Rapport de stage de licence 3 d'informatique

Treelength des graphes séries-parallèles

Nivelle Simon

maîtres de stage : Nicolas Nisse et Guillaume Ducoffe

équipe : COATI

laboratoire : INRIA Sophia-Antipolis

Fiche de Synthèse

Le contexte général

On parle ici de tree-decomposition, de treewidth et de treelength, c'est-à-dire d'une certaine façon de représenter un graphe. Cette représentation permet de résoudre certains problèmes sur les graphes de façon simple, par de la programmation dynamique par exemple. Il a été prouvé que calculer une représentation de length ou de width optimale est NP-complet en général. De plus on ne peut pour l'instant pas approcher efficacement la treewidth, mais on le peut pour la treelength.

Le problème étudié

La question posée ici est celle de la complexité du calcul de la treelength des graphes série-parallèles. C'est en fait un sous-cas de la question de la complexité du calcul de la treelength des graphes planaires. Cette question est intéressante d'un point de vue algorithmique car savoir calculer efficacement la treelength d'un graphe permet de résoudre simplement de nombreux problèmes.

La contribution proposée

On s'est tout d'abord intéressé à la question de la complexité de la treelength dans les graphes planaires avant de se restreindre au cas des graphes série-parallèles. On a alors commencé par l'étude d'un sous cas (théorème 1). On a ensuite pu le généraliser (théorème 2) à un sous-cas plus large en remarquant les nombreux points communs. Puis on s'est intéressé aux graphes série-parallèles en général pour voir si on pouvait trouver un lien avec le sous-cas ce qui a mené après de nombreux essais infructueux au théorème 3 et à la conjecture.

Les arguments en faveur de sa validité

La véracité des théorèmes trouvés est soutenue par des démonstrations de propositions et lemmes intermédiaires. La conjecture est soutenue, entre autres, par des exemples.

Le bilan et les perspectives

L'approche utilisée ici n'est malheureusement pas applicable directement à d'autres classes de graphes, entre autre parce qu'on a trouvé un exemple montrant que la conjecture ne pouvait pas s'étendre aux graphes planaires et parce que les démonstrations se basent majoritairement sur la structure spéciale des graphes série-parallèles. Il faudrait maintenant réussir à prouver la conjecture et à trouver un moyen de l'utiliser ou à trouver une autre façon de calculer la treelength des graphes série-parallèles ou à montrer que le problème est NP-complet. L'objectif final étant de résoudre ce problème sur les graphes planaires.

1 Introduction

La notion de tree-decomposition a été introduite par Robertson et Seymour pour démontrer le théorème éponyme qui est équivalent à dire que toute famille de graphes close par mineurs peut être définie grâce à un ensemble fini de mineurs exclus [5]. Par exemple l'ensemble des graphes planaires est l'ensemble des graphes n'ayant ni K_5, ni $K_{3,3}$ comme mineurs. On rappelle qu'un mineur d'un graphe G est un graphe obtenu à partir de G en enlevant des sommets, en enlevant des arêtes ou en contractant des arêtes. De façon informelle, une tree-decomposition d'un graphe est une façon de couper un graphe en sacs, qui sont des sous-graphes pas forcément disjoints, que l'on organise sous forme d'un arbre.

Le paramètre le plus étudié vis-à-vis des tree-decomposition est la treewidth d'un graphe, qui est la borne supérieure du nombre de sommets dans les sacs moins 1. Intuitivement plus la treewidth d'un graphe est petite, plus sa structure est proche de celle d'un arbre. Ce paramètre est intéressant car de nombreux problèmes NP-complets sur les graphes peuvent être résolus en temps polynomial sur les graphes de treewidth bornée, comme par exemple le problème de la recherche du plus grand ensemble de sommets indépendants. Connaître une tree-decomposition d'un graphe permet de résoudre des problèmes par programmation dynamique, ce qui est efficace si le graphe a une petite treewidth.

Malheureusement calculer la treewidth d'un graphe est NP-complet [7]. Bodlaender, dans [4], a montré que le problème était FPT, c'est-à-dire que pour tout entier k il existe un algorithme polynomial permettant de savoir si un graphe a une treewidth plus petite que k. Mais pour $k > 4$, on ne connaît pas d'algorithmes efficaces en pratique pour calculer la treewidth. La meilleure approximation en temps polynomial connue est précise à un facteur en $\sqrt{log(treewidth)}$ près [9] et il existe une $\frac{3}{2}$-approximation sur les graphes planaires mais on ne connaît pas sa complexité [6].

De plus la treewidth ne permet pas de simplifier certains problèmes, comme la recherche d'un arbre couvrant ne modifiant pas trop les distances. C'est pourquoi Dourisboure et Gavoille [10] ont introduit le notion de treelength qui est la borne supérieure des diamètres des sacs. Là où la treewidth permet de "mesurer" à quel point la structure d'un graphe est proche de celle d'un arbre, la treelength permet de savoir si la métrique d'un graphe est proche de celle d'un graphe cordal.

Malheureusement calculer la treelength d'un arbre est aussi NP-complet [3]. D'un certain point de vue le calcul de la treelength est plus dur que celui de la treewidth car le problème n'est même pas FPT. En fait il est déjà NP-complet de savoir si la treelength d'un graphe est plus grande que 2 [3]. Mais contrairement à la treewidth il existe des approximations efficaces, comme l'algorithme LexM qui est une 3-approximation [10].

Il est donc pour l'instant impossible de calculer de façon efficace ces deux paramètres, mais on peut approcher efficacement la treelength. On peut alors se demander s'il existe un lien entre treelength et treewidth. C'est faux dans le cas général car il existe des classes de graphes de treelength bornée et de treewidth non bornée, comme les cliques, et des classes de graphes de treewidth bornée et de treelength non bornée, comme les cycles. Mais il existe des cas où un tel lien existe [1].

On ne connaît pas encore la complexité de calculer la treelength et la treewidth des graphes planaires. Je me suis restreint à l'étude de la treelength des graphes séries-parallèles, une classe de graphes planaires relativement simples. En effet les graphes séries-parallèles sont définis simplement (cf préliminaires) et ont la particularité que la plupart des problèmes NP-complet en général sont solvables en temps polynomial sur ces graphes, et la grande majorité de ceux qui restent NP-complet sont aussi NP-complet sur les arbres [8].

Après avoir introduit les notions nécessaires nous allons montrer que la treelength des graphes composés de n chemins entre deux sommets, pour $n \geq 3$, est $\lceil \frac{a_1+a_n}{3} \rceil$ si $a_n \leq \lceil \frac{a_1+a_n}{3} \rceil$, a_n si $\lceil \frac{a_1+a_n}{3} \rceil \leq a_n \leq \lceil \frac{a_1+a_2}{3} \rceil$ et $\lceil \frac{a_1+a_2}{3} \rceil$ si $\lceil \frac{a_1+a_2}{3} \rceil \leq a_n$ avec a_1 la taille du plus long chemin, a_2 celle du deuxième plus long et a_n celle du plus court. Puis nous nous intéresserons aux cycles dans les graphes généraux pour minorer la treelength. En effet nous montrerons que s'il existe, dans un graphe G , un cycle C de taille c on peut minorer la treelength de G par $min(k_C, \lceil \frac{c}{3} \rceil)$ avec k_C le plus grand entier tel que pour tout (u, v) sommets de C on a soit $d_G(u, v) = d_C(u, v)$, soit $d_G(u, v) \geq k_C$. Enfin de nombreux éléments nous pousse à penser que le maximum de ces minorations est la treelength de G quand G est série-parallèle.

2 Préliminaires

On s'intéresse ici à des graphes non orientés et non pondérés. Soit $G = (V(G), E(G))$ un graphe. $V(G)$ est l'ensemble des sommets de G et $E(G)$ est l'ensemble des arêtes. Dans la suite on les notera respectivement V et E s'il n'y a pas d'ambiguïté. La longueur d'un chemin est le nombre d'arêtes dans le chemin et la distance $d_G(u, v)$ entre deux sommets u et v de G est la longueur d'un plus court chemin de u à v. Dans la suite on notera d pour d_G s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Une tree-decomposition d'un graphe $G = (V, E)$ est une paire (T, X) où T est un arbre et $X = (X_t)_{t \in V(T)}$ est une famille de sous-ensembles de V indicé par les sommets de T tels que :

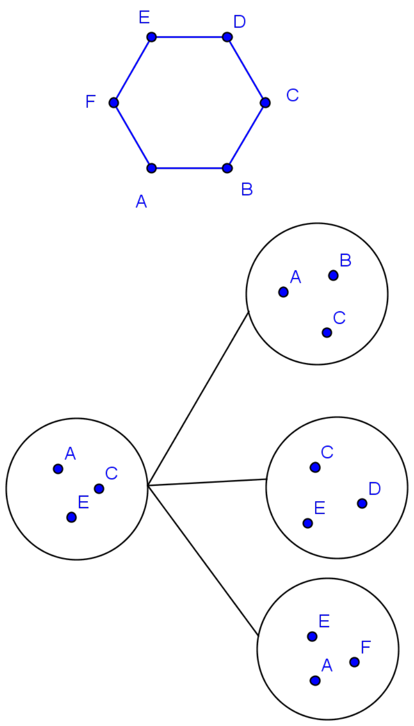
- $\cup_{t \in V(T)} X_t = V$
- Pour tout arête $e = \{u, v\}$ de G, il existe $t \in V(T)$ tel que $u \in X_t$ et $v \in X_t$.
- Pour tout sommet u de G l'ensemble des sommets t de T tels que $u \in X_t$ induis un sous arbre de T

Les ensembles X_t sont appelés les sacs de la tree-decomposition. Dans la suite on identifiera le sommet t de T et le sac X_t associé. On remarque que la troisième condition est équivalente à dire que pour tout triplet de sac X, Y et Z, si Y est sur le chemin de X à Z dans T, alors $X \cap Z \subseteq Y$.

