de cette famille, les sommets gris étant optionnels. L'arête et le sommet vert donnent la version stable

On distingue alors deux cas en fonction de la symétrie de la version stable du graphe précédent. Si la chenille stable n'est pas symétrique alors on a un ensemble résolvant optimal pour la chenille de base en prenant celui que l'on connaît pour la chenille stable. On sait qu'il faut un sommet dans la partie du chemin sans sommet à deux feuilles car sinon u_{D+1} et v_D^2 avec $D = \max\{i \mid u_i \text{ est un 2-sommet}\}$ (les sommets bleus de la Figure 10) ne sont pas distinguables. On a ainsi une borne inférieure et un ensemble résolvant de la même taille. C'est optimal.

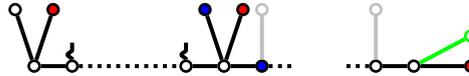


Figure 10: En rouge un ensemble résolvant optimal pour le graphe noir.

4. On considère le cas où on a une seule extrémité avec deux feuilles et la version stable de G est symétrique et $n_d > 0$. On considèrera le graphe G'' obtenu en prenant la version stable de la réduction de G . Ce cas est illustré par la Figure 11.

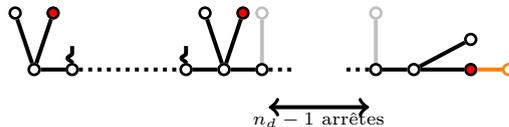


Figure 11: Nouveau graphe G'' en noir avec les sommets en gris optionnels et en orange l'arête et le sommet supprimés.

G'' n'est pas symétrique. Donc, on a un ensemble résolvant minimal pour le graphe G'' et donc aussi pour G si le sommet que l'on a supprimé en prenant la réduction peut être distingué des autres avec l'ensemble S . C'est le cas simplement en regardant la plus grande distance du multi-ensemble. Et il est optimal vu la cardinalité à nouveau.

5. On se place dans le cas où on a une seule extrémité avec deux feuilles et la version stable de G est symétrique et $n_d = 0$. On sait que l'on ne peut pas prendre u_d uniquement car sinon il ne serait pas distinguable de v_{d-1}^2 et on ne peut pas prendre uniquement u_{d+1} car sinon u_d ne serait pas distinguable de v_{d-1}^1 . Alors suivre la stratégie optimale sur la version stable qui est symétrique donne une stratégie optimale pour la chenille initiale.
6. On se place dans le cas où aucune extrémité n'a deux feuilles. Et le chemin contient au moins deux 2-sommets. Ce cas est illustré par la Figure 12.

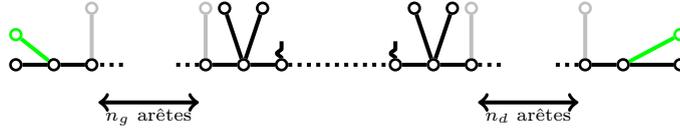


Figure 12: On travaille ici sur les graphes de cette famille (sans l'arête et le sommet vert), les sommets gris étant optionnels.

Ici on sait que pour distinguer tous les membres du chemin, il faut au moins prendre, en plus d'une patte sur deux parmi les 2-sommets, un sommet parmi les sommets des deux côtés. Distinguons les cas et voyons ce qui suffit. Si le graphe stable n'est pas symétrique, appliquer la stratégie optimale connue à ce graphe nous donne une stratégie optimale pour la chenille.

7. On se place dans le cas où aucune extrémité n'a deux feuilles et que le graphe stable est symétrique, à nouveau on suppose que $n_d \geq 1$ (on a $n_d = n_g$). On prend alors le graphe G'' obtenu en prenant la version stable de la réduction de G en $d + 1$. Alors le nouveau graphe n'est plus symétrique. On a un ensemble résolvant pour G'' et à nouveau rajouter le sommet orange se fait bien car c'est le seul qui a un sommet à distance d dans son multi-ensemble et le rajouter ne modifie pas les multi-ensembles des autres sommets. Donc cet ensemble est résolvant pour G . Et il est optimal pour les raisons habituelles.
8. On se place dans le cas où aucune extrémité n'a deux feuilles et que le graphe stable est symétrique, à nouveau on suppose que $n_d = n_g = 0$ alors pour le même type de raison que précédemment, il suffit de prendre la stratégie optimale pour le graphe stable.
9. On se place dans le cas où un seul sommet dans la colonne est un 2-sommet et que ce sommet est u_1 , on crée le graphe stable correspondant et on a alors sur le graphe stable et donc sur le chemin que l'on considère un ensemble résolvant de taille 3 or c'est le minimum pour un graphe qui n'est pas un chemin et par conséquent, il est optimal ici.
10. On se place dans le cas où un seul sommet dans la colonne est un 2-sommet et que ce sommet n'est pas u_1 et que le graphe stable n'est pas symétrique. À nouveau on considère le graphe stable associé et si il n'est pas symétrique on a un ensemble résolvant de taille 3.
11. On se place dans le cas où un seul sommet dans la colonne est un 2-sommet et que ce sommet n'est pas u_1 et que le graphe stable est symétrique et $n_d = n_g > 0$. Si la version stable est symétrique et $n_d = n_g > 0$ alors on utilise l'astuce de la réduction pour avoir un ensemble résolvant de taille 3.
12. On se place dans le cas où un seul sommet dans la colonne est un 2-sommet et que ce sommet n'est pas u_1 et que le graphe stable est symétrique et $n_d = n_g = 0$ alors on a le graphe suivant qui n'a des ensembles résolvants que de taille 4.



Figure 13: En rouge un ensemble résolvant minimal pour le cas pathologique.

13. On se place dans le cas où aucun sommet dans la colonne n'est un 2-sommet mais la chenille n'est pas simplement un chemin. On crée le graphe stable correspondant. Il est toujours symétrique. Alors, on a un ensemble résolvant pour notre chenille de taille 3, c'est minimal. \square

Voici les ensembles de tailles d'ensembles résolvants pour toutes les chenilles selon si la chenille elle-même, ou sa version stable si elle ne l'est pas, et sa version complétée est symétrique ou pas. S. signifie symétrique et A. signifie asymétrique. On rappelle que t est le nombre de 2-sommets et que d est la longueur de la colonne vertébrale et on appelle u le nombre de 1-sommets.

Définition 5.9. Soit $G = (V, E)$ une chenille qui admet des 1-sommets, on définit la chenille complétée par $G' = (V', E')$ avec $V' = V \cup \{v_i^2 | u_i \text{ 1-sommet dans } G\}$ et $E' = E \cup \{u_i, v_i^2\} | u_i \text{ 1-sommet dans } G\}$.

