# Couplages contraints dans les graphes

Soutenance de stage de L3

Encadré par :
**Julien Bensmail** et **Nicolas Nisse**
Équipe COATI, Université Côte d'Azur, Inria, CNRS, I3S, France

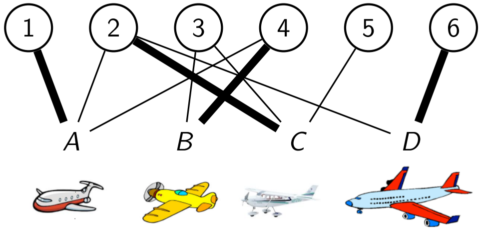
**Zoé Varin**
ENS de Lyon

2 septembre 2019

# Le problème de base

**Définition (Couplage)**

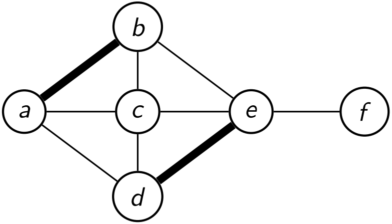
*Un couplage $M$ sur un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble tel que $M \subseteq E$ et $\forall e, e' \in M, e \neq e' \implies e \cap e' = \emptyset$.*



# Le problème de base

## Définition (Couplage)

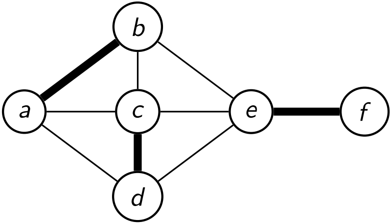
*Un couplage $M$ sur un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble tel que $M \subseteq E$ et $\forall e, e' \in M, e \neq e' \implies e \cap e' = \emptyset$.*



# Le problème de base

## Définition (Couplage)

*Un couplage $M$ sur un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble tel que $M \subseteq E$ et $\forall e, e' \in M, e \neq e' \implies e \cap e' = \emptyset$.*



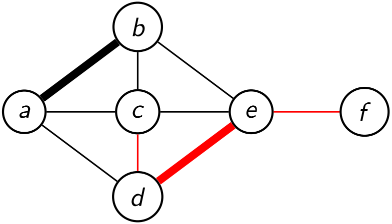

## Définition (Couplage maximum)

*Un couplage $M$ est maximum s'il n'existe pas de couplage $M'$ tel que $|M'| > |M|$.*

# Une notion utile

## Définition (chemin *M-augmentant*)

*Un chemin M-augmentant est un ensemble de sommets distincts $v_0, v_1, \dots, v_n$ tels que n impair, $v_0 \notin V_M$, $v_n \notin V_M$,*
$\forall 0 \leqslant i < n, \{v_i, v_{i+1}\} \in E$, *et*
$\forall 0 \leqslant j \leqslant \frac{n-1}{2}, \{v_{2j}, v_{2j+1}\} \notin M$, *et* $\{v_{2j+1}, v_{2j+2}\} \in M$.

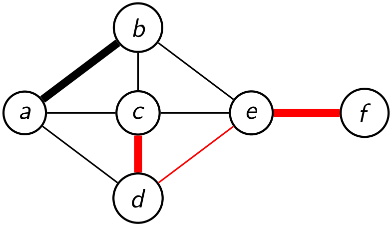


# Une notion utile



## Définition (chemin *M-augmentant*)

*Un chemin M-augmentant est un ensemble de sommets distincts* $v_0, v_1, \ldots, v_n$ *tels que* $n$ *impair,* $v_0 \notin V_M$, $v_n \notin V_M$,
$\forall 0 \leqslant i < n, \{v_i, v_{i+1}\} \in E$, *et*
$\forall 0 \leqslant j \leqslant \frac{n-1}{2}, \{v_{2j}, v_{2j+1}\} \notin M$, *et* $\{v_{2j+1}, v_{2j+2}\} \in M$.