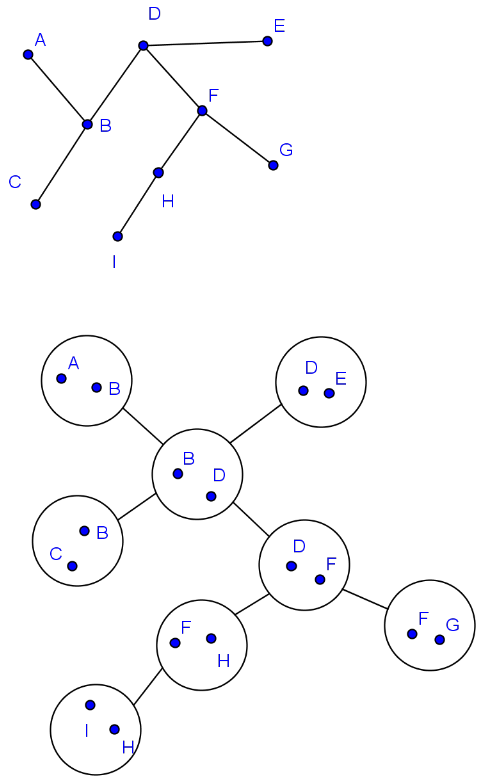
Le diamètre d'un sac d'une tree-decomposition (X, T) est $max(\{d_G(u, v) | u \in X_t \text{ et } v \in X_t\})$ c'est-à-dire la plus grande distance dans G entre deux sommets du sacs. La length d'une tree-decomposition est le maximum des diamètre des sacs. Enfin la treelength d'un graphe G, notée $tl(G)$ est la plus petite length d'une tree-decomposition de G. Cette quantité est bien définie car tout graphe a au moins une tree-decomposition, celle composée d'un sac contenant tous les sommets du graphe, et la length d'une tree-decomposition est un entier positif.

Exemples :

- Un graphe complet a une treelength de 1.
- Le cycle à 6 sommets a une treelength de 2.
- Les arbres ont une treelength de 1. Une tree-decomposition optimale consiste à créer un sac par arête.



Le cycle de taille 6
et une tree-decomposition de length 2



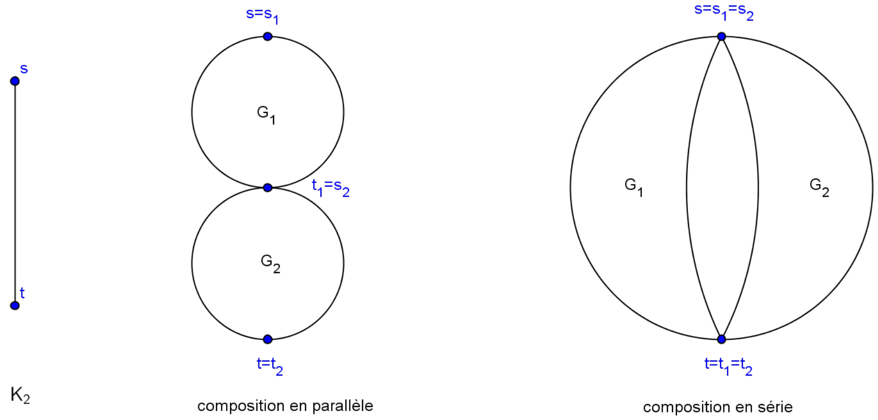
Un arbre
et une tree-decomposition de length 1

Remarque . On sait que la treelength d'un cycle à n sommet est $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ d'après [10].

Un sous graphe H d'un graphe G est dit isométrique si pour toute paire de sommets (u, v) de H on a $d_G(u, v) = d_H(u, v)$. Une propriété importante de la treelength est que la treelength d'un sous-graphe isométrique dans G est au plus celle de G [10]. C'est-à-dire, soit G un graphe et H un sous-graphe isométrique dans G, alors $tl(H) \leq tl(G)$.

L'ensemble des graphes séries-parallèles est l'ensemble des graphes définis de la façon suivante :

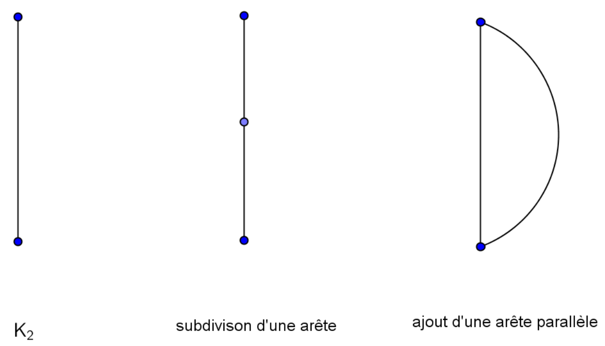
- K_2, le graphe réduit à une arête, est série-parallèle et ses deux sommets sont distingués et appelés s et t.
- Soient G_1 et G_2 série-parallèles. On note s_1 et t_1 les sommets distingués de G_1 et s_2 et t_2 ceux de G_2. Alors les graphes suivants sont série-parallèles :
  - G obtenu en identifiant t_1 avec s_2 et dont les sommets distingués sont s_1 et t_2. Cette opération est appelée composition en série.
  - G obtenu en identifiant s_1 avec s_2 et t_1 avec t_2 et dont les sommets distingués sont s_1 et t_1. Cette opération est appelée composition en parallèle.



On remarque que ces graphes sont planaires.

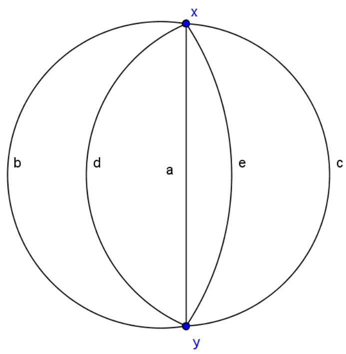
Remarque . Il existe une deuxième façon de définir les graphes série-parallèles :

- — K_2, le graphe réduit à une arête, est série-parallèle.
- — Soit G série-parallèle. Alors les graphes suivants sont série-parallèles :
  - — G' obtenu en subdivisant une arête de G.
  - — G' obtenu en ajoutant un arête parallèle à une arête déjà existante.



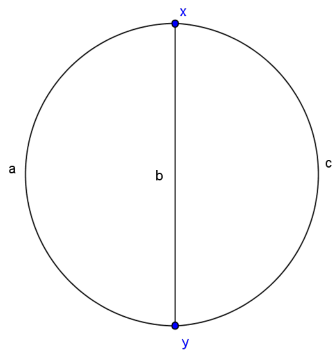
3 Un sous-cas

Nous allons tout d'abord nous intéresser à un cas particulier de graphes série-parallèles. Ce sont les graphes tels qu'il existe deux sommets x et y tels que G soit composé de n chemins de x à y tels que l'intersection de toute paire de chemins soit exactement les deux sommets x et y.



On remarque que pour $n = 2$ on connaît la treelength de ces graphes puisque ce sont des cycles. Dans ce cas la treelength vaut $\left\lceil \frac{k}{3} \right\rceil$ avec k la taille du cycle.

On va commencer par étudier le cas $n = 3$. On notera a, b et c les longueurs des trois chemins. On prendra $b \leq c \leq a$ ce qui permet d'avoir un plus grand cycle isométrique de taille $a + b$.



On a prouvé le résultat suivant qui donne la treelength d'un tel graphe en fonction de a, b et c :

Théorème 1. *Pour tout graphe G tel que défini ci-dessus on a :*

— *Si $b \leq \left\lceil \frac{a+b}{3} \right\rceil$ alors $tl(G) = \left\lceil \frac{a+b}{3} \right\rceil$.*

— *Si $\left\lceil \frac{a+b}{3} \right\rceil \leq b \leq \lceil \frac{a+c}{3} \rceil$ alors $tl(G) = b$.*

— *Si $\lceil \frac{a+c}{3} \rceil \leq b$ alors $tl(G) = \lceil \frac{a+c}{3} \rceil$.*

Pour démontrer ce théorème on a utilisé deux résultats intermédiaires.

Le premier de ces résultats donne un encadrement de la treelength d'un graphe :

Proposition 1. Soit G tel que défini précédemment alors on a :

$$\left\lceil \frac{a+b}{3} \right\rceil \leq tl(G) \leq \left\lceil \frac{a+c}{3} \right\rceil$$

Le deuxième résultat permet de donner une minoration plus précise de la treelength :

Proposition 2. Soit G un graphe à 3 chemins et $k \in \mathbb{N}$.
Si $k \leq b$ et $3k \leq a + c$ alors :

$$tl(G) \geq k$$

Grâce à ces deux résultats et à l'étude des trois cas du théorème 1 on a pu démontrer le théorème 1.

Ensuite nous avons pu généraliser le résultat aux graphes constitués de n chemins pour $n \geq 3$. Les longueurs de ces chemins sont notées a_1, a_2,...,a_n avec $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$.

Théorème 2. *Pour tout graphe G tel que défini ci-dessus on a :*

— *Si* $a_n \leq \lceil \frac{a_1+a_n}{3} \rceil$ *alors* $tl(G) = \lceil \frac{a_1+a_n}{3} \rceil$.

— *Si* $\lceil \frac{a_1+a_n}{3} \rceil \leq a_n \leq \lceil \frac{a_1+a_2}{3} \rceil$ *alors* $tl(G) = a_n$.

— *Si* $\lceil \frac{a_1+a_2}{3} \rceil \leq a_n$ *alors* $tl(G) = \lceil \frac{a_1+a_2}{3} \rceil$.

On remarque que pour $n = 3$ on retrouve bien le théorème 1, avec $a_1 = a$, $a_2 = c$ et $a_n = b$.

4 Graphes séries-parallèles et cycles

L'idée du théorème 3 part de la remarque que les minorations utilisées précédemment sont obtenues grâce à des cycles qui, de façon informelle, n'ont pas de "raccourcis trop court" :
Soit G un graphe et C un cycle de G de taille c. On note k_C le plus grand entier tel que pour tout (u, v) sommets de C on a soit $d_G(u, v) = d_C(u, v)$, soit $d_G(u, v) \geq k_C$. Il est possible que k_C ne soit pas définit. C'est le cas uniquement quand C est isométrique dans G. On prend alors $k_C = +\infty$.

On remarque que $k_C = min\{d_G(u, v) | u \in V(C)$ et $v \in V(C)$ tels que $d_G(u, v) \neq d_C(u, v)\}$ quand C n'est pas isométrique.

On pose $l_C = min(k_C, \lceil \frac{c}{3} \rceil)$. On a alors :

Théorème 3.
Soit G un graphe et C un cycle de G
Alors $tl(G) \geq l_C$.