Tailles des ensembles résolvants			
	Stable	Complétée	Ensemble de tailles
Deux extrémités avec deux feuilles	S.	S.	$\{t + 1, \dots, t + d + u\}$
		A.	$\{t + 1, \dots, t + d + u + 1\}$
	A.	S.	$\{t, \dots, t + d + u\}$
		A.	$\{t, \dots, t + d + u + 1\}$
Une extrémité avec deux feuilles	S. $n_d \neq 0$	S.	$\{t + 1, \dots, t + d + u\}$
		A.	$\{t + 1, \dots, t + d + u + 1\}$
	A.	S.	$\{t, \dots, t + d + u\}$
		A.	$\{t + 1, \dots, t + d + u + 1\}$
	S. $n_d = 0$	S.	$\{t + 2, \dots, t + d + u\}$
		A.	$\{t + 2, \dots, t + d + u + 1\}$
Aucune extrémité avec deux feuilles	S. $\max(n_d, n_g) \neq 0$	S.	$\{t + 2, \dots, t + d + u\}$
		A.	$\{t + 2, \dots, t + d + u + 1\}$
	A.	S.	$\{t + 2, \dots, t + d + u\}$
		A.	$\{t + 2, \dots, t + d + u + 1\}$
	S. $n_d = n_g = 0$	S.	$\{t + 3, \dots, t + d + u\}$
		A.	$\{t + 3, \dots, t + d + u + 1\}$
Aucun 2-sommet	S. $\max(n_d, n_g) \neq 0$	S.	$\{3, \dots, d + u + 1\}$
		A.	$\{3, \dots, d + u + 2\}$
	A.	S.	$\{3, \dots, d + u + 2\}$
		A.	$\{3, \dots, d + u + 3\}$
	S. $n_d = n_g = 0$	S.	$\{4\}$
		A.	$\{4\}$

Corollaire 5.10. Il n'y a pas de gaps dans les chenilles.

Preuve. Preuve en annexe. \square

6. Araignées

Dans cette partie nous présentons nos résultats sur la classe de graphes que nous appelons araignées. Un arbre est une *araignée* s'il est composé d'un sommet c que l'on appelle *centre* et de chemins pendants à ce sommet que l'on appelle *branches*.

Pour une araignée de centre c , à $n \geq 3$ branches (B_1, B_2, \dots, B_n) , on note k_i le nombre de sommets de la branche B_i . On considèrera (B_1, B_2, \dots, B_n) trié selon les k_i croissants. On note u_j^i le sommet de la branche B_i à distance j de c . Si S est un ensemble résolvant pour l'araignée $(c, (B_1, \dots, B_n))$ alors on notera $S_i = B_i \cap S$. On confondra S_i et la séquence de bits $(s_j)_{j \in \{1, k_i\}}$ telle que $s_j = 1$ si et seulement si $u_j^i \in S$.

Ci dessous, on donne un algorithme, Existe_Araignée, qui prend en entrée une araignée et renvoie un ensemble résolvant pour cette araignée si il en existe et sinon renvoie une erreur. Dans cet algorithme, la séquence de bits de taille $m = |B_n|$, b sera traitée comme l'entier $x \geq 0$ qui vaut $\sum_{k=1}^{i_{\max}(b)} 2^k \times b[k]$. Autrement dit on prend l'écriture en binaire avec le bit de poids fort en

position m . On notera $i_{max}(b) = \max(i|b_i = 1)$ et pour tout I , ensemble de séquence de bits, $i_{max}(I) = \max(\{i_{max}(b), b \in I\})$.

Algorithme 1 : Existe_Araignée

Données : Araignée $A = (c, (B_1, \dots, B_n))$

Résultat : S un ensemble résolvant pour A

```

1   $S := \{\}$ 
2   $b := 0$ 
3  si  $n = 3$  et  $k_3 \geq 2$  alors
4  |    $S := \{u_{k_2}^2, u_{k_3-1}^3, u_{k_3}^3\}$ 
5  sinon
6  |   pour  $i = 1$  à  $n$  faire
7  |   |   si  $b < 2^m$  et  $k_i \geq i_{max}(b)$  alors
8  |   |   |   pour  $j = 1$  à  $i_{max}(b)$  faire
9  |   |   |   |   si  $b[j] = 1$  alors
10 |   |   |   |   |    $S \leftarrow u_j^i$ 
11 |   |   |   |   fin
12 |   |   |   fin
13 |   |    $b++$ 
14 |   sinon
15 |   |   retourner Il n'y a pas d'ensemble résolvant
16 |   fin
17 |   fin
18 fin
19 retourner  $S$ 

```

Théoreme 6.1. *Algorithme Existe_Araignée a une complexité en $O(|V|)$ où V est l'ensemble des sommets de l'araignée en entrée.*

Théoreme 6.2. *Algorithme Existe_Araignée renvoie un ensemble résolvant si et seulement si il existe un ensemble résolvant pour l'araignée fournie en entrée.*

Preuve. Montrons que dans le cas $n = 3$, l'algorithme est correct.

- Si $k_3 = 1$, alors au bout du troisième tour de boucle à la ligne 6, on aura $k_3 = 1$ mais $i_{max}(b) = 2$. On s'arrête donc en répondant qu'il n'y a pas d'ensemble résolvant et c'est correct car on ne vérifie pas la condition du Théoreme 2.2.
- Sinon, montrons que l'on peut bien distinguer tous les sommets deux à deux. On a $M(c) = \{k_2, k_3 - 1, k_3\}$, $\forall l_1 \in \llbracket 1, \dots, k_1 \rrbracket$, $M(u_{l_1}^1) = \{k_2 + l_1, k_3 - 1 + l_1, k_3 + l_1\}$, $\forall l_2 \in \llbracket 1, \dots, k_2 \rrbracket$, $M(u_{l_2}^2) = \{k_2 - l_2, k_3 - 1 + l_2, k_3 + l_2\}$ et $\forall l_3 \in \llbracket 1, \dots, k_3 \rrbracket$, $M(u_{l_3}^3) = \{k_2 + l_3, |k_3 - 1 - l_3|, k_3 + l_3\}$.
 - On peut distinguer $u_{l_1}^1$ de $u_{l_2}^2$. En effet, $\forall x \in M(u_{l_1}^1)$, $x > k_2 - l_2$.
 - On peut distinguer $u_{l_1}^1$ de $u_{l_3}^3$. En effet, $k_3 - 1 + l_1 > |k_3 - 1 - l_3|$ et $k_3 + l_1 > k_3 - l_3$.
 - On peut distinguer $u_{l_2}^2$ de $u_{l_3}^3$. En effet, il y a dans $M(u_{l_2}^2)$ deux éléments supérieurs à k_3 (qui sont $k_3 - 1 + l_2, k_3 + l_2$) et un seul au plus dans $M(u_{l_3}^3)$ (qui est $k_2 + l_3$).
 - On peut distinguer $u_{l_1}^1$ (et c en considérant c comme u_0^1) de $u_{l_1+r}^1$. En effet, $M(u_{l_1+r}^1) = M(u_{l_1}^1) + r$.
 - On peut distinguer $u_{l_2}^2$ (et c en considérant c comme u_0^2) de $u_{l_2+r}^2$. En effet, $M(u_{l_2+r}^2)$ a deux éléments strictement plus grands que $M(u_{l_1+r}^2)$ et un seul strictement plus petits.
 - On peut distinguer $u_{l_3}^3$ (et c en considérant c comme u_0^3) de $u_{l_3+r}^3$. En effet, soit $M(u_{l_3+r}^3)$ a un seul élément strictement plus grand que $M(u_{l_1+r}^3)$ et deux strictement plus petits. Soit $l_3 + r = k_3$ et $r = 1$. Alors $M(u_{l_3}^3) = \{k_2 + k_3 - 1, 0, 1\} \neq M(u_{l_3+1}^3) = \{k_2 + k_3, 1, 0\}$.

