Jeux de poursuite-évasion

Mathieu Hilaire
Stage de Licence

Encadrants: Nathann Cohen, Nicolas Nisse and Stéphane Pérennes

équipe-projet COATI
Inria & Univ. Nice Sophia Antipolis, I3S, CNRS

August 21, 2015

Abstract

Dans ce stage, nous étudions un jeu au tour par tour à deux joueurs dans un graphe G. Un groupe de k policiers contrôlé par le premier joueur évolue sur les sommets du graphes, tandis que le second joueur contrôle un voleur se déplaçant lui aussi sur le graphe G. Tour à tour, le voleur se déplace sur une distance s, où s est sa vitesse, puis les policiers peuvent se déplaçer vers un sommet voisin. Le voleur a pour objectif de se positionner un nombre infini de fois à une distance supérieure où égale à d des policiers. Nous étudions ici des liens entre la distance d maximale pour laquelle le voleur peut gagner et le nombre k de policier sur différents types de graphes. Nous étudions également la complexité du problème.

Contents

1 Introduction

La version classique du jeu "des gendarmes et du voleur", ou jeu de poursuite-évasion, est un jeu où un groupe d'agents mobiles (gendarmes, policiers, *etc.*) se déplaçant sur un graphe G doit capturer un agent mobile (voleur, intrus, *etc.*) se déplaçant sur le même graphe (i.e., les policiers doivent faire en sorte qu'au moins un des leurs arrive à se positionner sur le même sommet que le voleur).

Nous allons ici nous intéresser à un problème similaire à cette version classique. La variante qui nous intéresse se distingue du problème en ce que les policiers n'ont ici plus vocations à attrapper le voleur, mais à maintenir une distance minimale entre eux et lui. Ainsi le but de nos policiers est de "surveiller" le voleur et d'empêcher qu'il ne s'éloigne trop de ceux-ci.

Nous étudions ici des cas où le voleur se déplace à une vitesse $s > 1$ et les policiers à une vitesse égale à 1. Le jeu considéré dans ce document est toujours à information complète : le voleur ainsi que les policiers connaissent les positions et les mouvements précédents des autres participants. Le problème auquel on s'intéresse est le suivant : étant donnés un graphe G et un certain nombre k de policiers, quelle est la distance maximale vis à vis des policiers que le voleur puisse atteindre un nombre infini de fois ? Ce problème peut se reformuler de manière duale en : étant donnés une distance d et un graphe G, quel est le nombre minimum k de policiers tel que le voleur ne puisse pas s'éloigner infiniment souvent des policier d'une distance au moins d ?

Cette distance d est, par exemple, de 0 dans une clique où un policier peut toujours venir se placer sur le sommet sur lequel se trouve le voleur, ou bien de 1 dans une grille 2x2 avec un policier, en effet le voleur peut toujours se placer à une distance supérieure ou égale à 1 du policier, en se positionnant sur le sommet opposé au sommet du policier, mais le policier peut toujours l'empêcher de se placer à une distance supérieure stricte à 1 de lui-même, et il lui suffit pour cela de toujours se rapprocher du voleur.

1.1 Etat de l'art

Les problèmes du types "Cops and Robbers" trouvent leur motivation dans différents domaines comme la surveillance de réseaux ou bien la coordination d'agents mobiles. Le problème étudié pendant ce stage trouve lui aussi une motivation dans ces domaines, ne serait-ce que parce qu'une stratégie pour le problème étudié peut permettre de trouver une stratégie pour la version classique du problème.

La version classique du jeu de poursuite-évasion consiste en un jeu tour par tour, information complète, où un groupe de policier doit capturer un voleur dans un graphe. Les policiers gagnent si ils parviennent à faire en sorte qu'un policier se trouve sur le même sommet que le voleur, tandis que le voleur gagne si jamais les policiers sont dans l'incapacité de gagner.