On peut maintenant se demander à quel point les minorations obtenues par le théorème 3 se rapprochent de la treelength. Dans la suite on ne parle que de graphes contenant au moins un cycle. On note $M_G = max\{l_C | C$ est un cycle de $G\}$, c'est la meilleure minoration que peut donner le théorème 3. Quand on compare cette quantité à la treelength dans les graphes série-parallèles on remarque de nombreuses similarités :

— On a $tl(G) = M_G$ pour les graphes G étudiés précédemment.
— Si on met en série deux graphes série-parallèles G_1 et G_2 on obtient un nouveau graphe série-parallèle G tel que $tl(G) = max(tl(G_1), tl(G_2))$ et $M_G = max(M_{G_1}, M_{G_2})$.
— Si on ajoute une arête entre deux sommets adjacents d'un graphe série-parallèle G on obtient un nouveau graphe série-parallèle G' de même treelength et tel que $M_{G'} = M_G$.

— Si on subdivise une arête d'un graphe série-parallèle G on obtient un nouveau graphe série-parallèle G' tel que $tl(G) \leq tl(G') \leq tl(G) + 1$ et $M_G \leq M_{G'} \leq M_G + 1$.

Tout cela nous mène à formuler la conjecture suivante :

Conjecture 1. *Soit G un graphe série-parallèle contenant au moins un cycle. Alors $tl(G) = M_G$.*

On remarque que les graphes série-parallèles sans cycle sont les chemins et leur treelength est 1.

5 Conclusion

On a donc réussi à trouver une formule pour la treelength d'une nouvelle classe de graphe, mais qui est restreinte. Cela a permit de trouver un théorème qui donne une minoration de la treelength d'un graphe, qui généralise le principe de minorer par la treelength du plus grand cycle induit. Malheureusement ce théorème n'est a priori pas utilisable facilement sur des graphes en général à cause de la complexité de la minoration.
Mais il est possible que cette minoration soit optimale sur les graphes séries-parallèles (conjecture 1), mais cela reste à prouver. Il faudrait aussi essayer d'utiliser cette conjecture pour créer un algorithme permettant de calculer la treelength des graphes série-parallèles (si la conjecture est vérifiée), par exemple en utilisant les définitions des graphes séries-parallèles ou leur ear decomposition [2].
Mais cela ne permettra a priori pas d'aller plus loin, comme calculer la treelength d'un graphe planaire, car la conjecture ne peut s'étendre aux graphes planaires. Il faudrait donc essayer une autre approche.

Références

[1] Coudert D., Ducoffe G. et Nisse N. *Diameter of minimal separators in graphs.* 2014.

[2] Eppstein D. *Parallel Recognition of Series-Parallel Graphs.* 1990.

[3] Lokshtanov D. *On the complexity of computing treelength.* Discrete Applied Mathematics, 2010.

[4] Bodlaender H.L. *A linear time algorithm for finding tree-decompositions of small treewidth.* SIAM J. Comput., 1996.

[5] Lovász L. *Graph minor theory.* Bulletin (New Series) of the American mathematical society, 2005.

[6] Seymour P. et Thomas R. *Call Routing and the Ratcatcher.* Combinatorica, 1994.

[7] Arnborg S., Corneil D.G. et Proskurowski A. *Complexity of finding embeddings in a k-tree.* Algebric Discrete Methods, 1987.

[8] Nishizeki T., Vygen J. et Zhou X. *The edge-disjoint paths problem is NP-complete for series–parallel graphs.* Discrete Applied Mathematics, 2001.

[9] Feige U., Hajiaghayi M.T. et Lee J.R. *Improved approximation algorithms for minimum-weight vertex separators.* 2005.

[10] Dourisboure Y. et Gavoille C. *Tree-decompositions with bags of small diameter.* Discrete Mathematics, 2007.

Annexe

1 Un sous-cas

On considère ici les graphes G tels qu'il existe deux sommets x et y tels que G soit composé de n chemins de x à y tels que l'intersection de toute paire de chemins soit exactement les deux sommets x et y.

Exemple :

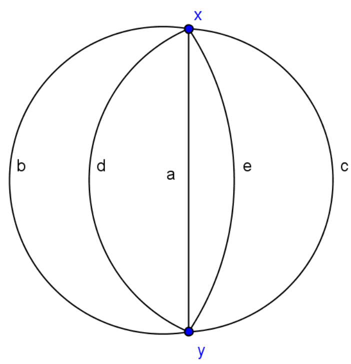


Fig 1

Ici a, b, c, d et e sont les longueurs des chemins.

Remarque . On rappelle que pour les cycles (avec $n = 2$ chemins) on a $tl(C_k) = \left\lceil \frac{k}{3} \right\rceil$ avec C_k le cycle de taille k.
On rappelle que pour tout sous-graphe isométrique H d'un graphe G, $tl(G) \geq tl(H)$. Plus particulièrement, pour tout graphe G on a $tl(G) \geq \left\lceil \frac{k}{3} \right\rceil$ avec k la taille du plus grand cycle isométrique.

1.1 3 chemins

On considère les graphes de la forme définie précédemment avec exactement trois chemins.
On notera a, b et c la taille des trois chemins. On prendra $a \geq c \geq b$ pour que le graphe contienne un plus grand cycle isométrique de taille $a + b$.

Exemple :

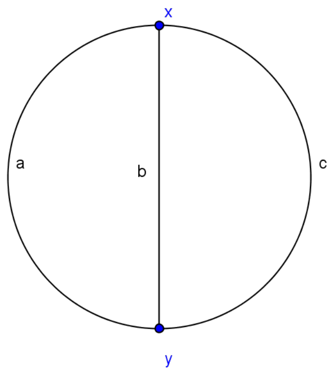


Fig 2

Théorème 1. *Pour tout graphe G tel que défini ci-dessus on a :*

— *Si $b \leq \left\lceil \frac{a+b}{3} \right\rceil$ alors $tl(G) = \left\lceil \frac{a+b}{3} \right\rceil$.*

— *Si $\left\lceil \frac{a+b}{3} \right\rceil \leq b \leq \left\lceil \frac{a+c}{3} \right\rceil$ alors $tl(G) = b$.*

— *Si $\left\lceil \frac{a+c}{3} \right\rceil \leq b$ alors $tl(G) = \left\lceil \frac{a+c}{3} \right\rceil$.*

On remarque que si $a \in \{1; 2\}$ le théorème est vérifié.
On supposera donc dans la suite que $a \geq 3$, ce qui nous permettra de définir jusqu'à deux sommets internes sur le chemin de longueur a.

Tout d'abord nous allons montrer la propriété suivante :
Proposition 1. Soit G tel que défini précédemment alors on a :

$$\left\lceil \frac{a+b}{3} \right\rceil \leq tl(G) \leq \left\lceil \frac{a+c}{3} \right\rceil$$

Démonstration. Soit G tel que défini précédemment.

Les chemins de taille a et b forment un cycle isométrique C de taille $a+b$.
On a donc $tl(G) \geq tl(C)$.
Or on sait que $tl(C) = \left\lceil \frac{a+b}{3} \right\rceil$.
Et donc $tl(G) \geq \left\lceil \frac{a+b}{3} \right\rceil$.

Pour la borne supérieure on va exhiber une tree-decomposition (X, T) de length $\left\lceil \frac{a+c}{3} \right\rceil$ de G.
On pose a_1 le sommet du chemin de longueur a à distance $\left\lceil \frac{a+c}{3} \right\rceil$ de x. Puisque $a \geq c$, on a $a > \left\lceil \frac{a+c}{3} \right\rceil$ donc a_1 est bien défini.
De même on pose $b_1$le sommet du chemin de longueur b à distance $\left\lceil \frac{a+c}{3} \right\rceil$ de x. Si $b \leq \left\lceil \frac{a+c}{3} \right\rceil$ on prend $b_1 = y$.
On va maintenant distinguer deux cas : $c \leq \left\lceil \frac{a+c}{3} \right\rceil$ et $c > \left\lceil \frac{a+c}{3} \right\rceil$.

Dans le cas $c > \left\lceil \frac{a+c}{3} \right\rceil$ on pose c_1 le sommet du chemin de longueur c à distance $\left\lceil \frac{a+c}{3} \right\rceil$ de x sur ce chemin.
On remarque que $d(a_1, c_1) \leq c + a - 2 * \left\lceil \frac{a+c}{3} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{a+c}{3} \right\rceil$.

De même $d(a_1, b_1)$ et $d(b_1, c_1)$ sont majorés par $\lceil \frac{a+c}{3} \rceil$.
On prend T l'arbre à 5 sommets composé d'une racine r avec 4 fils f_1, f_2, f_3 et f_4 (Fig3).
Le sac associé à r est $\{y, a_1, b_1, c_1\}$. Par les remarques précédentes, le diamètre de ce sac est $\lceil \frac{a+c}{3} \rceil$.
Dans le sac associé à f_1 on met C_{xa_1} le chemin de x à a_1 sur le chemin de taille a. Le diamètre de ce sac est $\lceil \frac{a+c}{3} \rceil$.
Dans les sacs associés à f_2 et f_3 on met, respectivement, C_{xb_1} le chemin de x à b_1 sur le chemin de taille b et C_{xc_1} le chemin de x à c_1 sur le chemin de taille c. Le diamètre de ces sacs est majoré par $\lceil \frac{a+c}{3} \rceil$.
Dans le sac associé à f_4 on met les trois chemins C_{ya_1}, C_{yb_1} et C_{yc_1}. Le diamètre de ce sac est majoré par $\lceil \frac{a+c}{3} \rceil$.
(X, T) est trivialement une tree-decomposition de G.
De plus elle est de length $\lceil \frac{a+c}{3} \rceil$.
D'où $tl(G) \leq \lceil \frac{a+c}{3} \rceil$ dans ce cas.