Remarque 6.3. *Cet ensemble résolvant est de taille minimale car il est de taille 3 et que le graphe considéré n'est pas un chemin.*

Montrons que si $n > 3$ l'algorithme est correct aussi.

- Si il existe k tel qu'il y a plus de $2^k + 1$ pattes avec k sommets ou moins, soit m le plus petit tel indice, alors si $m < l$ où l est l'indice à partir duquel $k_l = k_n$, à la m -ième itération de la boucle ligne 6, on aura $k_i < i_{max}(b)$. Et si on sort de la boucle pour cette raison, c'est bien que il existe k tel qu'il y a plus de $2^k + 1$ pattes avec k sommets ou moins. Sinon, si $m = n$, on sort de la boucle avec la condition b n'existe pas. Et si on sort avec cette condition, alors il existe k tel qu'il y a plus de $2^k + 1$ pattes avec k sommets ou moins.
- Sinon, si pour tout k , il y a strictement moins de $2^k + 1$ pattes avec k sommets ou moins et que par conséquent l'algorithme renvoie un ensemble de sommets S , alors montrons que cet ensemble de sommets est résolvant. Soient $u_{l_i}^i$ et $u_{l_j}^j$ deux sommets.

- Si $u_{l_i}^i$ et $u_{l_j}^j$ sont dans des branches différentes telles que $i_{max}(S_i) < i_{max}(\{S_i, i \in \llbracket 1, \dots, n \rrbracket\})$ et $i_{max}(S_j) < i_{max}(\{S_i, i \in \llbracket 1, \dots, n \rrbracket\})$ alors soit $max(M(u_{l_i}^i)) \neq max(M(u_{l_j}^j))$ alors $u_{l_i}^i$ et $u_{l_j}^j$ sont distinguables. Soit, $max(M(u_{l_i}^i)) = max(M(u_{l_j}^j))$ alors $l_i = l_j$. Alors, $u_{l_i}^i$ et $u_{l_j}^j$ sont jumeaux par rapport aux autres branches, cela revient à les distinguer sur le chemin constitué des deux branches. Or, le chemin constitué des deux branches ne permet pas de les distinguer si et seulement si $S_i = S_j$, ce qui n'est pas le cas.
- Si $u_{l_i}^i$ et $u_{l_j}^j$ sont dans des branches différentes telles que $i_{max}(S_i) = i_{max}(\{S_i, i \in \llbracket 1, \dots, n \rrbracket\})$ et $i_{max}(S_j) = i_{max}(\{S_i, i \in \llbracket 1, \dots, n \rrbracket\})$ alors le même argument que précédemment permet de conclure que $u_{l_i}^i$ et $u_{l_j}^j$ sont distinguables.
- Si $u_{l_i}^i$ est dans une branche telle que $i_{max}(S_i) = i_{max}(\{S_i, i \in \llbracket 1, \dots, n \rrbracket\})$ et $u_{l_j}^j$ est dans une branche telle que $i_{max}(S_j) \neq i_{max}(\{S_i, i \in \llbracket 1, \dots, n \rrbracket\})$ alors on regarde la plus grande distance à nouveau. Soit, $max(M(u_{l_i}^i)) \neq max(M(u_{l_j}^j))$ alors $u_{l_i}^i$ et $u_{l_j}^j$ sont distinguables. Soit $M = max(M(u_{l_i}^i)) = max(M(u_{l_j}^j))$ alors si il existe deux branches qui vérifient $i_{max}(S_i) = i_{max}(\{S_i, i \in \llbracket 1, \dots, n \rrbracket\})$ alors on retombe dans le cas $l_i = l_j$ et $M(u_{l_i}^i)[M] = 1 \neq M(u_{l_j}^j)[M] = 2$ donc $u_{l_i}^i$ et $u_{l_j}^j$ sont distinguables, sinon $l_i = l_j - 1$ vu la construction dans l'algorithme. Puis, si $u_{l_j}^j$ a $x > 1$ sommets à distance $i_{max}(\{S_i, i \in \llbracket 1, \dots, n \rrbracket\}) + l_j - 1$, alors $u_{l_i}^i$ a $x > 1$ sommets à distance $i_{max}(\{S_i, i \in \llbracket 1, \dots, n \rrbracket\}) + l_j = max(M(u_{l_i}^i))$ (car ils ne peuvent appartenir à B_i car comme c'est le seul à atteindre $i_{max}(S)$, on a $S_i = (0, \dots, 0, 1)$). Cela permet de distinguer les deux sommets. On a bien $x > 1$ car on a rempli la couche précédente, et que l'on a $n > 3$.
- Si $u_{l_i}^i$ et $u_{l_j}^j$ sont dans la même branche alors la distance maximale les distingue toujours. Sauf dans le cas où $u_{l_i}^i = c$ et c'est une branche telle que $i_{max}(S_i) = i_{max}(\{S_i, i \in \llbracket 1, \dots, n \rrbracket\})$ et qu'il n'y a qu'une seule telle branche. Mais alors il y a $2^{i_{max}(S_j)-1}$ sommets à distance strictement plus petite de c que de $u_{l_j}^j$ et il y a au plus $|S_j| = 1$ sommets à distance strictement plus grande de c que de $u_{l_j}^j$. Or $2^{x-1} = 1$ si et seulement si $x = 1$ cela n'est pas le cas ici. \square

Corollaire 6.4. *Une araignée admet un ensemble résolvant si et seulement si elle vérifie que pour tout n , il y a strictement moins de $2^n + 1$ pattes avec n sommets ou moins.*

Nous allons présenter un algorithme, Algorithme (+1)-Araignée, qui fournit une stratégie quasi optimale pour les araignées.

Théoreme 6.5. *Si $\forall i \neq j, S_i \neq S_j$ et il existe $i, j, i \neq j, i_{max}(S_i) = i_{max}(S_j) = i_{max}(S)$ alors S est résolvant.*

Preuve. Preuve en annexe. \square

Remarque 6.6. *On sait que si S est résolvant, on n'a pas forcément pour tous $i \neq j, S_i \neq S_j$ et il existe $i, j, i \neq j, i_{max}(S_i) = i_{max}(S_j) = i_{max}(S)$.*

Preuve. L'araignée 1, 1, 2, 3, l'ensemble $S = \{u_1^2, u_2^3, u_3^4\}$ est résolvant. \square

La remarque suivante contredit une intuition que nous avons qui est que un ensemble S est résolvant pour une araignée si et seulement si pour tous i, j distincts, $S_i \neq S_j$. Nous espérons que ce résultat nous fournirait un algorithme exact pour les araignées.