Cette version classique a déjà donné lieu à des résultats, notement le fait que les graphes où les policiers peuvent gagner avec un seul policier soient exactement les "dismantable graphs" [**?**] . Une des questions ouvertes les plus importantes dans l'étude du jeu classique est celle posée par la conjecture de Meyniel [**?**], qui énonce que pour tout graphe de n sommets $O(\sqrt{n})$ policiers sont suffisants pour que le voleur soit attrapé par ces derniers. Par ailleurs, la meilleur borne générale (pour tout graphe) actuelle est que $n * 2^{-(1-o(1))*\sqrt{\log_2 n}}$ policiers sont suffisants pour capturer un voleur dans tout graphe de n sommets [**?**, **?**, **?**]. On notera également le fait que le problème décisionnel de la victoire de n policiers (la capture d'un voleur) dans un graphe G est un problème PSPACE -difficile lorsque les policiers et le voleur se déplacent à la même vitesse. (ref arXiv:1202.6043 [cs.CC])

La variante que l'on étudie est également liée à d'autres problèmes. Par exemple, le problème "eternal domination" consiste en un jeu tour par tour à deux joueur, le premier controlant un groupe de policiers placés sur un ensemble dominant (dominating set) du graphe G (i.e., un ensemble de sommet dont le voisinage est l'ensemble des sommets V), le second ayant possibilité d'attaquer un sommet. Le joueur jouant les policiers doit alors déplaçer un policier vers le sommet victime de l'attaque ; dans le modèle m-eternal dominating set, il peut déplacer plusieurs dont au moins un vers le sommet attaqué. Ce processus se r ́p ète ensuite jusqu'à ce que ou bien l'attaquant gagne, i.e. s'il peut faire en sorte que les policiers soient dans l'incapacité de déplacer un policier vers le sommet attaqué (celui-ci étant trop éloigné des positions des policiers), ou bien, si l'attaquant s'avère dans l'impossibilité de gagner, ce sont les policiers qui gagnent. Pour gagner, les positions des policiers doivent donc nécessairement, après chaque attaque, former un set dominant. L'une des question principale est, étant donné un graphe G, quelle est le nombre minimal de policier nécessaire à la victoire des policiers (nombre d'éternelle domination de G) ? Ce nombre est, par exemple, de 1 sur une clique, ou de 2 dans une grille 2x2.

On compte un certains nombre de résultats sur ce problème, notement, le nombre d'éternelle domination de G est plus grand que la taille du plus petit set dominant de G, ou nombre de domination (et plus grand également que dans le cas du m-éternal dominating set), mais il existe aussi une borne supérieure, égale au nombre minimal de clique nécessaire à une couverture du graphe G. Une des questions ouvertes principales concernant ce problème est de savoir s'il existe un graphe G tel que le nombre d'éternelle domination de G soit exactement égal au nombre de domination de G, tout en étant inférieur au nombre minimal de clique nécessaire à une couverture de G. On sait aujourd'hui qu'un tel graphe doit avoir un degré d'au moins 4 (ref Klostermeyer & Mynhardt (2015a) "Domination, Eternal Domination, and Clique Covering", Discuss. Math. Graph Theory, to appear.) [?]

Le problème de m-eternal dominating set est equivalent au problème étudié, où l'attaquant représenterais le voleur, munis d'une vitesse infinie (ou du moins, supérieure à la taille du graphe), et les policiers devraient maintenir une distance 0 au voleur. Par conséquent, un résultat sur le problème de m-eternal dominating set permet de trouver un résultat sur notre problème, ou du moins sa version avec vitesse infinie du voleur et distance à maintenir pour les policiers nulle.

Il existe également un lien avec les problèmes de patrouille/nettoyage [?, ?, ?], où une équipe d'agents mobiles doit régulièrement surveiller les sommets du graphe G. On dispose dans ce problème d'un graphe G et d'un entier t. La question est de savoir quel est le nombre minimum k d'agents (se déplaçant comme précédemment) pouvant assurer que chaque sommet est surveillé (i.e. à distance à un agent inférieure à la visibilité de ce dernier) au moins une fois chaque t tours Ce problème dispose également de variantes dans lequelles les agents mobiles n'auraient pas tous la même vitesse, ni visibilité.

Des stratégies optimales de parcours de graphes par les agents mobiles ont été trouvées ("close curve", "fence patrolling") pour certains types de graphes . De plus, dans le cas d'un graphe quelconque, trouver une solution au problème de patrouille pour des agents avec des vitesses différentes est NP-Difficile.