Si $c \leq \lceil \frac{a+c}{3} \rceil$ on prend c_1 sur le chemin de longueur a à une distance $\lceil \frac{a+c}{3} \rceil - c$ de y (donc on peut avoir $c = y$). Remarquons qu'ici c_1 se trouve sur le chemin de a_1 et y dans chemin de longueur a. De plus $d(a_1, c_1) \leq \lceil \frac{a+c}{3} \rceil$.
On remarque qu'ici on a toujours $b_1 = y$.
On prend T l'arbre à 5 sommets composé d'une racine r avec 3 fils f_1, f_2 et f_3 et le fils f_2 a un fils f (Fig3bis).
Le sac associé à r est $\{x, a_1, c_1\}$. Le diamètre de ce sac est au plus $\lceil \frac{a+c}{3} \rceil$.
Dans le sac associé à f_1 on met le chemin de x à a_1 sur le chemin de longueur a. Son diamètre est majoré par $\lceil \frac{a+c}{3} \rceil$.
Dans le sac associé à f_3 on met le chemin de c_1 à a_1 sur le chemin de longueur a. Son diamètre est majoré par $a + c - 2\lceil \frac{a+c}{3} \rceil$ et donc par $\lceil \frac{a+c}{3} \rceil$.
Dans le sac associé à f_2 on met le chemin de x à y de longueur c et le chemin de y à c_1 sur le chemin de longueur a. Son diamètre est majoré par $c + \lceil \frac{a+c}{3} \rceil - c = \lceil \frac{a+c}{3} \rceil$.
Dans le sac associé à f on met le chemin de x à y de longueur b. Son diamètre est majoré par $\lceil \frac{a+c}{3} \rceil$.
On a donc une tree-decomposition de G de length au plus $\lceil \frac{a+c}{3} \rceil$.
D'où $tl(G) \leq \lceil \frac{a+c}{3} \rceil$ dans ce cas.

D'où $tl(G) \leq \lceil \frac{a+c}{3} \rceil$. □

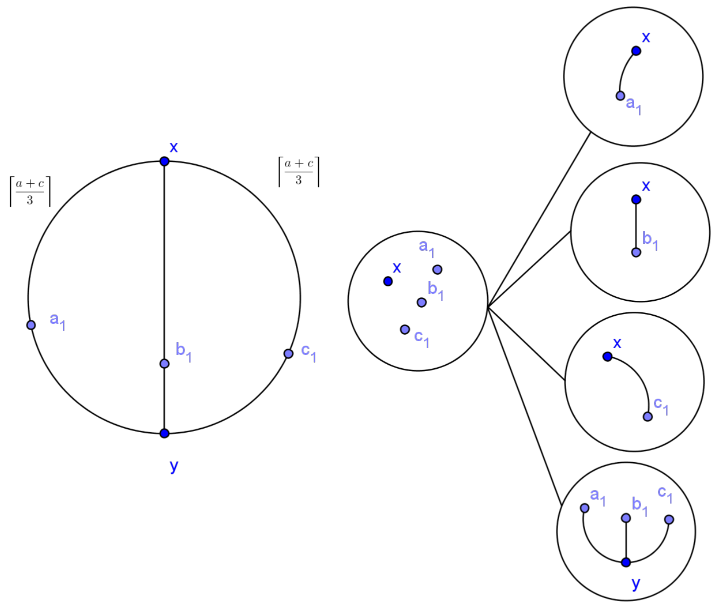


Fig 3

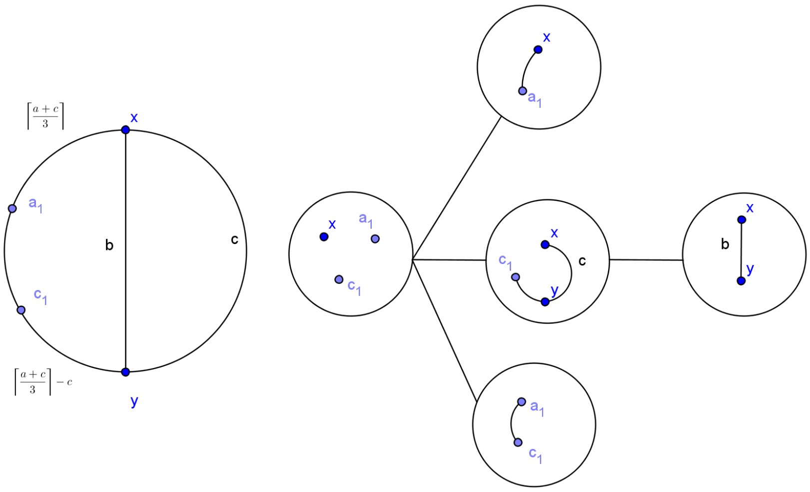


Fig 3bis

D'après la propriété 1 dans les cas où $b = c$ le théorème est vérifié. Dans la suite on supposera donc $c > b$.

Maintenant montrons la propriété suivante :

Proposition 2. Soit G un graphe à 3 chemins et $k \in \mathbb{N}$.
Si $k \leq b$ et $3k \leq a + c$ alors :

$$tl(G) \geq k$$

Démonstration. Soit G un graphe à 3 chemins.
Soit k un entier tel que $k \leq b$ et $3k \leq a + c$.
Montrons par l'absurde que $tl(G) \geq k$. Pour cela supposons qu'il existe une tree-decomposition de G de length l, avec $l < k$.
Soient α le sommet du chemin de longueur a à distance k de x et β le sommet du chemin de longueur c à distance k de x (cf Fig4 ci-dessous). α et β existent et sont différents de y car $a \geq c > b \geq k$.

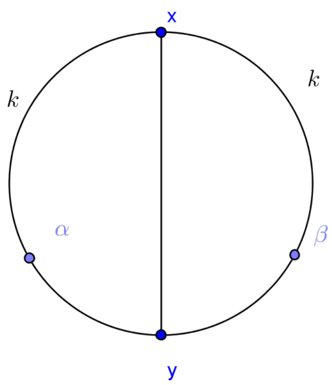


Fig 4

Considérons les positions relatives de x, α et β dans cette tree-decomposition.
On a $d(x,\alpha) = k$ (car $b \geq k$) donc il n'existe pas de sac contenant à la fois x et α.
De même il n'existe pas de sac contenant x et β.
On a $3k \leq a + c$. Donc le chemin de α à β passant par y est de longueur au moins $a + c - 2k$, donc de longueur au moins k. Tout autre chemin de α à β est aussi de longueur au moins k. Donc $d(\alpha, \beta) \geq k$ et il n'existe pas de sac contenant α et β.
Il y a donc 4 positions relatives possibles entre x, α et β dans la tree-decomposition.

— S'il existe un sac S contenant x sur un chemin entre deux sacs contenant respectivement α et β. Alors S contient un séparateur de α et β. Donc S contient un sommet z de G qui est sur le chemin de α à β passant par y. Or un chemin de x à z passe soit par α, soit par β, soit par y. Or $d(x,\alpha) = d(x,\beta) = k$ et $d(x,y) = b \geq k$. Donc $d(x,z) \geq k$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse faite sur l.
— S'il existe un sac S contenant α sur un chemin entre deux sacs contenant respectivement x et β. Alors S contient un séparateur de x et β. Donc S contient un sommet z de G qui est entre x et β sur le chemin de longueur c. Or un chemin de α à z passe soit par x, soit par β. Or $d(x,\alpha) = k$ et $d(\alpha,\beta) \geq k$. Donc $d(\alpha, z) \geq k$ ce qui contredit l'hypothèse faite sur l.
— De même s'il existe un sac S contenant β sur un chemin entre deux sacs contenant respectivement x et α.
— Sinon il existe un sac S contenant un séparateur de x, α et β. Donc S contient trois sommets z_1, z_2 et z_3 tels que z_1 soit sur le chemin de α à β passant par y, z_2 soit entre x et β sur le chemin de longueur c et z_3 soit entre x et α sur le chemin de longueur a. Le plus court chemin de z_1 à z_2 est de longueur plus petite que k (d'aprèse l'hypothèse faite sur l), donc il reste sur le cercle de longueur $a + c$ et passe par β. De même le plus court chemin de z_1 à z_3 reste sur le cercle de longueur $a + c$ et passe par α. De même le plus court chemin de z_3 à z_2 reste sur le cercle de longueur $a + c$ et passe par x. Donc ces trois chemins mis bouts à bouts forment le cercle de longueur $a + c$. D'où $d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3) + d(z_3, z_1) = a + c$. Donc au moins une de ces distances est plus grande que $\lceil \frac{a+c}{3} \rceil$ et donc est plus grande que k car $k \leq \frac{a+c}{3}$. Cela contredit l'hypothèse faite sur l.

On a une donc contradiction.
D'où $tl(G) \geq k$.

□

Nous prouvons maintenant le théorème 1.

Lemme 1. *Si on a $b \leq \lceil \frac{a+b}{3} \rceil$ alors $tl(G) = \lceil \frac{a+b}{3} \rceil$ pour tout G tel que défini dans cette sous-section.*

Démonstration. Soit G tel que défini dans cette sous-section et tel que $b \leq \lceil \frac{a+b}{3} \rceil$.
D'après la proposition 1 on a $tl(G) \geq \lceil \frac{a+b}{3} \rceil$. Il suffit donc d'exhiber une tree-decomposition de G de taille $\lceil \frac{a+b}{3} \rceil$.

Soit α le sommet du chemin de taille a à une distance de $\lceil \frac{a+b}{3} \rceil$ de x sur ce chemin.
Soit β le sommet du chemin de taille a à une distance de $\lceil \frac{a+b}{3} \rceil - b$ de y sur ce chemin.
On remarque que $d(\alpha,\beta) \leq a - \lceil \frac{a+b}{3} \rceil - \lceil \frac{a+b}{3} \rceil + b \leq \lceil \frac{a+b}{3} \rceil$.
On va alors distinguer deux sous cas : $c \leq \lceil \frac{a+b}{3} \rceil$ et $\lceil \frac{a+b}{3} \rceil < c$.

Si $\lceil \frac{a+b}{3} \rceil < c$.
Soit γ le sommet du chemin de taille c à une distance de $\lceil \frac{a+b}{3} \rceil - b$ de y sur ce chemin.
Soit δ le sommet du chemin de taille c à distance $\lceil d \rceil$ de γ et $\lfloor d \rfloor$ de x sur ce chemin, avec $d = \frac{b+c-\lceil \frac{a+b}{3} \rceil}{2}$.
On a $\lceil d \rceil \leq \lceil \frac{a+b}{3} \rceil$ car $b + c \leq a + b$. De plus $b \geq 1$ et $c > \lceil \frac{a+b}{3} \rceil$, donc $d \geq 1$ et δ est bien défini.
On construit alors la tree-decomposition de G de la figure 5.