Remarque 6.7. *On sait que l'on n'a pas $\forall i \neq j S_i \neq S_j$ ssi S est résolvant.*

Preuve. Dans l'araignée 1, 1, 2, 3, 4, $S = \{u_1^2, u_2^3, u_3^4, u_4^5\}$ n'est pas résolvant. \square

L'algorithme suivant, (+1)-Araignée, renvoie, étant donné une araignée G , un ensemble résolvant de taille au plus $1 + dm(G)$. Informellement, cet algorithme prend dans chaque branche le nombre minimal d'éléments à mettre dans l'ensemble S tels que $\forall i \neq j, S_i \neq S_j$. Si après avoir traité chaque branche, il n'existe pas d'indices i et j tels que $i \neq j, i_{max}(S_i) = i_{max}(S_j) = i_{max}(S)$, alors on ajoute avec un appel à l'algorithme Ajoute_sommet un sommet à l'ensemble S de sorte à ce qu'il devienne résolvant.

Dans ce qui suit, on considère l'ordre suivant sur les séquences de m bits : $\forall b_1, b_2 \in \{0, 1\}^m, b_1 < b_2$ si et seulement si $\sum_{i=1}^m b_{1i} < \sum_{i=1}^m b_{2i}$ ou $\sum_{i=1}^m b_{1i} = \sum_{i=1}^m b_{2i}$ et $\exists i, \forall j > i, b_{1j} = b_{2j}$ et $b_{1i} < b_{2i}$.

Algorithme 2 : (+1)-Araignée.

Données : Araignée $A = (c, (B_1, \dots, B_n))$

Résultat : S un ensemble résolvant pour A de taille au plus $dm(A) + 1$

```

1  $S := \{\}$ 
2  $b := (0, \dots, 0)$ 
3  $Vu := \{\}$ 
4 pour  $i = 1$  à  $n$  faire
5   | si  $b < 2^m$  et  $k_i \geq i_{max}(b)$  alors
6   |   | pour  $j = 1$  à  $i_{max}(b)$  faire
7   |   |   | si  $b[j] = 1$  alors
8   |   |   |   |  $S \leftarrow u_j^i$ 
9   |   |   |   | fin
10  |   |   | fin
11  |   | si  $i < n$  alors
12  |   |   |  $b = \text{Suivant}(|B_{i+1}|, Vu)$ 
13  |   |   | fin
14  | sinon
15  |   | retourner Il n'y a pas d'ensemble résolvant
16  | fin
17 fin
18 si  $\exists! i, i_{max}(S) = i_{max}(B_i)$  alors
19 |  $S = \text{Ajoute\_sommet}(A, S)$ 
20 fin
21 retourner  $S$ 

```

Où l'algorithme Suivant(n, T) renvoie la plus petite séquence de bits b qui n'est pas dans T et telle que $i_{max}(b) \leq n$. Et l'algorithme Ajoute_sommet est l'algorithme décrit ci-dessous.

Algorithme 3 : Ajoute_sommet.

Données : Araignée $A = (c, (B_1, \dots, B_n))$ et ensemble de sommets S obtenu par la procédure de jusqu'à la ligne 17 de l'Algorithme (+1)-Araignée et tel que $\exists! i, i_{max}(S) = i_{max}(B_i)$

Résultat : S un ensemble résolvant pour A de taille au plus $dm(A) + 1$

```
1 si  $i_{max}(B_n) \leq |B_{n-1}|$  et  $i_{max}(S) = i_{max}(B_n)$  alors
2   |  $S \leftarrow u_{i_{max}(S)}^{n-1}$ 
3 sinon
4   | si  $i_{max}(S) > i_{max}(B_n)$  alors
5     |  $S \leftarrow u_{i_{max}(S)}^n$ 
6     | sinon
7       | si  $\nexists i \neq j, i_{max}(S) - 1 = i_{max}(B_i) = i_{max}(B_j)$  alors
8         |  $S = S \setminus u_{i_{max}(S)}^n$ 
9         |  $S \leftarrow u_{i_{max}(S)-1}^n$ 
10        |  $S \leftarrow u_{i_{max}(S)-2}^n$ 
11        | fin
12    | fin
13 fin
14 retourner  $S$ 
```

Lemme 6.8. Soit $A = (c, (B_1, \dots, B_n))$ une araignée et S un ensemble de sommets obtenu par la procédure de l'Algorithme (+1)-Araignée qui finit en ligne 17 et tel que $\exists! i, i_{max}(S) = i_{max}(B_i)$, alors l'ensemble retourné par un appel à $Ajoute_sommet(A, S)$ est résolvant.

Preuve. Il y a plusieurs cas à considérer.

- Si $i_{max}(B_n) \leq |B_{n-1}|$ et $i_{max}(S) = i_{max}(B_n)$, alors l'ensemble $S \cup \{u_{i_{max}(S)}^{n-1}\}$ est bien résolvant d'après le Théorème 6.5.
- Si $i_{max}(S) > i_{max}(B_n)$, alors l'ensemble $S \cup \{u_{i_{max}(S)}^n\}$ est bien résolvant d'après le Théorème 6.5.
- Si $i_{max}(S) = i_{max}(B_n)$, on sait que vu l'ordre dans lequel on prend les sommets dans l'Algorithme (+1)-Araignée, $S_n = \{u_{i_{max}(S)}^n\}$ et si il n'existe pas $i \neq j, i_{max}(S) - 1 = i_{max}(B_i) = i_{max}(B_j)$, alors il n'existe pas de branche à laquelle on a associé la séquence de bits b telle que $b_{i_{max}(S)-1} = 1$ et $b_{i_{max}(S)-2} = 1$ et $\forall i \notin \{i_{max}(S) - 1, i_{max}(S) - 2\}, b_i = 0$. On décide alors de poser $S_n = \{u_{i_{max}(S)-1}^n, u_{i_{max}(S)-2}^n\}$. Alors, on a décrémenté $i_{max}(S)$ de 1 or, vu l'ordre dans lequel on prend les sommets dans l'Algorithme (+1)-Araignée, il existait déjà une branche B' telle que $i_{max}(B') = i_{max}(S) - 1$, il y en a donc maintenant deux et $\forall i \neq j, S_i \neq S_j$. Donc, l'ensemble ainsi obtenu est bien résolvant d'après le Théorème 6.5.
- Si $i_{max}(S) = i_{max}(B_n)$ et $\exists i \neq j, i_{max}(S) - 1 = i_{max}(B_i) = i_{max}(B_j)$, à nouveau comme $S_n = \{u_{i_{max}(S)}^n\}$ on sait que $i \neq n$ et $j \neq n$. Montrons que l'ensemble S est alors résolvant en reprenant la preuve du Théorème 6.5. Le cas à préciser est le cas où $u_{l_i}^i$ est dans la branche B_n et $u_{l_j}^j$ est dans une branche telle que $i_{max}(S_j) \neq i_{max}(\{S_i, i \in \llbracket 1, \dots, n \rrbracket\})$ et $\exists i \neq j, i_{max}(S) - 1 = i_{max}(B_i) = i_{max}(B_j)$. Alors, $u_{l_i}^i$ a $p > 1$ sommets à distance $i_{max}(S) - 1 + l_i = \max(M(u_{l_i}^i))$, or, $u_{l_j}^j$ a un seul sommet à distance $\max(M(u_{l_j}^j))$. Donc, $u_{l_i}^i$ et $u_{l_j}^j$ sont distinguables et S est résolvant. \square