Dans ce problème, si la distance de visibilitée est nulle, chaque sommet est toujours à distance inférieure à t d'au moins un policier (sinon, après t coups, aucun policier ne peut être présent sur ledit sommet pour le surveiller). Si il existe une stratégie avec une période t pour le problème de patrouille/nettoyage sur G, alors on peut l'appliquer pour avoir une stratégie pour notre problème sur G, telle que le voleur ne puisse jamais être à distance supérieure à t des policiers.

1.2 Contributions

Nous avons mis en évidence une borne supérieure et une borne inférieure pour différents sous-problèmes, i.e. des problèmes restreint à un type particulier de graphes. Dans une première partie, nous définierons dans le détails les notations employées dans la suite, ainsi que la nature des élements du problème, Puis dans la section dédiée au cas où le graphe est un chemin, nous présenterons les resultats de bornes inférieure et supérieure sur un chemin. en effet pour tout chemin P de longueur n, la distance maximale aux policiers que le voleur puisse atteindre infiniment souvent est comrise entre $\lfloor \frac{n}{4*k} \rfloor$ et $\lceil \frac{n+1}{4*k} \rceil$. Dans la section dédiée aux cycle, nous présenterons les resultats de bornes inférieure et supérieure sur un cycle, à savoir, pour tout cycle Γ de n sommets, la distance maximale aux policiers que le voleur puisse atteindre infiniment souvent est comprise entre $\lfloor \frac{n}{6*k-4} \rfloor \leq$ et $\lceil \frac{n+1}{6*k-4} \rceil$. Dans la section dédiée aux arbres, nous présenterons les resultats de bornes inférieure et supérieure sur un arbre, à savoir, empêcher qu'un voleur puisse atteindre infiniment souvent la distance d dans un arbre de hauteur h nécessite au moins l^{h-2d-1} tandis que $(\sum_{i=0}^{\lceil \frac{h}{4d} \rceil -1} l^{(4i+2)*d})$ policiers sont suffisants. Dans la section dédiée aux grilles, nous présenterons les resultats de bornes inférieure et supérieure sur un grille, à savoir, pour toute $n \times n$ grille G_n, la distance maximale aux policiers que le voleur puisse atteindre infiniment souvent est en $\Omega(n * log(n))$. ainsi que en $O(n^2)$. Par ailleur, nous présenterons un résultat de NP-Completude dans la section dédiée à la complexité, à savoir, le calcul de la distance maximale aux policiers que le voleur peut atteindre dans un graphe G est un calcul NP-difficile lorsqu'on s'interesse à un voleur se déplaçant à vitesse au plus 3.

2 Définitions et notations

Nous allons ici formaliser le carde d'étude du problème :

On définit un graphe comme un ensemble de sommets V muni d'un ensemble d'arêtes E telles que chaque arête soit un ensemble de deux éléments distincts de V. On se restreint ici au cas des graphes simples, i.e. sans boucle, ni arête multiple, et finis. On considère donc un tel graphe $G = (V, E)$ de n sommets.

Dans le jeu suivant, il y a d'une part k policiers et d'autre part un voleur.

Les policiers ainsi que le voleur évoluent sur les sommets du graphe G. Ainsi, à tout instant, un sommet du graphe G peut être vide, contenir le voleur et /ou contenir un nombre arbitraire de policiers.

Le jeu se déroule comme suit : chaque tour commence avec le coup du voleur : le voleur peut se déplacer le long d'un chemin de longueur au plus s (la longueur d'un chemin est son nombre d'arêtes). En particulier, il peut rester immobile. Vient ensuite le coup des policiers : chaque policier peut se déplacer vers un sommet adjacent, ou demeurer immobile. On considère donc les positions au tour t comme celles *après* que les policiers ont joué. Une autre variante serait de considérer les positions comme celles après que le voleur a joué, mais n'est pas la variante abordée principalement.