Tous les sacs ont un diamètre plus petit que $\lceil \frac{a+b}{3} \rceil$. De plus $d(x, \alpha) = \lceil \frac{a+b}{3} \rceil$. C'est donc une tree-decomposition de length $\lceil \frac{a+b}{3} \rceil$.

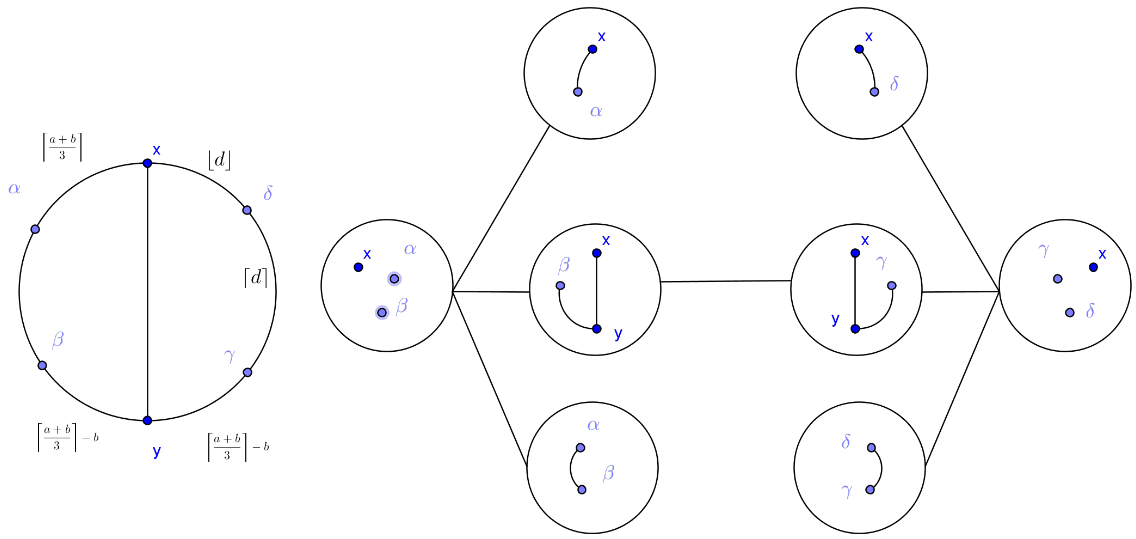


Fig 5

Si $c \leq \lceil \frac{a+b}{3} \rceil$.
On construit la tree-decomposition de G suivante :

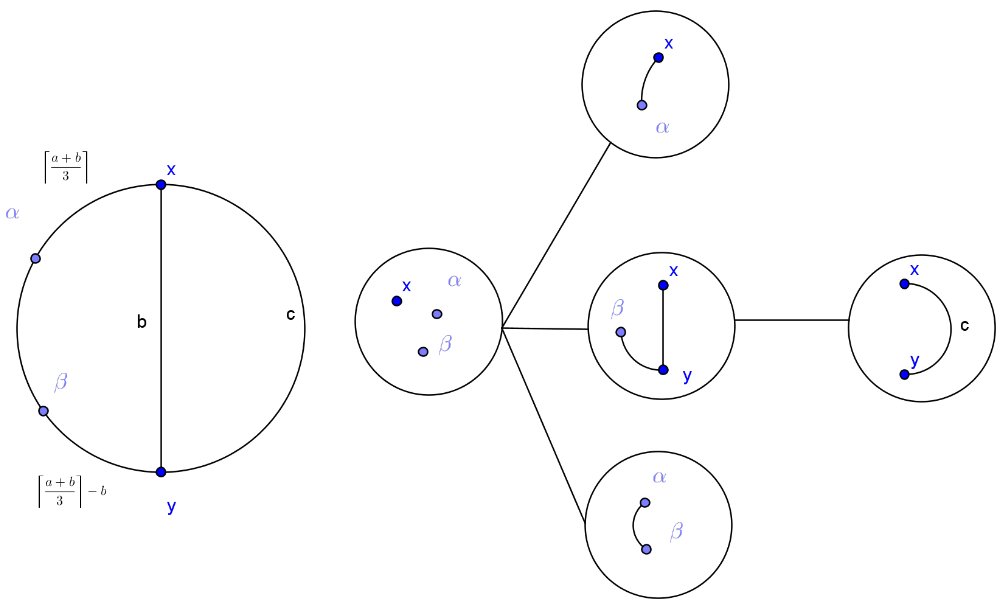


Fig 5bis

Tous les sacs ont un diamètre plus petit que $\lceil \frac{a+b}{3} \rceil$. De plus $d(x, \alpha) = \lceil \frac{a+b}{3} \rceil$. C'est donc un tree-decomposition de length $\lceil \frac{a+b}{3} \rceil$.

Donc on a bien $tl(G) = \lceil \frac{a+b}{3} \rceil$. $\square$

Lemme 2. *Si on a* $\left\lceil\frac{a+b}{3}\right\rceil \leq b \leq \left\lceil\frac{a+c}{3}\right\rceil$ *alors* $tl(G) = b$ *pour tout* G *tel que défini dans cette sous-section.*

Démonstration. Soit G tel que $\left\lceil\frac{a+b}{3}\right\rceil \leq b \leq \left\lceil\frac{a+c}{3}\right\rceil$.

On va d'abord montrer que $tl(G) \leq b$ en exhibant une tree-decomposition de length b.
On remarque que $\left\lceil\frac{a+b}{3}\right\rceil \leq b$ implique $b \geq \left\lceil\frac{a}{2}\right\rceil$.
Soit α le sommet du chemin de longueur a à distance $\left\lceil\frac{a}{2}\right\rceil$ de x.
Soit β le sommet du chemin de longueur c à distance $\left\lceil\frac{c}{2}\right\rceil$ de x.
On construit la tree-decomposition de la figure 6.
Tous les sacs de cette tree-decomposition ont un diamètre au plus b car $b \geq \left\lceil\frac{a}{2}\right\rceil \geq \left\lceil\frac{c}{2}\right\rceil$. De plus $d(x, y) = b$.
Donc le length de cette tree-decomposition est b.
Donc $tl(G) \leq b$.

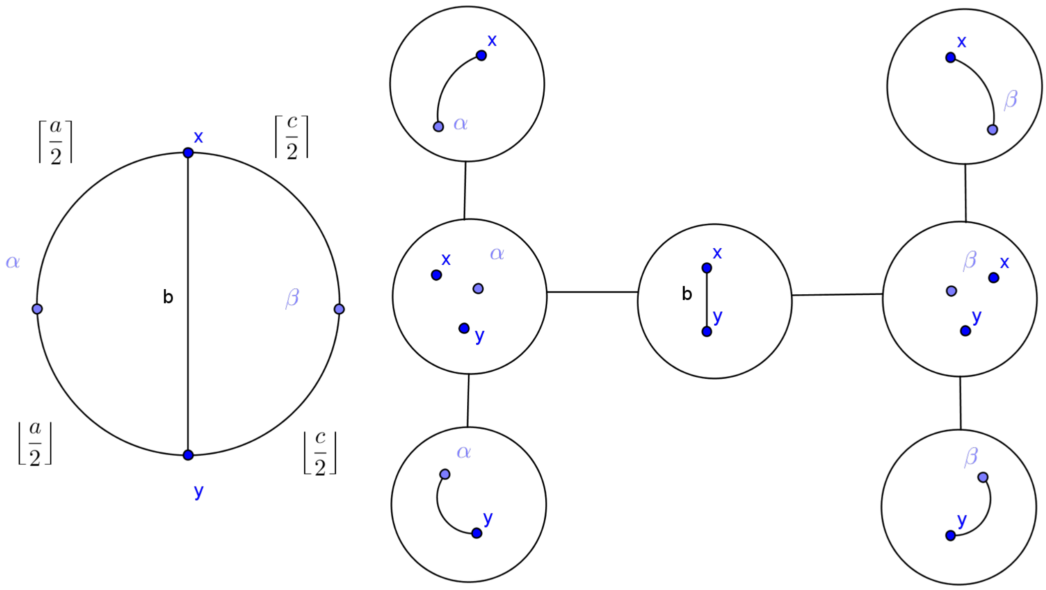


Fig 6

On a $b \leq b$ et $3b \leq a + c$ (car $b \leq \left\lceil\frac{a+c}{3}\right\rceil$).
Donc d'après la proposition 2 (avec $k = b$), $tl(G) \geq b$.
Donc on a bien $tl(G) = b$. $\square$

Lemme 3. *Si on a* $b \geq \left\lceil\frac{a+c}{3}\right\rceil$ *alors* $tl(G) = \left\lceil\frac{a+c}{3}\right\rceil$.

Démonstration. On va distinguer 3 cas en fonction de la congruence de $a + c$ modulo 3.

Si $a + c \equiv 0[3]$, on sait déjà que $tl(G) \leq \left\lceil\frac{a+c}{3}\right\rceil$ d'après la proposition 1.
De plus on a $\left\lfloor\frac{a+c}{3}\right\rfloor \leq b$ et $3 * \left\lfloor\frac{a+c}{3}\right\rfloor \leq a + c$. Donc d'après la proposition 2 on a $\left\lfloor\frac{a+c}{3}\right\rfloor \leq tl(G)$.
Or ici $\left\lceil\frac{a+c}{3}\right\rceil = \left\lfloor\frac{a+c}{3}\right\rfloor$.
D'où $tl(G) = \left\lceil\frac{a+c}{3}\right\rceil$.