*Augmentation du chemin (cdef)*

# Résolution du problème de base

**Théorème (Berge)**

*Un couplage $M$ est maximum si et seulement s'il n'admet pas de chemin $M$-augmentant.*

# Résolution du problème de base



**Théorème (Berge)**

*Un couplage $M$ est maximum si et seulement s'il n'admet pas de chemin $M$-augmentant.*

***Blossom algorithm* (Edmonds)**

Il existe un algorithme permettant de calculer un couplage maximum pour tout graphe en temps polynomial.

# Résolution du problème de base

**Théorème (Berge)**

*Un couplage $M$ est maximum si et seulement s'il n'admet pas de chemin $M$-augmentant.*

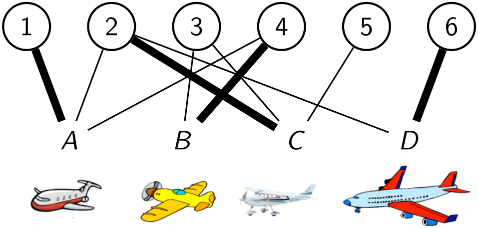
***Blossom algorithm* (Edmonds)**

Il existe un algorithme permettant de calculer un couplage maximum pour tout graphe en temps polynomial.

On note $\mu(G)$ la taille d'un couplage maximum sur le graphe $G$.

# Un premier exemple de couplage avec contraintes

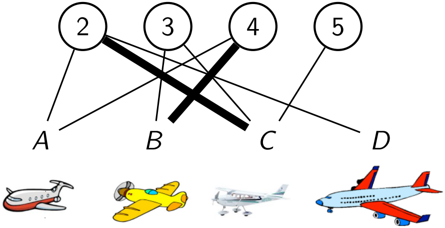





Des retards...

# Un premier exemple de couplage avec contraintes



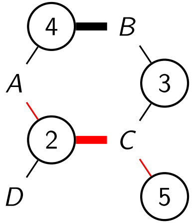



Des retards... Comment réaffecter les avions ?

# Un premier exemple de couplage avec contraintes







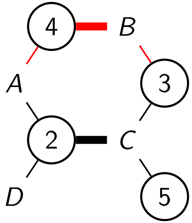

**Règles de réaffectation**

On considère $A$ un avion sans *slot* associé.

- Soit on réaffecte $A$ à une piste $i$ libre et accessible.
- Soit on réaffecte un avion $A'$ à un slot $i'$, et on affecte $A$ à l'ancienne affectation de $A'$.

# Un premier exemple de couplage avec contraintes





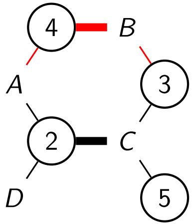

**Règles de réaffectation**

On considère $A$ un avion sans *slot* associé.

- Soit on réaffecte $A$ à une piste $i$ libre et accessible.
- Soit on réaffecte un avion $A'$ à un slot $i'$, et on affecte $A$ à l'ancienne affectation de $A'$.

# Un premier exemple de couplage avec contraintes






**Règles de réaffectation**

On considère $A$ un avion sans *slot* associé.

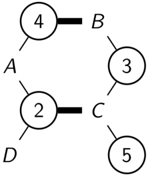
- Soit on réaffecte $A$ à une piste $i$ libre et accessible. On utilise un chemin augmentant de longueur 1.
- Soit on réaffecte un avion $A'$ à un slot $i'$, et on affecte $A$ à l'ancienne affectation de $A'$. On utilise un chemin augmentant de longueur 3.