Une *stratégie* pour un voleur est une fonction qui prend en entrée les différents mouvements passés, et renvoie en sortie le prochain mouvement du voleur. De manière similaire, une *stratégie* pour les policiers est une fonction qui à partir des mouvements passés renvoie l'ensemble des prochains mouvements des policiers. Les positions initiales sont également prises en compte dans la stratégie.

On note les k policers $C_0, C_1, ..., C_{k-1}$.

Les positions des policiers (resp. du voleur) à l'instant t sont notées $pos_t(C_i)$ (resp.$pos_t(R)$) où i est compris entre 0 et k-1 et correspond à l'indice associé au policier.

L'objectif du voleur est de pouvoir maximiser la distance entre lui et les policiers, et ce, un nombre infini de fois, où la distance entre deux sommets v et v' est le nombre d'arêtes d'un plus court chemin de v à v', tandis que les policiers, eux, veulent minimiser la distance maximale que le voleur puisse atteindre infiniment souvent.

On définit la distance $d_k(G)$ comme étant la distance maximale telle que il existe une stratégie du voleur telle que, peu importe la stratégie des k policiers, le voleur peut accèder à un sommet situé à distance au moins $d_k(G)$ de tous les policiers, et ce, autant de fois qu'il le souhaite. Le voleur a donc pour objectif d'atteindre infiniment souvent cette distance, tandis que les policier, eux, veulent fournir une stratégie pour laquelle le voleur ne peut pas être infiniment souvent éloigné d'eux de plus de $d_k(G)$.

On considère dans la suite une vitesse du voleur s égale à 2 pour les différents cas de graphes possibles, à 3 pour la complexité.

On emploieras parfois le racourcit de dire que le voleur a distancé un policier lorsque le voleur est parvenu à se placer à une distance supérieure à d dudit policier. De même, on énonceras parfois qu'un policier protège un sommet si, lorsque le voleur se déplace jusqu'à se trouver sur ce sommet, le policier aura eu le temps nécessaire pour se placer à distance inférieure à d du dit sommet.

Les policiers peuvent avoir différents types de stratégies, et même des stratégies où les policiers ne se déplaçent pas. Ainsi, par exemple, sur un arbre de profondeur 3, une stratégie à un policier peut être de placer le seul policier à la racine de l'arbre, ce qui guarranti que le voleur ne 'éloigne pas de lui d'une distance supérieure stricte à 3, quel que soit la stratégie du voleur.

Le fait que le voleur dispose d'une stratégie lui permettant de distancer k policiers dans un graphe G n'implique pas nécessairement que dans un graphe contenant G le voleur peut en, appliquant la même stratégie dans le graphe restreint à G, distancer k policiers. Dans un chemin de 9 sommets guardé par deux policiers, par exemple, un voleur qui se déplace d'un sommet extrèmal vers un autre peut se placer à une distance supérieure ou égale à 1 des deux policiers au moins une fois lors de son déplacement. (voir la section sur les chemins pour plus de détails sur le cas général dans un chemin) Le voleur possède donc une stratégie lui permettant de se placer à distance supérieure à 1 des policiers autant de fois qu'il le souhaite. Toutefois si on se place dans un graphe contenant un chemin de 9 sommets, la stratégie du voleur reste applicable, mais n'offre plus les mêmes guarranties. Ainsi si on considére une clique de 9 sommets, qui contient un chemin de 9 sommets, le voleur peut tenter d'appliquer la même stratégie sur ce chemin, allant d'une extrèmité à l'autre, mais les policiers, étant sur une clique, pourront toujours se rendre sur le sommet sur lequel se trouve le voleur après que ce dernier ait joué, les policiers auront donc toujours une stratégie empéchant le voleur de se placer à une distance supérieure ou égale à 1 des policiers après que ceux-ci aient joués.

Le fait qu'un graphe contienne un graphe avec une stratégie valide pour les policiers pour empêcher le voleur de s'éloigner d'eux d'une distance supérieure à d ne guarranti pas non plus que la stratégie marche pour le graphe plus grand. Un policier seul peu empêcher un voleur de s'éloigner de lui d'une distance supérieure à 2 sur un chemin de longueur 4. Dans un chemin de longueur 10 en revanche un policier seul ne suffit plus.