Théorème 6.9. Soit $A = (c, (B_1, \dots, B_n))$ une araignée, l'Algorithme (+1)-Araignée appelé sur A renvoie un ensemble résolvant de taille au plus $dm(A) + 1$ avec une complexité $O(|V|)$ où V est l'ensemble des sommet de A .

7. Unions de chemins

Dans cette section nous allons nous intéresser à des graphes non connexes, les unions d'au moins deux chemins. Nous pensons en premier que cette catégorie de graphes nous aiderait à résoudre le problème sur les araignées. Mais même découvrir quelles unions de chemins admettent une dimension multi-ensemble finie n'est pas facile. Nous allons donner dans cette partie quelques idées que nous avons explorées.

Nous noterons les unions de n chemins $\{P^1, \dots, P^n\}$ triés par taille croissante avec $\forall i, P^i = (u_1^i, \dots, u_{k_i}^i)$ le i^{eme} chemin de l'union.

Une première observation est que pour qu'un ensemble S soit résolvant pour une union de chemins $\{P^1, \dots, P^n\}$, il faut que $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, S \cap P^i$ soit résolvant pour P^i . Mais nous observons facilement que ce n'est pas suffisant comme nous le montre la Figure 14.

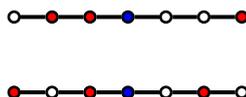


Figure 14: En rouge un ensemble résolvant pour chaque chemin qui n'est pas résolvant pour l'union. En bleu les sommets indistinguables.

Théorème 7.1. *Soit $\{P^1, \dots, P^n\}$ une union de chemins triés par taille croissante. Si $\forall i > 2, |P^i| \geq i + 1$ alors l'union de chemins admet un ensemble résolvant de taille $\frac{n(n+1)}{2} - 2$.*

Preuve. Posons $S = \{u_1^2\} \cup \bigcup_{i=3}^n \{u_1^i, \dots, u_{i-1}^i, u_{k_i}^i\}$. S est un ensemble résolvant pour cet ensemble de chemins. Soient u, v deux sommets de l'union de chemins, montrons qu'ils sont distinguables.

- Soit $M(u)[+\infty] \neq M(v)[+\infty]$ et donc u et v sont distinguables.
- Soit $M(u)[+\infty] = M(v)[+\infty]$ et alors u et v appartiennent au même chemin P^i et alors comme l'ensemble $S \cap P^i$ est résolvant pour P^i d'après le Théorème 3.3, u et v sont distinguables. \square

Remarque 7.2. *Ce n'est pas une équivalence. Par exemple, l'union de cinq chemins de taille 5 admet comme ensemble résolvant $\{u_1^2, u_1^3, u_2^3, u_3^3, u_1^4, u_2^4, u_4^4, u_1^5, u_2^5, u_3^5, u_5^5\}$.*

La question principale que nous nous sommes posés au sujet des unions de chemins est la suivante :

Question 7.3. *Quand peut-on prendre dans S ensemble résolvant de l'union de chemins $\{P^1, \dots, P^n\}$ autant de sommets de P^i que de sommets de P^j ?*

Comme nous l'avons vu dans la Figure 14, dans certains cas les deux ensembles, même s'ils sont différents et ne sont pas des translations l'un de l'autre, sont en conflit. C'est-à-dire qu'il existe deux sommets, un sommet sur chaque chemin, qui ont le même multi-ensemble associé.

Nous pouvons visualiser cette notion de conflit en imaginant un repliage qui est juste une autre représentation d'un multi-ensemble.

Définition 7.4. *Un repliage d'un chemin P muni de son ensemble résolvant S en un sommet u_i du chemin est un vecteur $R(P, S, u_i)$ tel que $\forall k \geq 0, R(P, S, u_i)_k = 0$ si $u_{i+k} \notin S$ (on considère que c'est le cas si u_{i+k} n'existe pas) et $u_{i-k} \notin S, \forall k \geq 0, R(P, S, u_i)_k = 1$ si $u_{i+k} \in S$ ou $u_{i-k} \in S$ et $\forall k \geq 0, R(P, S, u_i)_k = 2$ si $u_{i+k} \in S$ et $u_{i-k} \in S$.*

Deux ensembles sont en conflit s'il existe un vecteur qui est un repliage des deux chemins. Un exemple est donné dans la Figure 15.

Malheureusement cette façon de visualiser ne nous a pas aidé à résoudre le problème mais il est possible que la notion de repliage soit celle qui permettra de le comprendre.

Des pistes d'algorithmes polynomiaux nous ont conduits au résultat suivant

Lemme 7.5. *Un chemin muni d'un ensemble résolvant ne peut pas avoir deux repliages égaux.*

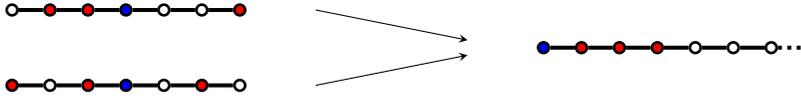


Figure 15: Les deux ensembles en conflit se replient vers un même vecteur.

Preuve. Si un chemin muni d'un ensemble résolvant S , soient u_{i_1} et u_{i_k} respectivement le premier et le dernier sommet du chemin de S . Soient u_i et u_j avec $i \leq j$ deux sommets tels que $r_i = R(P, S, u_i) = r_j = R(P, S, u_j)$ et soient $i_{max}^i = \max(\{l \text{ tel que } r_{i_l} > 0\})$ et $i_{max}^j = \max(\{l \text{ tel que } r_{j_l} > 0\})$. Montrons que $u_i = u_j$.