# Quelle différence par rapport aux couplages sans contraintes ?





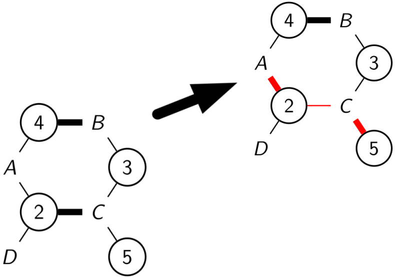
Pour les couplages contraints, le chemin choisi à chaque étape est important :



# Quelle différence par rapport aux couplages sans contraintes ?



Pour les couplages contraints, le chemin choisi à chaque étape est important :

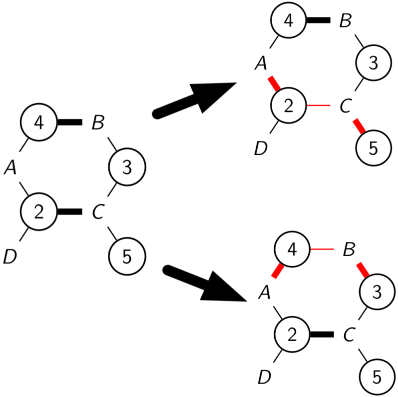


# Quelle différence par rapport aux couplages sans contraintes ?





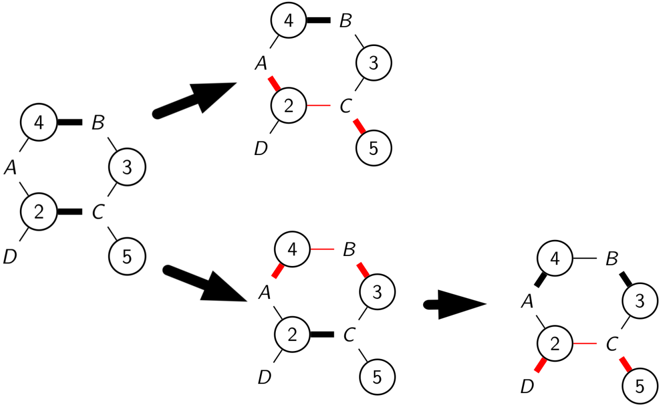
Pour les couplages contraints, le chemin choisi à chaque étape est important :



# Quelle différence par rapport aux couplages sans contraintes ?



Pour les couplages contraints, le chemin choisi à chaque étape est important :



# Le problème du couplage avec contraintes



$G$ graphe quelconque, $M$ couplage sur $G$, $k$ entier impair.

**Chemins de taille bornée**

On note $\mu_{\leqslant k}(G, M)$ la taille maximale d'un couplage qu'on puisse obtenir à partir de $M$ en n'utilisant que des chemins augmentants de longueur $\leqslant k$.

# Le problème du couplage avec contraintes

$G$ graphe quelconque, $M$ couplage sur $G$, $k$ entier impair.

## Chemins de taille bornée

On note $\mu_{\leqslant k}(G, M)$ la taille maximale d'un couplage qu'on puisse obtenir à partir de $M$ en n'utilisant que des chemins augmentants de longueur $\leqslant k$.

## Chemins de taille fixée

On note $\mu_{=k}(G, M)$ la taille maximale d'un couplage qu'on puisse obtenir à partir de $M$ en n'utilisant que des chemins augmentants de longueur $= k$.

# Une autre différence majeure avec les couplages sans contraintes



## $\mu_{\leqslant k}(G, M)$ et $\mu_{=k}(G, M)$ sont bien dépendants de $M$

Par exemple,

- Pour tout $k$, pour tout $G$, $\mu_{\leqslant k}(G, \emptyset) = \mu(G)$.

# Une autre différence majeure avec les couplages sans contraintes



## $\mu_{\leqslant k}(G, M)$ et $\mu_{=k}(G, M)$ sont bien dépendants de $M$

Par exemple,

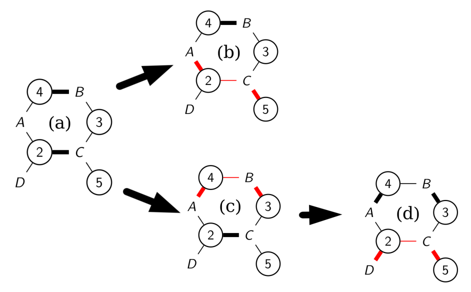
- Pour tout $k$, pour tout $G$, $\mu_{\leqslant k}(G, \emptyset) = \mu(G)$.
- Pour tout $k \geqslant 3$, pour tout $G$, $\mu_{=k}(G, \emptyset) = 0$.