Si $a + c \equiv 2[3]$, posons $a + c = 3p + 2$ et montrons que $tl(G) = p + 1$.
Soit α le point du chemin de longueur a à distance $p + 1$ de x (cf Fig7).
Soit β le point du chemin de longueur c à distance $p + 1$ de x.
On a $b \geq p + 1$ car $b \geq \left\lceil \frac{a+c}{3} \right\rceil$. Donc α et β sont bien définis car $a \geq c > b \geq p + 1$.
Supposons par l'absurde qu'il existe une tree-decomposition de G de length $l < p + 1$.
Considérons les positions relatives de x, α et β dans la tree-decomposition.
On remarque qu'aucun sac contenant x ne peut contenir α ou β.
On va donc traiter les autres cas :

— S'il existe au moins un sac contenant α et β. On considère les deux sacs les plus proches dans la tree-decomposition tels que l'un contienne α et β et l'autre contient x. On sait qu'ils sont distincts. De plus on est dans une tree-decomposition, donc dans un arbre, donc, par connexité et acyclicité des arbres, ces deux sacs sont bien définis. On note X celui contenant x et Y l'autre. Dans le chemin de X à Y le voisin de Y ne contient pas α et β. On suppose ici qu'il ne contient pas α, le cas où il ne contient pas β étant symétrique. On considère l'ensemble Z des sommets du chemin de x à α sur le chemin de longueur a contenus dans Y. On a $Z = \{\alpha\}$ sinon il existe un sommet dans Y à distance au moins $p+1$ de β. On note U le sous arbre de la tree-decomposition obtenu en enlevant Y et tous les sacs n'étant ainsi plus connectés à X. On considère les sommets du chemin de α à x sur le chemin de longueur a qui sont dans un sac de U. Il en existe au moins 1 qui est x. On note α' celui qui est le plus proche de α dans G. On remarque que $\alpha' \neq \alpha$ d'après l'hypothèse faite que le voisin de Y ne contenait pas α. On note α'' le voisin de α' sur le chemin de longueur a tel que α'' soit entre α et α' sur ce chemin. Il existe un sac de la tree-decomposition contenant α'' et α'. Mais par définition de α', α'' n'est pas dans U. Donc, puisque l'ensemble de sacs contenant α' est un sous-arbre de la tree-decomposition, par définition de U, α' est dans Y, contredisant le fait que $Z = \{\alpha\}$. Donc α et β ne peuvent pas être dans le même sac.
— Si x est dans un sac S sur le chemin entre deux sacs contenant respectivement α et β, alors S contient un séparateur de α et β. Donc S contient un sommet z qui est sur le chemin entre α et β passant par y. Donc $d(x, z) \geq p + 1$, car $b \geq p + 1$.
— Si α est dans un sac S sur le chemin entre deux sacs contenant respectivement x et β, alors S contient un séparateur de x et β. Donc S contient un sommet z qui est sur le chemin entre α et β sur le chemin de longueur c. Donc $d(x, z) \geq p + 1$, car $d(\alpha, \beta) = p$ et $\beta \neq z$.
— De même si β est dans un sac sur le chemin entre deux sacs contenant respectivement x et α.
— Sinon il existe un sac S contenant un séparateur de x, α et β. Donc S contient trois sommets z_1, z_2 et z_3 tels que z_1 soit sur le chemin de α à β passant par y, z_2 soit entre x et β sur le chemin de longueur c et z_3 soit entre x et α sur le chemin de longueur a. Le plus court chemin de z_1 à z_2 est de longueur plus petite que p, donc il reste sur le cercle de longueur $a+c$ et passe par β. De même le plus court chemin de z_1 à z_3 reste sur le cercle de longueur $a+c$ et passe par α. De même le plus court chemin de z_3 à z_2 reste sur le cercle de longueur $a+c$ et passe par x. Donc ces trois chemins mis bouts à bouts forment le cercle de longueur $3p+2$. D'où $d(z_1, z_2)+d(z_2, z_3)+d(z_3, z_1) = 3p+2$. Donc au moins une de ces distances est plus grande que $p+1$. Cela contredit l'hypothèse faite sur l.

Donc $tl(G) \leq p + 1$.
De plus d'après la proposition 1 on a $tl(G) \geq p + 1$.
Donc on a bien $tl(G) = p + 1$.

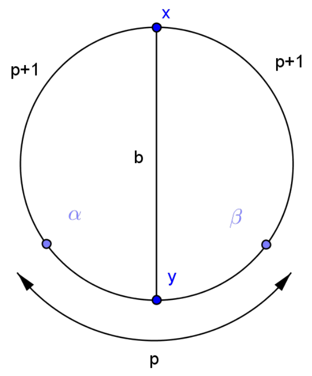


Fig 7

On remarque que le même raisonnement fonctionne avec $a + c \equiv 1[3]$ i.e. $a + c = 3p + 1$.
On pose α et β les deux sommets à distance p de x sur les chemins de longueur a et c. On considère, par l'absurde, une tree-decomposition de G de length l, $l < p + 1$. α et β ne peuvent pas être dans le même sac, ils sont trop éloignés. De la même façon que l'on a prouvé dans le cas précédent que α et β ne pouvaient pas se trouver dans un même sac, on peut prouver que x et α ne se trouvent pas dans un même sac. De même pour x et β. Les autres points sont identiques et on obtient le résultat voulu. □

Donc le théorème 1 est vrai.

1.2 Généralisation

On va maintenant généraliser le théorème 1 au cas des graphes G avec n chemins, $n \geq 3$.
On note a_1, a_2,...,a_n la taille de ces chemins, tels que $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$.

Théorème 2. *Pour tout graphe G tel que défini ci-dessus on a :*

— *Si* $a_n \leq \lceil \frac{a_1+a_n}{3} \rceil$ *alors* $tl(G) = \lceil \frac{a_1+a_n}{3} \rceil$.

— *Si* $\lceil \frac{a_1+a_n}{3} \rceil \leq a_n \leq \lceil \frac{a_1+a_2}{3} \rceil$ *alors* $tl(G) = a_n$.

— *Si* $\lceil \frac{a_1+a_2}{3} \rceil \leq a_n$ *alors* $tl(G) = \lceil \frac{a_1+a_2}{3} \rceil$.

Remarque . Pour $n = 3$ on retrouve le théorème 1 avec $a_1 = a$, $a_2 = c$ et $a_3 = b$.

Remarque . Si $a_1 = 2$ on a $tl(G) = 2$ si pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ $a_i = 2$ et sinon on a $tl(G) = 1$ ce qui correspond bien au théorème.
Si $a_1 = 1$ on a $tl(G) = 1$ ce qui correspond bien au théorème.
Dans la suite on supposera $a_1 \geq 3$, ce qui permettra de généraliser les tree-decompositions utilisées précédemment.

Démonstration. Nous allons procéder par induction sur le nombre de chemins de G :
Soit $n \geq 3$. Alors pour tout graphe G à n chemins le théorème 2 donne bien la treelength de G.

Initialisation :
Soit G un graphe à trois chemins. D'après la remarque précédente ce cas correspond au théorème 1, qui a été prouvé.

Hérédité :
Soit $n > 3$ tel que le théorème 2 s'applique sur les graphes à $n-1$ chemins.
Soit G un graphe à n chemins.
On considère H le graphe obtenu à partir de G en enlevant le chemin de taille a_3. On remarque que comme $n > 3$, on n'enlève pas le chemin de longueur a_n.

Montrons que H est isométrique dans G :
H est un sous-graphe de G donc pour tous sommets u et v de H, on a $d_H(u,v) \geq d_G(u,v)$ avec d_G la distance dans G et d_H la distance dans H.
Supposons qu'il existe u et v deux sommets de H tels que $d_H(u,v) > d_G(u,v)$. Alors tous les plus court chemin de u à v dans G passent par le chemin de taille a_3, sinon ils sont aussi dans H. Donc ils sont de la forme $u, u', ..., u'', x, C_{a_3}, y, v'', ..., v', v$ ou $u, u', ..., u'', y, C_{a_3}, x, v'', ..., v', v$ où C_{a_3} représente les sommets entre x et y sur le chemin de taille a_3. Les deux cas étant les mêmes, on ne traitera que le premier. On a $a_3 \geq a_n$. Donc le chemin $u, u', ..., u'', x, C_{a_n}, y, v'', ..., v', v$ est un chemin au moins aussi court de u à v dans G. Les deux chemins ont donc la même longueur par définition de d_G. Or ce chemin existe aussi dans H. D'où $d_H(u,v) = d_G(u,v)$. ce qui contredit $d_H(u,v) > d_G(u,v)$. Donc de tels u et v n'existent pas.
Donc H est bien isométrique dans G.

H a $n-1$ chemins, on peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence.
On va distinguer trois cas : $a_n \leq \lceil \frac{a_1+a_n}{3} \rceil$, $\lceil \frac{a_1+a_n}{3} \rceil \leq a_n \leq \lceil \frac{a_1+a_2}{3} \rceil$ et $a_n \geq \lceil \frac{a_1+a_2}{3} \rceil$.

— Si $a_n \geq \lceil \frac{a_1+a_2}{3} \rceil$.
  Alors $tl(H) = \lceil \frac{a_1+a_2}{3} \rceil$ d'après l'hypothèse de récurrence, d'où $tl(G) \geq \lceil \frac{a_1+a_2}{3} \rceil$ car H est isométrique dans G.
  Montrons que $tl(G) \leq \lceil \frac{a_1+a_2}{3} \rceil$ en exhibant une tree-decomposition de length $\lceil \frac{a_1+a_2}{3} \rceil$ de G.
  $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$ on note z_i le sommet du chemin de longueur a_i à une distance $\lceil \frac{a_1+a_2}{3} \rceil$ de x sur ce chemin. Pour tout $i \geq 3$ tel que $a_i \leq \lceil \frac{a_1+a_2}{3} \rceil$ on prend $z_i = y$. Si $a_2 \leq \lceil \frac{a_1+a_2}{3} \rceil$ on prend pour z_2 le sommet à distance $\lceil \frac{a_1+a_2}{3} \rceil - a_2$ de y sur le chemin de taille a_1.
  On considère la tree-decomposition de G des figures 8 et 8bis, qui sont les mêmes que celles des figures 3 et 3bis mais généralisées à n chemins. Ces tree-decompositions ont une length de $\lceil \frac{a_1+a_2}{3} \rceil$.
  D'où $tl(G) \leq \lceil \frac{a_1+a_2}{3} \rceil$.
  Donc dans ce cas on a bien $tl(G) = \lceil \frac{a_1+a_2}{3} \rceil$.