- Soit $i \leq i_1$ et $j \leq i_1$ (resp. $i \geq i_k$ et $j \geq i_k$) alors forcément pour que $i_{max}^i = i_{max}^j$ on a $i = j$.
- Soit $i \leq i_1$ et $j \geq i_k$ si $r_i = r_j$ alors S est un palindrome. C'est interdit car S est résolvant.
- Soit $i \leq i_1$ et $i_1 < j < i_k$ (resp. $i_1 < i < i_k$ et $i_k < j$) alors $i_{max}^j < i_{max}^i$. C'est interdit car $r_i = r_j$.
- Soit $i_1 < i < i_k$ et $1 < j < i_k$ alors si i_{max}^i et i_{max}^j sont atteints par u_{i_1} et u_{i_k} tous les deux, $i = j = \frac{k+1}{2}$. Si i_{max}^i et i_{max}^j tous les deux atteints par u_{i_1} (resp. u_{i_k}) alors vu qu'il n'y a qu'un seul point à distance $i_{max}^i = i_{max}^j$ de u_{i_1} (resp. u_{i_k}) dans le segment considéré on a $i = j$. Si i_{max}^i et i_{max}^j sont atteints respectivement par u_{i_k} et u_{i_1} , alors on peut considérer le problème avec $S = S \setminus \{u_{i_1}, u_{i_k}\}$ car $d(u_i, u_{i_k}) = i_{max}^i = i_{max}^j = d(u_j, u_{i_1})$ et $d(u_i, u_{i_1}) = i_k - i_1 - i_{max}^i = i_k - i_1 - i_{max}^j = d(u_j, u_{i_k})$. À partir d'un certain moment, on rentrera dans l'un des cas précédents déjà résolus. \square

Corollaire 7.6. *Tout chemin de taille n muni d'un ensemble résolvant a exactement n repliages distincts.*

8. Lien avec les automorphismes de graphe

Dans cette section nous allons présenter le lien que nous avons pu faire entre les automorphismes de graphes et le problème de la dimension multi-ensemble. Comme nous avons pu l'observer avec les chemins et les chenilles notamment, il semblerait que la dimension multi-ensemble d'un graphe soit relié à une certaine notion de symétrie. En effet, il semblerait que l'on veuille "casser les symétries" à l'aide de l'ensemble résolvant, ce qui n'est possible que si le graphe n'est pas "trop" symétrique, pour une certaine notion de symétrie.

Nous rappelons la définition d'un automorphisme de graphe.

Définition 8.1. *Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un automorphisme de G est une application $\phi : V \rightarrow V$ telle que pour tout $u, v \in V$, si $\{u, v\} \in E$, alors $\{\phi(u), \phi(v)\} \in E$.*

La problématique principale de cette partie est réfléchir sur la question suivante :

Question 8.2. *A-t-on pour G un arbre quelconque, $dm(G) < +\infty$ si et seulement si $\exists S \subseteq V$ tel que $\forall \phi$ automorphisme de G tel que $\phi(S) = S$ alors $\phi = Id$?*

Un sens de cette équivalence est toujours vrai.

Théoreme 8.3. *Soit G un graphe tel que $dm(G) < +\infty$. Si il existe $S \subseteq V$ tel que $\forall \phi$ automorphisme de G tel que $\phi(S) = S$ alors $\phi = Id$.*

Preuve. Soit S un ensemble résolvant de $G = (V, E)$. Montrons que pour tout automorphisme ϕ de G tel que $\phi(S) = S$ alors $\phi = Id$. Supposons qu'il existe $\phi \neq Id$ un automorphisme de G tel que $\phi(S) = S$. Alors, il existe $u \in V$ tel que $\phi(u) \neq u$. Or, $\forall v, d(\phi(u), \phi(v)) = d(u, v)$ car ϕ est un automorphisme. Or S est fixé par ϕ . Donc, $M(u) = M(\phi(u))$, il y a contradiction avec le fait que S est résolvant. \square

Remarque 8.4. *Il n'y a pas équivalence. Le graphe de la Figure 16 n'admet que l'identité comme automorphisme mais n'a pas d'ensemble résolvant.*

Nous avons aussi trouvé un arbre muni d'un ensemble qui est un contre-exemple à la Question 8.2. L'araignée de la Figure 17 n'admet pas d'ensemble résolvant d'après le Corollaire 6.4.

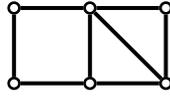


Figure 16: Un graphe dont le seul automorphisme est Id et dont la dimension multi-ensemble est infinie.

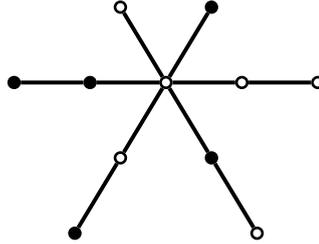


Figure 17: Un arbre muni d'un ensemble S en noir dont le seul automorphisme qui fixe S est Id et dont la dimension multi-ensemble est infinie.

9. Conclusion

En conclusion, lors de ce stage j'ai pu approfondir la connaissance générale que l'on a du problème de la dimension multi-ensemble dans les chemins, les cycles et les chenilles en traitant le problème dans son entièreté sur ces classes. J'ai prouvé dans quels cas les araignées ont une dimension multi-ensemble finie et ai donné un algorithme polynomial qui donne une $(+1)$ -approximation de la dimension multi-ensemble d'une araignée. De plus, j'ai pu corriger des intuitions que nous avons et répondre à des questions que nous nous étions posées au sujet des unions de chemins et du lien avec les automorphismes de graphes en donnant des contre-exemples.

Dans mon travail, plusieurs méthodes me semblent prometteuses pour la résolution du problème dans des classes de graphes plus grandes. Notamment, le Corollaire 2.4 avec l'étude des chenilles pourrait permettre de résoudre le problème sur la classe des graphes homards, qui est une classe de graphe construite à partir des chenilles auxquelles on ajoute des feuilles. Une étude des gaps dans les araignées sera aussi facilitée par le Théorème 6.5. Il me semble aussi que l'idée de repliage évoquée dans la partie sur les unions de chemins permet une visualisation plus facile du problème et qu'elle pourrait être étendue à d'autres classes de graphes que les chemins. Je pense aussi que bien que notre intuition sur le lien avec les automorphismes soit fautive, l'étude des automorphismes reste une bonne piste pour une résolution plus complète du problème.

Voici quelques questions qui nous semblent intéressantes et restent ouvertes suite à ce travail.

Question 9.1. *Existe-t-il un algorithme polynomial qui renvoie la dimension multi-ensemble d'une araignée ?*

Question 9.2. *Le problème est-il NP-complet ? Et dans les arbres ? Et dans les unions de chemins ?*

Question 9.3. *Existe-t-il un critère ou un algorithme polynomial qui permette de décider si un graphe admet un ensemble résolvant ou non ?*

Références

- [1] Julien Bensmail, Dorian Mazauric, Fionn Mc Inerney, Nicolas Nisse, and Stéphane Pérennes. Sequential Metric Dimension. Research report, Inria, 2018.
- [2] Julien Bensmail, Fionn Mc Inerney, and Nicolas Nisse. Metric Dimension: from Graphs to Oriented Graphs. Research report, Inria & Université Cote d'Azur, CNRS, I3S, Sophia Antipolis, France, November 2018.
- [3] Josep Díaz, Olli Pottonen, Maria J. Serna, and Erik Jan van Leeuwen. Complexity of metric dimension on planar graphs. *J. Comput. Syst. Sci.*, 83(1):132–158, 2017.