# Une autre différence majeure avec les couplages sans contraintes

## $\mu_{\leqslant k}(G, M)$ et $\mu_{=k}(G, M)$ sont bien dépendants de $M$

Par exemple,

- Pour tout $k$, pour tout $G$, $\mu_{\leqslant k}(G, \emptyset) = \mu(G)$.
- Pour tout $k \geqslant 3$, pour tout $G$, $\mu_{=k}(G, \emptyset) = 0$.
- Avec l'exemple précédent :




$$\mu_{\leqslant 3}(G, M_b) = 3$$

$$\mu_{\leqslant 3}(G, M_a) = \mu_{\leqslant 3}(G, M_c) = \mu_{\leqslant 3}(G, M_d) = |M_d| = 4$$

# Un problème difficile



**Un résultat de NP-complétude pour $\mu_{\leqslant k}, k \geqslant 5$**

Le calcul de $\mu_{\leqslant k}(G, M)$ est NP-complet dans la classe des graphes bipartis planaires de degré maximum 3.

# Un problème difficile

## Un résultat de NP-complétude pour $\mu_{\leqslant k}, k \geqslant 5$

Le calcul de $\mu_{\leqslant k}(G, M)$ est NP-complet dans la classe des graphes bipartis planaires de degré maximum 3.

## NP-complétude pour le calcul de $\mu_{=k}(G, M)$ (à k fixé, $k \geqslant 3$)

Le calcul de $\mu_{=k}(G, M)$ est NP-complet dans la classe des graphes bipartis planaires de degré maximum 3.

# Un problème difficile



**Un résultat de NP-complétude pour $\mu_{\leqslant k}, k \geqslant 5$**

Le calcul de $\mu_{\leqslant k}(G, M)$ est NP-complet dans la classe des graphes bipartis planaires de degré maximum 3.

**NP-complétude pour le calcul de $\mu_{=k}(G, M)$ (à k fixé, $k \geqslant 3$)**

Le calcul de $\mu_{=k}(G, M)$ est NP-complet dans la classe des graphes bipartis planaires de degré maximum 3.

**NP-complétude pour $\mu_{=k}(G, M)$ dans les arbres (k en entrée, $k \geqslant 1$)**

Le calcul de $\mu_{=k}(G, M)$ est NP-complet, même en se restreignant aux instances dans lesquelles $G$ est un arbre.

# Un premier résultat sur les chemins

**Théorème (Chemins)**

*Il existe un algorithme linéaire qui calcule $\mu_{\leqslant k}(P_n, M)$, pour tout entier $k$ impair, pour tout chemin $P_n = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$ et pour tout couplage $M \subseteq E(P_n)$.*

# Résolution complète pour $\mu_{\leqslant 3}$



**Théorème**

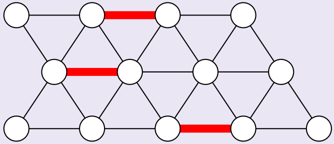
*Il existe un algorithme polynomial qui calcule $\mu_{\leqslant 3}(G, M)$ et renvoie un couplage correspondant, pour tout graphe $G$ et couplage $M$.*

# Résolution complète pour $\mu_{\leqslant 3}$

## Exécution de l'algorithme

- On supprime les arêtes inaccessibles.

## Exemple



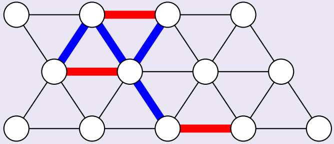
# Résolution complète pour $\mu_{\leqslant 3}$



## Exécution de l'algorithme

- On supprime les arêtes inaccessibles.