On noteras de plus que le problème étudié et ses résultats sont bien distinct de ceux du problème classique. En effet attrapper un voleur nécessite moins de policier que empêcher le voleur de se placer à une distance trop grande des policiers. Par exemple prenons le cas du chemin. Dans un chemin de longueur quelconque, si le voleur se déplace à une vitesse maximale de deux arètes par coup, il suffit d'un policier pour l'arrêter, avec la stratégie du policier de toujours se rapprocher du voleur. Or, pour un chemin de longueur 13, si l'on veut que le voleur ne puisse se trouver à une distance au moins 1 des policiers un nombre infini de fois, il est nécessaire d'avoir plus d'un policier. (en l'occurence, plus de 3 policiers, voir la section dédiée aux chemins pour plus de détails). Plus généralement, la longueur du chemin intervient dans le problème étudié, alors qu'elle n'influe pas sur la possibilité de capturer le voleur avec une quantité de policiers donnée.

On peut également se référer à l'exemple d'une grille nxn, où n policiers peuvent capturer un voleur se déplaçant à vitesse au plus 2, tandis qu'il est nécessaire d'avoir une quantité de policiers en $\Omega(n * log(n))$ pour avoir une stratégie des policiers pour le problème étudié. (pour plus de détails, voir la section dédiée aux grilles)

Le problème se distingue également d'autres problèmes similaires. Par exemple, empêcher un voleur se déplaçant à vitesse au plus 2 de s'éloigner d'une distance supérieure stricte à 1 des policiers nécessite moins de policiers que le problème de m-éternelle domination. En effet si on considère l'exemple d'un arbre enraciné comportant n branches de hauteur 2, un ensemble dominant doit comporter au moins n policiers, et donc une stratégie gagnante pour le problème de m-éternelle domination necessite au moins n policiers. En revanche, un seul policier peut réussir à empêcher un voleur se déplaçant à vitesse au plus 2 de s'éloigner d'une distance supérieure stricte à 1 dudit policier. Le policier se place à la racine, descend d'un cran vers le voleur si ce dernier se rends en une feuille, tout en restant positionné sur la racine si le voleur évolue ailleurs que sur les feuilles. (pour plus de détails sur les arbres, voir la section dédiée aux arbres)

3 Classes de graphes

3.1 Cas du Chemin

Nous étudions ici le cas où le graphe G est un chemin. Cette section est dédiée à la preuve du théorème suivant :

Théorème 1. *Pour tout chemin P de longueur n,* $\lfloor \frac{n}{4*k} \rfloor \leq d_k(P) \leq \lceil \frac{n+1}{4*k} \rceil$.

Nous commençeront par donner une borne inférieure pour $d_k(P)$ avant d'en donner une borne supérieure.

Lemme 1. *Soit P un chemin de longueur n, i.e., composé de n+1 sommets, alors pour tout nombre k de policiers sur ce chemin,* $d_k(P) \geq \lfloor \frac{n}{4*k} \rfloor$.

Proof. Soit d = $\lfloor \frac{n}{4*k} \rfloor$

Soit P = $(v_0, v_1, ..., v_n)$ un chemin de longueur n.

Par définition de d, le chemin contient au moins 4kd noeuds.

Notre stratégie pour le voleur sera de se déplacer le plus rapidement possible d'une extrémitée à l'autre du chemin : Formellement, à l'instant initial le voleur occupe une extrémitée du chemin, arbitrairement, v_0. À chaque tour t, le voleur vas évoluer de v_{2t} à $v_{2(t+1)}$.

Par induction simple, on prouve qu'à tout instant t=2i*d, ou bien le voleur a distancé (ie le voleur est à distance supérieure à d) tous les policier à au moins une étape précédente, ou bien il y a i policiers positionnés dans l'intervale de v_0 à $v_{(4i-1)d-1}$

À l'instant initial il se trouve que ou bien aucun policier n'est à distance inférieure à d du voleur, auquel cas il les a tous distancé, ou bien il y a un policier à distance inférieure à d du voleur, i.e. positionné dans l'intervale de v_0 à v_{d-1}. Le voleur se déplace jusqu'en v_{4d} qu'il atteint au bout de t=2d: le policier qui était dans l'intervale de v_0 à v_{d-1} est alors bien dans l'intervale de v_0 à $v_{3d-1} = v_{(4*1-1)d-1}$ car le nombre de tours écoulés est alors de t=2d et que le policier n'a alors pas pu parcourir une distance supérieure à 2d. On a donc l'initialisation de notre invariant pour i=1.