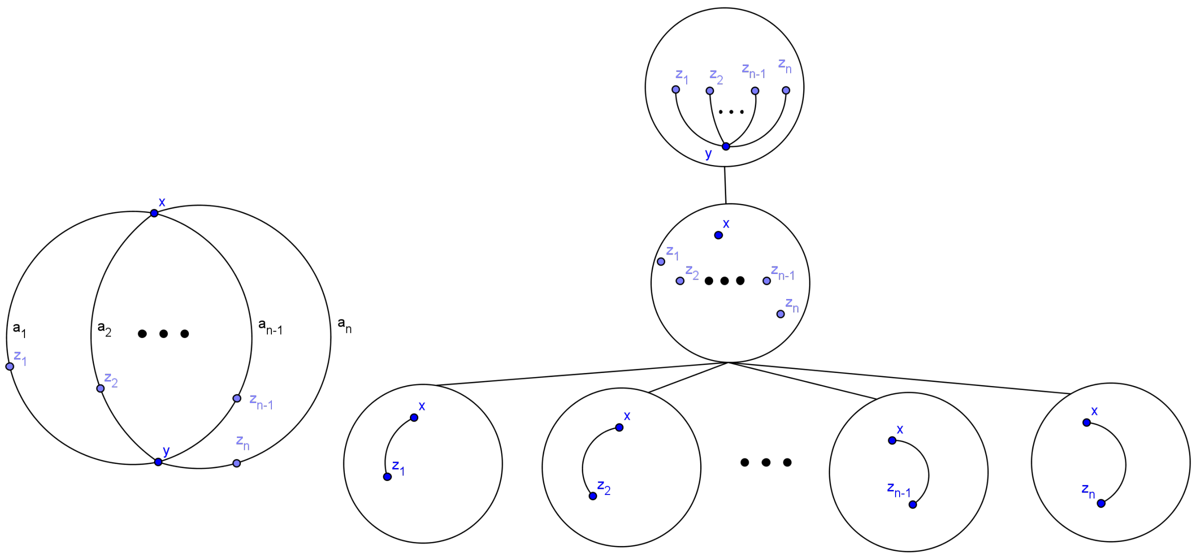


Fig 8

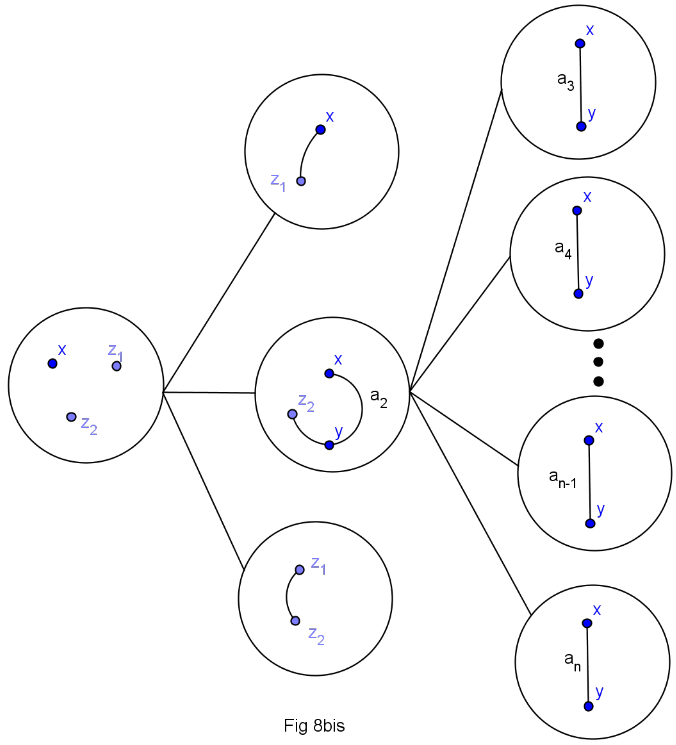


Fig 8bis

— Si $a_n \leq \left\lceil \frac{a_1+a_n}{3} \right\rceil$.
Alors, d'après l'hypothèse de récurrence, $tl(H) = \left\lceil \frac{a_1+a_n}{3} \right\rceil$, d'où $tl(G) \geq \left\lceil \frac{a_1+a_n}{3} \right\rceil$.
De la même façon que l'on vient de généraliser la construction des figures 3 et 3bis, on peut généraliser celle des figures 5 et 5bis pour trouver une tree-decomposition de G de length $\left\lceil \frac{a_1+a_n}{3} \right\rceil$.
On a donc bien $tl(G) = \left\lceil \frac{a_1+a_n}{3} \right\rceil$.

— Si $\lceil \frac{a_1+a_n}{3} \rceil \leq a_n \leq \lceil \frac{a_1+a_2}{3} \rceil$.
  Alors, d'après l'hypothèse de récurrence, $tl(H) = a_n$, d'où $tl(G) \geq a_n$.
  On peut généraliser la construction de la figure 6 à des graphes à n chemins pour trouver une tree-decomposition de G de length a_n.
  Donc on a bien $tl(G) = a_n$.

Donc le théorème 2 permet bien de calculer la treelength de G.
Donc le théorème 2 permet bien de calculer la treelength de graphes à n chemins.

Donc le théorème 2 est vrai. □

2 Graphes séries-parallèles et cycles

On remarque que les minorations trouvées dans la partie précédente sont liées au fait que dans le cercle il n'existait pas de raccourci trop court entre deux point du cercle étudié. Dans la suite nous allons généraliser ce principe à des graphes quelconques (théorème 3).

Soit G un graphe et C un cycle de G de taille c.
On note k_C le plus grand entier tel que pour tout (u, v) sommets de C on a soit $d_G(u, v) = d_C(u, v)$, soit $d_G(u, v) \geq k_C$. Il est possible que k_C ne soit pas définit. C'est le cas uniquement quand C est isométrique dans G. On prend alors $k_C = +\infty$.
On remarque que $k_C = min\{d_G(u, v)|\forall u \in V(C), \forall v \in V(C)$ tels que $d_G(u, v) \neq d_C(u, v)\}$ quand C n'est pas isométrique.
On pose $l_C = min(k_C, \lceil \frac{c}{3} \rceil)$.

Théorème 3.
Soit G un graphe et C un cycle de G
Alors $tl(G) \geq l_C$.

Démonstration. On va montrer le théorème 3 en distinguant 3 cas en fonction de la congruence de c modulo 3.
Dans la démonstration pour alléger l'écriture on notera k pour k_C.

Si $c \equiv 0[3]$.
Soit G un graphe.
Soit C un cycle de G de longueur $c = 3p$.
Montrons par l'absurde que $tl(G) \geq l_C$.

Supposons qu'il existe (T, X) une tree-decomposition de G de length l, avec $l < min(k, p)$.
Soient x, y et z trois sommets de C tels que $d_C(x, y) = d_C(x, z) = d_C(y, z) = p$ (cf Fig9). On va étudier leurs position relatives dans (T, X).
On a $d_G(x, y) \geq min(k, p)$, $d_G(x, z) \geq min(k, p)$ et $d_G(y, z) \geq min(k, p)$.
On a $l < min(k, p)$, donc il n'existe pas de sac dans X contenant au moins deux des trois sommets x, y et z.
On va donc traiter les autres cas :
— S'il existe un sac S contenant x sur le chemin d'un sac contenant z à un sac contenant y. Alors S contient un séparateur de y et z. Donc S contient un sommet α de C sur le chemin de y à z de

C ne passant pas par x. On a $d_C(x, \alpha) \geq p$. Donc $d_G(x, \alpha) \geq min(k, p)$, par définition de k. Donc $d_G(x, \alpha) > l$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur (T, X). Ce cas n'est donc pas possible.

— De même les cas symétriques où il existe un sac S contenant y (resp. z) sur le chemin d'un sac contenant x à un sac contenant z (resp. y) ne sont pas possible.

— Donc il existe un sac S contenant un séparateur de x, y et z. On note α (resp. β et γ) le sommet du chemin sur C de x (resp. y et z) à y (resp. z et x) de ce séparateur. Si $d_C(\alpha, \beta) > p$ alors $d_G(\alpha, \beta) > l$ par définition de l et k. D'où $d_C(\alpha, \beta) \leq p$. Donc le plus court chemin de α à β dans C passe par y. De même le plus court chemin de β (resp. γ) à γ (resp. α) dans C passe par z (resp. x). Donc mis bouts à bouts ces 3 chemins forment le cercle C. Donc $d_C(\alpha, \beta) + d_C(\alpha, \gamma) + d_C(\beta, \gamma) = 3p$. Donc au moins une des trois distances est supérieure ou égale à p, ce qui contredit $l < min(p, k)$.

Donc (T, X) n'existe pas.
Donc G n'a pas de tree-decomposition de length strictement inférieure à $min(k, p)$.
D'où $tl(G) \geq min(k, p)$ si $c \equiv 0[3]$.

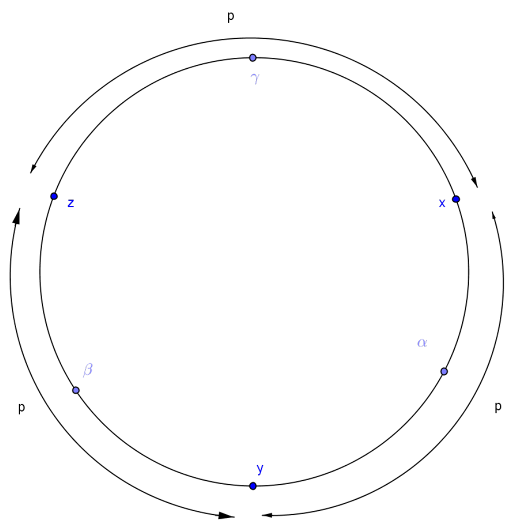


Fig9

Si $c \equiv 2[3]$.

Soit G un graphe.
Soit C un cycle de G de longueur $c = 3p + 2$.
Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout (u, v) sommets de C on a soit $d_G(u, v) = d_C(u, v)$, soit $d_G(u, v) \geq k$.
Montrons par l'absurde que $tl(G) \geq min(k, p + 1)$.