## Exemple



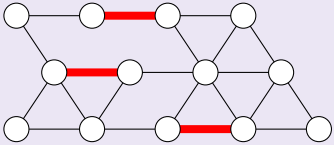
# Résolution complète pour $\mu_{\leqslant 3}$



## Exécution de l'algorithme

- On supprime les arêtes inaccessibles.

## Exemple



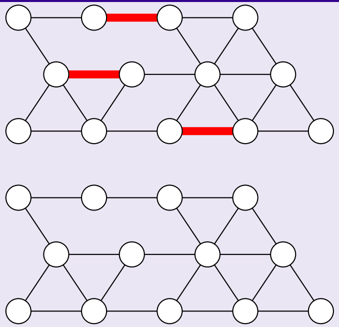
# Résolution complète pour $\mu_{\leqslant 3}$



## Exécution de l'algorithme

- On supprime les arêtes inaccessibles.
- On calcule un couplage maximum sur le graphe.

## Exemple

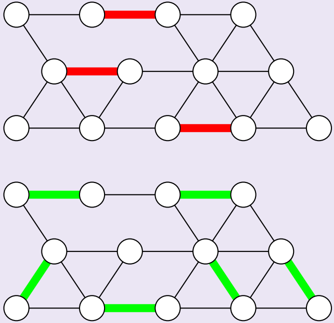


# Résolution complète pour $\mu_{\leqslant 3}$

## Exécution de l'algorithme

- On supprime les arêtes inaccessibles.
- On calcule un couplage maximum sur le graphe.

## Exemple



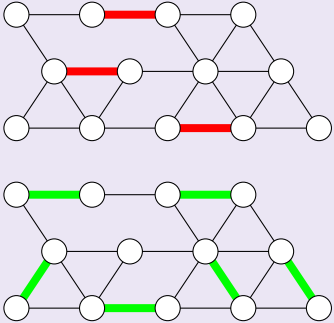
# Résolution complète pour $\mu_{\leqslant 3}$



## Exécution de l'algorithme

- On supprime les arêtes inaccessibles.
- On calcule un couplage maximum sur le graphe.
- On le modifie pour atteindre un couplage de même taille avec des chemins de longueur $\leqslant 3$.

## Exemple

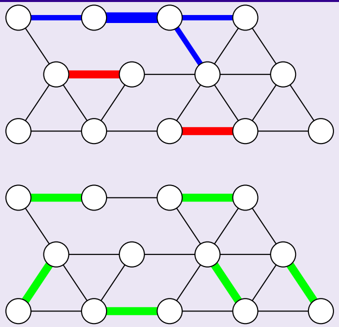


# Résolution complète pour $\mu_{\leqslant 3}$

## Exécution de l'algorithme

- On supprime les arêtes inaccessibles.
- On calcule un couplage maximum sur le graphe.
- On le modifie pour atteindre un couplage de même taille avec des chemins de longueur $\leqslant 3$.

## Exemple



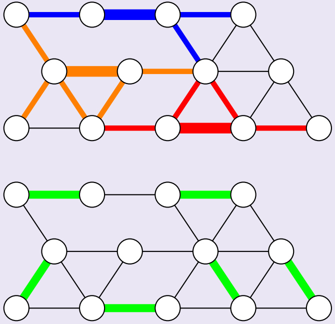
# Résolution complète pour $\mu_{\leqslant 3}$



## Exécution de l'algorithme

- On supprime les arêtes inaccessibles.
- On calcule un couplage maximum sur le graphe.
- On le modifie pour atteindre un couplage de même taille avec des chemins de longueur $\leqslant 3$.

## Exemple

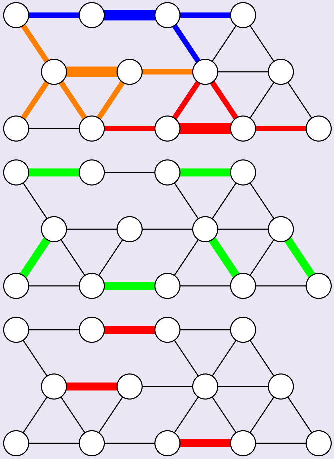


# Résolution complète pour $\mu_{\leqslant 3}$

## Exécution de l'algorithme

- On supprime les arêtes inaccessibles.
- On calcule un couplage maximum sur le graphe.
- On le modifie pour atteindre un couplage de même taille avec des chemins de longueur $\leqslant 3$.