- [4] Florent Foucaud, George B. Mertzios, Reza Naserasr, Aline Parreau, and Petru Valicov. Identification, location-domination and metric dimension on interval and permutation graphs. II. algorithms and complexity. *Algorithmica*, 78(3):914–944, 2017.
- [5] Reynaldo Gil-Pons, Yunior Ramírez-Cruz, Rolando Trujillo-Rasua, and Ismael Gonzalez Yero. Distance-based vertex identification in graphs: the outer multiset dimension. 02 2019.
- [6] Frank Harary and Robert A. Melter. On the metric dimension of a graph. *Ars Combinatoria*, 2:191–195, 1976.
- [7] Varanoot Khemmani and Supachoke Isariyapalakul. The multiresolving sets of graphs with prescribed multisimilar equivalence classes. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2018:1–6, 08 2018.
- [8] Samir Khuller, Balaji Raghavachari, and Azriel Rosenfeld. Landmarks in graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 70(3):217 – 229, 1996.
- [9] Suzanne M. Seager. Locating a robber on a graph. *Discrete Mathematics*, 312(22):3265–3269, 2012.
- [10] Rinovia Simanjuntak, Tomas Vetrík, and Presli Bintang Mulia. The multiset dimension of graphs. 11 2017.
- [11] Peter J. Slater. Leaves of trees. pages 549–559. *Congressus Numerantium*, No. XIV, 1975.

10. Annexe

Dans cette annexe se trouvent deux figures auxquelles je fais référence dans l'introduction qui ne me semblent pas aider à la compréhension et deux preuves trop similaires à d'autres preuves du rapport pour qu'elles occupent de la place dans la partie principale.

10.1. Introduction

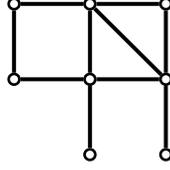


Figure 18: Ce graphe présente deux gaps de taille 1 en 4 et en 6.

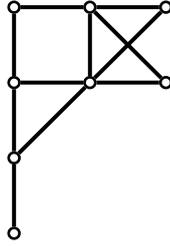


Figure 19: Ce graphe présente un gap de taille 2 en 4.

10.2. Chenilles

Preuve du tableau des ensembles de tailles d'ensembles résolvents. À nouveau on fait une distinction de cas.

- Dans le cas où les extrémités ont deux feuilles et qu'aucun sommet n'a une seule feuille, on peut alors construire un ensemble résolvent à partir de l'ensemble résolvent de base (celui de la preuve d'existence). On initialise S à l'ensemble de base. Puis, pour i allant de 0 à $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor - 1$, on pose $S := S \cup \{u_{d-i}\}$ (1) et $S := S \cup \{u_{i+2}\}$ (2). Montrons que pour tout i , après (1) (resp. (2)) S est toujours un ensemble résolvent. On a alors $S = \{v_k^2 | \forall k \text{ tels que } v_k^2 \text{ existe}\} \cup \{u_1, \dots, u_{i+2}, u_{d-i+1}, \dots, u_d\}$ (resp. $S = \{v_k^2 | \forall k \text{ tels que } v_k^2 \text{ existe}\} \cup \{u_1, \dots, u_{i+2}, u_{d-i}, \dots, u_d\}$).
 - Pour distinguer v_k^1 de u_k et v_k^2 de u_k , on a toujours $M(v_k^1) = M(u_k) + 1 = \{d(u_k, s) + 1 | \forall s \in S\}$ et $M(v_k^2) = (M(u_k) \setminus \{1\} + 1) \cup \{0\}$.
 - Pour distinguer u_k de u_l , on a plusieurs cas :
 - * Soit $u_k \in S$ et $u_l \notin S$, alors on les distingue car $0 \in M(u_k)$ et $0 \notin M(u_l)$.
 - * Soit $u_k \notin S$ et $u_l \notin S$ avec $l \neq k$ ou $u_k \in S$ et $u_l \in S$, soit $\max(M(u_k)) \neq \max(M(u_l))$, alors u_k et u_l sont distinguables, soit on a $M(u_k)[\max(M(u_k)) - 1] \neq M(u_l)[\max(M(u_k)) - 1]$.
 - Pour distinguer u_k de v_l^2 , on a plusieurs cas :
 - * Soit $u_k \notin S$, alors on les distingue car $0 \notin M(u_k)$ et $0 \in M(v_l^2)$.
 - * Soit $u_k \in S$, alors soit $1 \notin M(v_l^2)$ et alors u_k et v_l^2 sont distinguables car tout sommet de S sur la colonne vertébrale à un voisin dans S . Soit $1 \in M(v_l^2)$ et alors $l \in \{1, \dots, i+2, d-i+1, \dots, d\}$ (resp. $l \in \{1, \dots, i+2, d-i, \dots, d\}$) car ce soit les seuls indices tel que v_l^2 a un voisin dans S . On distingue alors deux nouveaux cas :
 - Soit $u_k \in \{u_1, \dots, u_{i+1}, u_{d-i+2}, \dots, u_d\}$ (resp. $u_k \in \{u_1, \dots, u_{i+1}, u_{d-i+1}, \dots, u_d\}$). On a alors $M(u_i) = \{0, 1, 1, \dots\} \neq M(v_j^2) = \{0, 1, x, \dots\}$ car $x > 1$.

- Soit $u_k \in \{u_{i+2}, u_{d-i+1}\}$ (resp. $u_k \in \{u_{i+2}, u_{d-i}\}$). On a alors $\max(M(u_k)) < \max(M(v_l^2))$
- Pour distinguer u_k de v_l^1 , on a plusieurs cas :
 - * Si $\max(u_k) \neq \max(v_l^1)$, alors u_k et v_l^1 sont bien distinguables.
 - * Sinon, soit ils sont à distance maximale du même sommet, disons v_l^2 , alors ils sont jumeaux par rapport à un côté du graphe entre u_1 et u_l . Mais alors $M(v_l^2)[d(v_l^2, v_{d+1}^2)] > M(u_k)[d(v_l^2, v_{d+1}^2)]$, ce qui les distingue. Sinon, la démonstration est similaire au cas où il faut distinguer u_k, u_l .
- Pour distinguer v_k^1 de v_l^1 et v_k^2 de v_l^2 , la démonstration est similaire au cas où il faut distinguer u_k, u_l .
- Pour distinguer v_k^1 de v_l^2 , on a $0 \in M(v_l^2)$ mais $0 \notin M(v_k^1)$.