De plus, si à l'instant t=2i*d ou bien le voleur a distancé (ie le voleur est à distance supérieure à d) tous les policier à une étape précédente, ou bien il y a i policiers positionnés dans l'intervale de v_0 à $v_{(4i-1)d-1}$, et alors :

si le voleur a déja distancé les policiers lors d'une étape précédente, cela reste vrai à l'instant t' = 2(i+1)*d

sinon, il y a i policiers positionnés dans l'intervale de v_0 à $v_{(4i-1)d-1}$, et le voleur est en position v_{4id} d'après notre stratégie, et donc ou bien il n'y a pas de i+1 -ième policier en position $v_{(4i+1)d-1}$ prêt à apréhender le voleur, et alors le voleur aura bien distancé tout les policier, ou bien il y a un policier à distance inférieure à d du voleur : i.e. dans l'intervale de $v_{(4i-1)d+1}$ à $v_{(4i+1)d-1}$ Au tour t' = 2(i+1)*d, le i+1-ème policier est cantonné, comme les i premiers, à l'intervale de v_0 à $v_{(4i+1)d-1+2d} = v_{(4(i+1)-1)d-1}$

Cette stratégie permet donc au voleur de passer d'une extrémitée à l'autre du chemin tout en parvenant à se placer à distance au moins d de tous les policiers. En effet lorsque t = 2k*d, ou bien le voleur a distancé à un moment les policiers, ou bien le voleur est en position v_{4kd} tandis que les policiers sont sur les sommets de v_0 à $v_{(4k-1)d-1}$ et alors le voleur est bien à distance au moins d de tous les policiers

En répetant l'opération, le voleur peut ainsi être à distance au moins d de tous les policiers une infinité de fois, on a donc bien minoration. □

Nous allons maintenant nous interresser à une borne supérieure:

Lemme 2. *Soit P un chemin composé de n+1 sommets, alors pour tout k nombre de policier sur ce chemin,* $d_k(P) \leq \lceil \frac{n+1}{4*k} \rceil$

Proof. On considère le chemin de sommets 0,1, ... , $n-1$ Pour simplifier certaines notations, on appelera déplacement de +a (resp. $-$a) un déplacement d'un sommet x jusqu'au sommet $x + a$ (resp. $x - a$). Pour prouver ce résultat, nous allons nous atteler à la définition d'une stratégie pour les policiers :

Pour chaque policier C_i, si on se place dans un repère centré en $(4i+2)d$ et qu'on note $l_t(i)$ la distance du voleur à cette position, à l'instant t. avec $extr{+}_i = (4i + 2 + 1)d$, et $extr{-}_i = (4i + 2 - 1)d$, alors notre stratégie est :

- Si $|l_t(i)| > 2d$ et $|l_{t+1}(i)| \geq 2d$ alors le policier reste immobile
- Si $|l_t(i)| > 2d$ et $|l_{t+1}(i)| < 2d$ alors le policier se déplace de 1 dans la même direction que le voleur
- Sinon, Si $2d \geq |l_t(i)| > 1$

  -si le voleur se déplace de +2 le policier se déplace de +1 (jusqu'en position $extr{+}_i$ qu'il ne dépasse pas)

  -si le voleur se déplace de -2 le policier se déplace de -1 (jusqu'en position $extr{-}_i$ qu'il ne dépasse pas)

  -si le voleur se déplace de +1 le policier se déplace de +1 si $l_t(i)$ est pair et négatif ou si $l_t(i)$ est impair et positif (jusqu'en position $extr{+}_i$ qu'il ne dépasse pas)

  -si le voleur se déplace de -1 le policier se déplace de -1 si $l_t(i)$ est impair et négatif ou si $l_t(i)$ est pair et positif (jusqu'en position $extr{-}_i$ qu'il ne dépasse pas)

  -sinon il reste immobile
- Si $l_t(i)$=1 (resp -1) le policier reste immobile (ie en position $(4i + 2)d$) sauf si le voleur se déplace de +2,+1 (resp -2,-1) auquel cas il se déplace de +1 (resp -1)
- Si $l_t(i)$=0 le policier reste immobile sauf si le voleur se déplace de +2 (resp -2) auquel cas il se déplace de +1 (resp. -1).