## Exemple



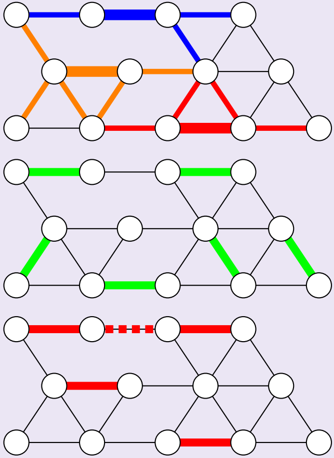
# Résolution complète pour $\mu_{\leqslant 3}$



### Exécution de l'algorithme

- On supprime les arêtes inaccessibles.
- On calcule un couplage maximum sur le graphe.
- On le modifie pour atteindre un couplage de même taille avec des chemins de longueur $\leqslant 3$.

### Exemple

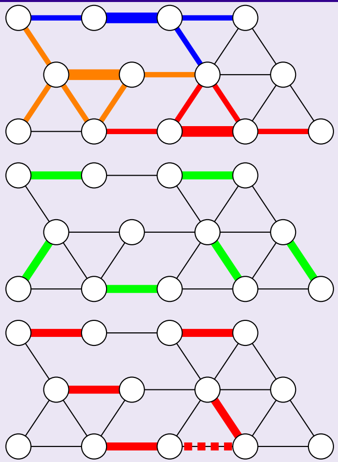


# Résolution complète pour $\mu_{\leqslant 3}$

## Exécution de l'algorithme

- On supprime les arêtes inaccessibles.
- On calcule un couplage maximum sur le graphe.
- On le modifie pour atteindre un couplage de même taille avec des chemins de longueur $\leqslant 3$.

## Exemple



# Résolution complète pour $\mu_{\leqslant 3}$

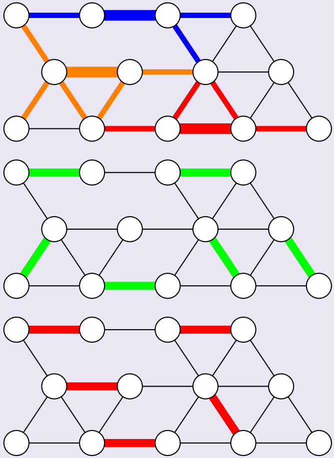




## Exécution de l'algorithme

- On supprime les arêtes inaccessibles.
- On calcule un couplage maximum sur le graphe.
- On le modifie pour atteindre un couplage de même taille avec des chemins de longueur $\leqslant 3$.

## Exemple

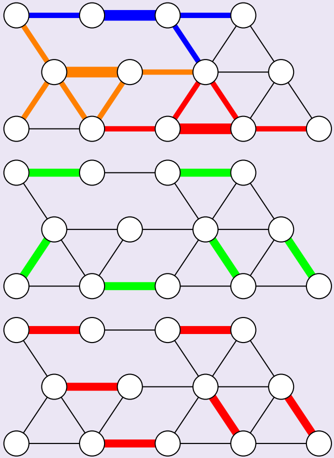


# Résolution complète pour $\mu_{\leqslant 3}$

**Exécution de l'algorithme**

- On supprime les arêtes inaccessibles.
- On calcule un couplage maximum sur le graphe.
- On le modifie pour atteindre un couplage de même taille avec des chemins de longueur $\leqslant 3$.