Supposons qu'il existe (T, X) une tree-decomposition de G de length l, avec $l < min(k, p + 1)$.
Soient x, y et z trois sommets de C tels que $d_C(x, z) = d_C(y, z) = p + 1$ et $d_C(x, y) = p$. On va étudier leurs positions relatives dans (T, X).
On remarque qu'aucun sac ne peut contenir x et z et aucun sac ne peut contenir y et z.
On va étudier les autres cas :

— S'il existe un sac contenant x et y. On considère les deux sacs les plus proches dans la tree-decomposition tels que l'un contient x et y et l'autre contient z. On sait qu'ils sont distincts. De plus on est dans une tree-decomposition, donc dans un arbre, donc, par connexité et acyclicité des arbres, ces deux sacs sont bien définis. On note X celui contenant x et y et Z l'autre. Dans le chemin de X à Z le voisin de X, noté X', ne contient pas x et y. On suppose ici qu'il ne contient pas x, le cas où il ne contient pas y étant symétrique. On considère l'ensemble A des sommets du chemin de x à z de longueur $p + 1$ de C contenus dans X. Pour tout sommet $a \in A$, a différent de x, on a $d_C(y, a) \geq p + 1$. Donc si $A \neq \{x\}$ alors le diamètre de X dans C est au moins $p + 1$, et donc son diamètre dans G est au moins $l + 1$, ce qui montre que ce cas n'est pas possible. On

va montrer que $A \neq \{x\}$.
On note C_{xz} l'ensemble des sommets du chemin de x à z de longueur $p+1$ de C privé de x. On note U le sous arbre de la tree-decomposition obtenu en enlevant X et tous les sacs n'étant ainsi plus connectés à Z. On note x' le sommet de C_{xz} le plus proche de x dans C contenu dans au moins un sac de U. x' existe car z est sommet de C_{xz} et appartient à Z qui est un sac de U. Par hypothèse $x \notin U$ d'où $x' \neq x$. On note x'' son voisin sur le chemin le plus court de C de x' à x. On sait que x'' n'est pas dans U et que (T, X) contient un sac contenant x' et x''. Donc, puisque l'ensemble de sacs contenant x' est un sous-arbre de (T, X), par définition de U, x' est dans X. Donc x' est dans A. Donc ce cas n'est pas possible.

— Dans les cas restants aucun des trois points x, y et z ne sont dans un même sac. Ces cas sont analogues à ceux du cas précédent et se traitent de la même façon.

Donc (T, X) n'existe pas.
Donc G n'a pas de tree-decomposition de length strictement inférieure à $min(k, p+1)$.
D'où $tl(G) \geq min(k, p+1)$ si $c \equiv 2[3]$.

Si $c \equiv 1[3]$.
Soit G un graphe.
Soit C un cycle de G de longueur $c = 3p+1$.
Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout (u, v) sommets de C on a soit $d_G(u, v) = d_C(u, v)$, soit $d_G(u, v) \geq k$.
Montrons par l'absurde que $tl(G) \geq min(k, p+1)$.

Supposons qu'il existe (T, X) une tree-decomposition de G de length l, avec $l < min(k, p+1)$.
Soient x, y et z trois sommets de C tels que $d_C(x, z) = p+1$ et $d_C(x, y) = d_C(y, z) = p$. On va étudier leurs positions relatives dans (T, X).
On remarque qu'aucun sac ne peut contenir x et z.
Dans les cas où un sac contient deux des trois sommets, la démonstration est la même que dans le cas précédent, et dans le cas où aucun sac ne contient deux des trois sommets la démonstration est la même que pour le premier cas.
D'où le résultat voulu pour $c \equiv 1[3]$.

$\square$

On a donc démontré le théorème 3.

On peut se demander à quel point les minorations obtenues par le théorème 3 se rapprochent de la treelength.
On note $M_G = max\{l_C | C \text{ est un cycle de } G\}$, c'est la meilleure minoration que peut donner le théorème 3.

Conjecture 1. *Soit G un graphe série-parallèle contenant au moins un cycle.*
Alors $tl(G) = M_G$.

Remarque . Les graphes série-parallèle sans cycle sont exactement les chemins et leur treelength vaut 1.

La remarque suivante donne les éléments qui nous ont poussés à faire cette conjecture.

Remarque .

— La conjecture est vérifiée pour les graphes traités précédemment, c'est à dire les graphes composés de n chemins de x à y.
— Si on met en série deux graphes série-parallèle G_1 et G_2 on obtient un nouveau graphe série-parallèle G tel que $tl(G) = max(tl(G_1), tl(G_2))$ et $M_G = max(M_{G_1}, M_{G_2})$.
— Si on ajoute une arête entre deux sommets adjacents d'un graphe série-parallèle G on obtient un nouveau graphe série-parallèle G' de même treelength et tel que $M_{G'} = M_G$.
— Si on subdivise une arête d'un graphe série-parallèle G on obtient un nouveau graphe série-parallèle G' tel que $tl(G) \leq tl(G') \leq tl(G) + 1$ et $M_G \leq M_{G'} \leq M_G + 1$.

Démonstration. Démontrons les affirmations de la remarque précédente.

Dans le cas des graphes composés de n chemins de x à y, on peut le théorème 2 permet de connaître leur treelength. On reprend ici les notations de la partie précédente. Soit C un cycle de G. Alors C est constitué de deux chemins de x à y. S'il contient le chemin de longueur a_n alors C est isométrique dans G et $k_C = c$ et $l_C = \lceil \frac{c}{3} \rceil$. La plus grande minoration obtenue sur l'ensemble des cycles de ce type est $\lceil \frac{a_1+a_n}{3} \rceil$. Si C ne contient pas le chemin de longueur a_n alors $k_C = a_n$ et $l_C = min(a_n, \lceil \frac{c}{3} \rceil)$. La plus grande minoration obtenue sur l'ensemble des cycles de ce type est $min(a_n, \lceil \frac{a_1+a_2}{3} \rceil)$. Donc $M_G = max(\lceil \frac{a_1+a_n}{3} \rceil, min(a_n, \lceil \frac{a_1+a_2}{3} \rceil))$, ce qui correspond bien au théorème 2.

Soit G_1 et G_2 deux graphes série-parallèle. On note G le graphe série-parallèle obtenu en mettant en série G_1 et G_2 en identifiant t_1 et s_2.
G_1 et G_2 sont isométriques dans G donc $tl(G) \geq max(tl(G_1), tl(G_2))$. De plus on peux construire une tree-decomposition de G de length $max(tl(G_1), tl(G_2))$. Soit (T_1, X_1) une tree-decomposition de G_1 de length $tl(G_1)$ et (T_2, X_2) une tree-decomposition de G_2 de length $tl(G_2)$. Soit $X = X_1 \cup X_2$. Soit T l'arbre obtenu à partir de T_1 et T_2 en ajoutant une arête entre un sommet de T_1 dont le sac contient t_1 et un sommet de T_2 dont le sac contient s_2. (T, X) est une tree-decomposition de G de length $max(tl(G_1), tl(G_2))$. Donc $tl(G) = max(tl(G_1), tl(G_2))$.
Un cycle de G est soit un cycle de G_1, soit un cycle de G_2. De plus tout plus court chemin dans G entre deux sommets de G_1 (resp. G_2) reste dans G_1 (resp. G_2). Donc $M_G = max(M_{G_1}, M_{G_2})$.

Le troisième point est trivial.

Soit G un graphe série-parallèle et G' le graphe série-parallèle obtenu en subdivisant une arête de G. On note x le nouveau sommet et y et z ses deux voisins.
Soit (T, X) une tree-decomposition de G de length $tl(G)$, alors en ajoutant x dans un sac contenant y et z (un tel sac existe car yz est une arête de G) on obtient une tree-decomposition de G' de length au plus $tl(G) + 1$ car toutes les distances augmentent d'au plus 1. D'où $tl(G') \leq tl(G) + 1$. Soit (T', X') une tree-decomposition de G' de length $tl(G')$. Soit (T, X) telle que $T = T'$ et X est construit à partir de X' en remplaçant toutes les occurrences de x par y. Dans (T', X') il existait un sac contenant x et y, donc l'ensemble des sacs de (T, X) contenant y est connexe. De plus dans (T', X') il existait un sac contenant x et z, donc dans (T, X) il existe un sac contenant y et z. Donc (T, X) est une tree-decompositon de G. De plus sa length est inférieure ou égale à celle de (T', X'). D'où $tl(G) \leq tl(G')$. Donc on a bien $tl(G) \leq tl(G') \leq tl(G) + 1$.
On a trivialement $M_G \leq M_{G'} \leq M_{G+1}$ grâce à la définition de M_G. □

Remarque . Les graphes planaires extérieurs
Un graphe est dit planaire s'il existe une représentation dans le plan de ce graphe telle qu'aucune arête n'en croise une autre. Dans une représentation planaire d'un graphe les régions de l'espace délimitées par les arêtes sont appelées des faces. La face extérieure est la face non bornée. Un graphe est dit planaire extérieur s'il existe une représentation dans le plan de ce graphe telle qu'aucune arête n'en croise une autre et que tous les sommets du graphes appartiennent à la face extérieure, c'est-à-dire qu'aucun sommet n'est entouré par des arêtes.
On remarque que la conjecture est vérifiée pour les graphes planaires extérieurs.

Démonstration. Dans le cas des graphes planaires extérieurs on sait que leur treelength est $\lceil \frac{c}{3} \rceil$ avec c la cordalité du graphe, c'est à dire la taille du plus grand cycle induit. Or dans un graphe planaire extérieur un cycle C est soit isométrique et $l_C = \lceil \frac{c}{3} \rceil$, soit il n'est pas induit et $l_C = 1$.
En effet si C n'est pas isométrique, alors il existe u et v sommets de C reliés par une corde P tels que $d_G(u, v) = d_P(u, v) < d_C(u, v)$. D'où u et v ne sont donc pas adjacents dans C. On note C_1 et C_2 les deux chemins de u à v dans C et u_1 (resp. u_2) un sommet de C_1 (resp. C_2) qui soient différents de u et v. u_1 et u_2 existent car u et v ne sont pas adjacents dans C. On considère une représentation planaire de G tels que tous les sommets appartiennent à la face extérieure. Si P passe par la face extérieure définie par C alors soit u_1, soit u_2 n'est pas dans la face extérieure de G, ce qui contredit l'hypothèse faite sur la représentation choisie. Donc la corde passe dans la face intérieure définie par C. Alors la corde est une arête (sinon la corde contient un sommet qui n'est pas dans la face extérieure de la représentation). Donc C n'est pas induit dans G et $l_C = 1$. On a donc bien dans ce cas $tl(G) = M_G$. □