Si la chenille n'est pas symétrique on peut ajouter u_{d+1} à S :

- Pour distinguer u_k de v_k^1 et u_k de v_k^2 et u_k de u_l et v_k^1 de v_l^1 et v_k^2 de v_l^2 et v_k^2 de v_l^1 la preuve est similaire à celle pour l'ensemble résolvant optimal.
 - Pour distinguer u_k de v_l^2 et u_k de v_l^1 , on remarque que $M(u_k) = \{0, 1, 1, x_k, \dots\}$, $M(v_l^2) = \{0, 1, x_{l_2}, \dots\}$ et $M(v_l^1) = \{1, x_{l_2}, \dots\}$ avec $x_k \geq 1$, $x_{l_1} > 1$ et $x_{l_2} > 1$.
- Dans les autres cas où aucun sommet n'a une seule feuille, le cas précédent auquel on applique le Lemme 2.3 nous donne les résultats.
 - Dans le cas général avec des sommets a une feuille. Pour tout sommet à une feuille, par exemple u_r qui a une feuille v_r , on peut ajouter une feuille v' à u_r . Un ensemble résolvant sur ce nouveau graphe est un ensemble résolvant sur le graphe initial si l'on ne prend pas la feuille d'après le Lemme 2.3. Cela couplé aux cas précédents nous donne les résultats du tableau.
- On vérifie facilement que dans chaque cas, la taille de l'ensemble obtenue est maximale. \square

10.3. Araignées

Théorème 10.1. *Si $\forall i \neq j, S_i \neq S_j$ et $\exists i, j, i \neq j, i_{\max}(S_i) = i_{\max}(S_j) = i_{\max}(S)$ alors S est résolvant.*

Preuve. Soient $u_{l_i}^i$ et $u_{l_j}^j$ deux sommets distincts de l'araignée. Montrons qu'ils sont distinguables

- Si $u_{l_i}^i$ et $u_{l_j}^j$ sont dans des branches différentes telles que $i_{\max}(S_i) < i_{\max}(\{S_i, i \in \llbracket 1, \dots, n \rrbracket\})$ et $i_{\max}(S_j) < i_{\max}(\{S_i, i \in \llbracket 1, \dots, n \rrbracket\})$ alors soit $\max(M(u_{l_i}^i)) \neq \max(M(u_{l_j}^j))$ alors $u_{l_i}^i$ et $u_{l_j}^j$ sont distinguables. Soit, $\max(M(u_{l_i}^i)) = \max(M(u_{l_j}^j))$ alors $l_i = l_j$. Alors, $u_{l_i}^i$ et $u_{l_j}^j$ sont jumeaux par rapport aux autres branches, cela revient à les distinguer sur le chemin constitué des deux branches. Or, le chemin constitué des deux branches ne permet pas de les distinguer si et seulement si $S_i = S_j$.
- Si $u_{l_i}^i$ et $u_{l_j}^j$ sont dans des branches différentes telles que $i_{\max}(S_i) = i_{\max}(\{S_i, i \in \llbracket 1, \dots, n \rrbracket\})$ et $i_{\max}(S_j) = i_{\max}(\{S_i, i \in \llbracket 1, \dots, n \rrbracket\})$ alors le même argument que précédemment permet de conclure que $u_{l_i}^i$ et $u_{l_j}^j$ sont distinguables.
- Si $u_{l_i}^i$ est dans une branche telle que $i_{\max}(S_i) = i_{\max}(\{S_i, i \in \llbracket 1, \dots, n \rrbracket\})$ et $u_{l_j}^j$ est dans une branche telle que $i_{\max}(S_j) \neq i_{\max}(\{S_i, i \in \llbracket 1, \dots, n \rrbracket\})$ alors on regarde la plus grande distance à nouveau. Soit, $\max(M(u_{l_i}^i)) \neq \max(M(u_{l_j}^j))$ alors $u_{l_i}^i$ et $u_{l_j}^j$ sont distinguables. Soit $\max(M(u_{l_i}^i)) = \max(M(u_{l_j}^j))$ alors comme il existe deux branches qui vérifient $i_{\max}(S_i) = i_{\max}(\{S_i, i \in \llbracket 1, \dots, n \rrbracket\})$ alors on retombe dans le cas $l_i = l_j$ et on sait qu'ils sont distinguables car $S_i \neq S_j$.
- Si $u_{l_i}^i$ et $u_{l_j}^j$ sont dans la même branche, alors la distance maximale les distingue toujours. \square

10.4. Contexte institutionnel et social du stage

Dans cette sous partie je vais présenter le laboratoire et l'équipe avec laquelle j'ai pu interagir lors de ce stage. Je détaillerai le déroulement du stage et ferai un bilan de mon travail au sein de l'équipe.

Ce stage s'est déroulé à l'INRIA Sophia Antipolis au sein de l'équipe COATI. Cette équipe est composée de membres de l'INRIA et de I3S un laboratoire CNRS voisin. J'ai eu la chance d'avoir pour encadrants Nicolas Nisse et Julien Bensmail qui m'ont permis de m'intégrer au sein de cette équipe et de travailler avec plaisir. Au sein de l'équipe j'ai pu échanger avec Christelle Caillouet, David Coubert, Frédéric Giroire, Frédéric Havet, Joanna Moulhierac, Emanuele Natale, Michel Syska et Stéphane Pérennes avec qui j'ai notamment beaucoup discuté des unions de chemins. J'ai aussi eu le plaisir de côtoyer des doctorants et d'autres stagiaires de l'équipe avec qui j'ai pu échanger au sujet de mon stage et de leur thèse ou stage. En plus de m'avoir beaucoup appris au sujet de la théorie des graphes et de l'algorithmique, ce stage m'a permis de me faire une idée plus claire de la recherche et cela m'a conforté dans mes choix qui pour l'instant me dirigent vers ces métiers.

Pendant ces six semaines, Nicolas et Julien m'ont laissé beaucoup de liberté. Certes un cadre de base pour le sujet du stage était fixé mais j'ai pu choisir ce que je voulais traiter. Ils me donnaient des pistes et me laissaient les explorer tout en restant très disponibles pour corriger ou valider mes idées. Lorsqu'ils m'ont accueilli, ils avaient déjà réfléchi au problème de la dimension multi-ensemble et m'ont donné un document qui résumait les principales idées qu'ils avaient eues. Une partie de mon stage consistait à corriger et compléter ces premières idées. J'ai notamment trouvé des contre-exemples à plusieurs questions au sujet des araignées et des unions de chemins. J'ai ensuite complété avec mes propres idées qui sont présentées dans ce rapport. J'ai aussi pu compléter une partie sur le lien avec les automorphismes en trouvant des contre-exemples à nouveau. Ce qui est présenté dans le reste du rapport est soit du à une initiative personnelle soit à une suggestion de la part de Nicolas ou Julien.

Je tiens à nouveau à remercier Nicolas et Julien pour leur gentillesse, leur disponibilité et tout ce qu'ils m'ont appris durant ce stage.