**Exemple**



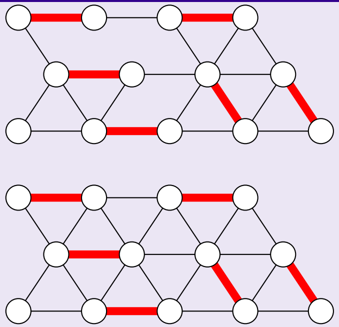
# Résolution complète pour $\mu_{\leqslant 3}$



## Exécution de l'algorithme

- On supprime les arêtes inaccessibles.
- On calcule un couplage maximum sur le graphe.
- On le modifie pour atteindre un couplage de même taille avec des chemins de longueur $\leqslant 3$.

## Exemple



# D'autres cas particuliers



On sait également calculer $\mu_{\leqslant k}$ dans les classes de graphes suivantes :

- Arbres $k$-sparse
- Chenilles

# Un dernier résultat

**Théorème**

*Soient*

- $T$ *un arbre de degré maximum* $\Delta$,
- $M$ *un couplage sur* $T$,
- $k$ *un entier impair.*

*Le calcul de* $\mu_{\leqslant k}(T, M)$ *peut se faire en temps* $O(f(k+\Delta) \cdot |V(T)|)$, *où* $f$ *est une fonction calculable.*

# Contributions personnelles





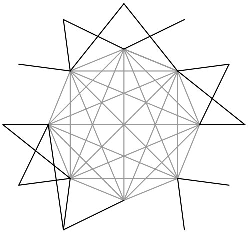
Des résultats pour $\mu_{=3}$ dans deux classes de graphes :

- Les arbres

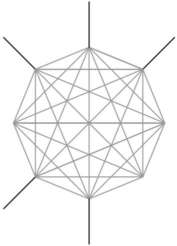
# Contributions personnelles

Des résultats pour $\mu_{=3}$ dans deux classes de graphes :

- Les arbres
- Les split graphs



un split graph



cas particulier : le soleil

# Quel objectif ?



## Rappel

Soient

- $T$ un arbre de degré maximum $\Delta$,
- $M$ un couplage sur $T$,
- $k$ un entier impair.

Le calcul de $\mu_{\leqslant k}(T, M)$ peut se faire en temps $O(f(k+\Delta) \cdot |V(T)|)$, où $f$ est une fonction calculable.

# Quel objectif ?



## Rappel

Soient

- $T$ un arbre de degré maximum $\Delta$,
- $M$ un couplage sur $T$,
- $k$ un entier impair.

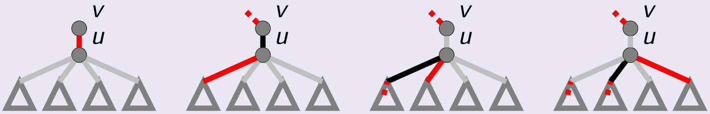
Le calcul de $\mu_{\leqslant k}(T, M)$ peut se faire en temps $O(f(k+\Delta) \cdot |V(T)|)$, où $f$ est une fonction calculable.

## Objectif

Traiter les sous-arbres indépendamment, pour perdre la dépendance exponentielle en le degré de l'arbre.

# Une intuition utile

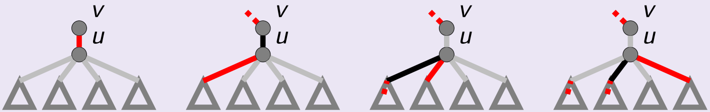
## Exemple



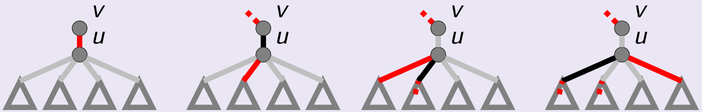

Premier développement

# Une intuition utile

## Exemple




Premier développement




Second développement

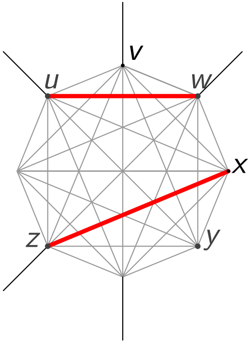
# Conclusion pour les arbres



**Théorème**

*Il existe un algorithme qui prend un arbre $T$ et un couplage $M$ en entrée et calcule $\mu_{=3}(T, M)$ avec une complexité $O(|V(T)|)$.*

# Les soleils




**Types pour les sommets de la clique**

Soit $k$ sommet de la clique.

- $k$ de type $A$ si $k$ est **couvert** et **adjacent à une arête extérieure**
- $k$ de type $B$ si $k$ est **couvert** et **sans voisin extérieur**
- $k$ de type $C$ si $k$ est **exposé** et **sans voisin extérieur**
- $k$ de type $D$ si $k$ est **exposé** et **adjacent à une arête extérieure**

Puis des types pour les arêtes.

# Résultat



- Un algorithme qui renvoie un couplage de taille $\mu_{=3}(S, M)$ en temps linéaire.

# Résultat



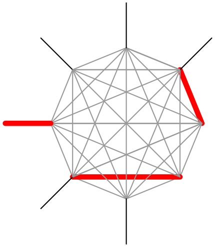
- Un algorithme qui renvoie un couplage de taille $\mu_{=3}(S, M)$ en temps linéaire.
- On connaît précisément $\mu(S) - \mu_{=3}(S, M)$ :
  - Si il y a un sommet de type $A$ :
  $$\mu(S) - \mu_{=3}(S, M) = \left\lfloor \frac{\max(|AB_M| - |C_M|, 0)}{2} \right\rfloor$$
  - Sinon :
  $$\mu(S) - 1 \leqslant \mu_{=3}(S, M) \leqslant \mu(S)$$
  et $\mu_{=3}(S, M) = \mu(S) - 1$ si et seulement si $|D_M| > 0$ et $|C_M| = 0$.

# Pourquoi s'être restreint aux soleils ?



3 étapes pour résoudre le problème sur les split graphs :

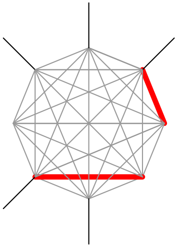
- les soleils



# Pourquoi s'être restreint aux soleils ?

3 étapes pour résoudre le problème sur les split graphs :

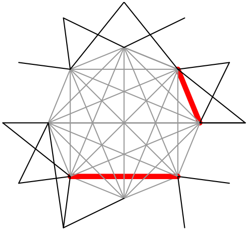
- les soleils



# Pourquoi s'être restreint aux soleils ?

3 étapes pour résoudre le problème sur les split graphs :

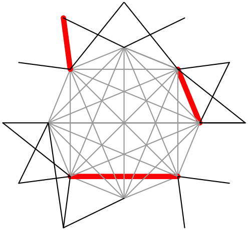
- les soleils
- les split graphs sans arête extérieure dans le couplage



# Pourquoi s'être restreint aux soleils ?

3 étapes pour résoudre le problème sur les split graphs :

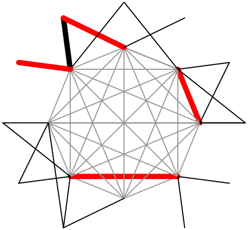
- les soleils
- les split graphs sans arête extérieure dans le couplage
- les split graphs



# Pourquoi s'être restreint aux soleils ?

3 étapes pour résoudre le problème sur les split graphs :

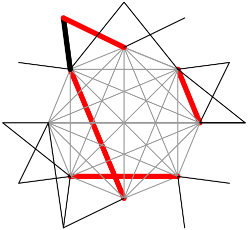
- les soleils
- les split graphs sans arête extérieure dans le couplage
- les split graphs



# Pourquoi s'être restreint aux soleils ?

3 étapes pour résoudre le problème sur les split graphs :

- les soleils
- les split graphs sans arête extérieure dans le couplage
- les split graphs



# Conclusion



- Deux nouveaux algorithmes
- Plusieurs pistes envisageables