Invariant : il existe i tel que: i) la position du voleur est $x = (4i + 2)d + l$ avec $-2d \leq l \leq 2d$
le i-ième policier, C_i, occupe la position $(4i + 2)d + \lfloor l \rfloor$ si l est positif, $(4i + 2)d + \lceil l \rceil$ si l est négatif.
ii) $\forall j$
si $i \neq j$ alors
si $pos_t(R) > pos_t(C_i)$
$pos_t(C_j) = (4j + 3)d$
si $pos_t(R) < pos_t(C_i)$
$pos_t(C_j) = (4j + 1)d$

On prouve que les invariants peuvent être maintenus:
Soit R le voleur à distance l_t de $V_{(4i+2)d}$ on suppose le policier à distance $\lfloor \frac{l_t}{2} \rfloor$ de ce même sommet.
On applique la stratégie :

- si $|l_t(i)|> 2d$ et $|l_{t+1}(i)|\geq 2d$ alors le policier reste immobile et l'invariant ii) est maintenu. de plus, le policier C_i immobile n'est ici pas celui qui doit vérifier l'invariant i). le policier qui effectue cette action dans ce cas là permet donc d'assurer sa part dans le maintient des invariants.

- si $|l_t(i)|> 2d$ et $|l_{t+1}(i)|< 2d$ alors le policier se déplace de 1 dans la même direction que le voleur. Comme $|l_t(i)|> 2d$, le policier est, au temps t, à distance d de $V_{(4i+2)d}$, par l'invariant ii). le voleur est, au temps t+1, à distance $l_{t+1}(i) < 2d$ de $V_{(4i+2)d}$, de plus, sa position au temps t garranti $l_{t+1}(i) \geq 2(d-1)$ car le voleur ne peut se déplacer d'une distance supérieure à 2 en un tour. Le policier est, après application de la stratégie, à distance d-1 de $V_{(4i+2)d}$ or $d > \frac{l}{2} \geq (d-1)$ d'où l'invariant i) est bien maintenu.

- si $2d \geq |l_t(i)|> 1$

  -si le voleur se déplace de +2 le policier se déplace de +1 (jusqu'en position $extr+_i$)

  en effet on a $\lfloor (l_t(i)+2)/2 \rfloor = \lfloor l_t(i)/2 \rfloor + 1$ et, si un déplacement de +1 devrait conduire le policier en $extr+_i$, alors $\lfloor l/2 \rfloor + 1 > d$ et $(l_t(i)+2) > 2d$ d'où le voleur quitte la zone à défendre du policier C_i et s'introduit dans celle du policier C_{i+1}, le policier C_i sera donc à sa place en $extr+_i$.

  -si le voleur se déplace de -2 le policier se déplace de -1 (jusqu'en position $extr-_i$)

  en effet on a $\lfloor (l_t(i)-2)/2 \rfloor = \lfloor l_t(i)/2 \rfloor - 1$ et, si un déplacement de -1 devrait conduire le policier en $extr-_i$, alors $\lfloor l/2 \rfloor - 1 < d$ et $(l_t(i)-2) < 2d$ d'où le voleur quitte la zone à défendre du policier C_i et s'introduit dans celle du policier C_{i-1} , le policier C_i sera donc à sa place en $extr-_i$.

  -si le voleur se déplace de +1 le policier se déplace de +1 si $l_t(i)$ est pair et négatif ou si $l_t(i)$ est impair et positif (jusqu'en position $extr+_i$)

  en effet, si $l_t(i)$ est pair et négatif, ($l_t(i)$=-2x, $l_t(i)+1$ = -2(x-1)+1) $\lfloor (l+1)/2 \rfloor = \lfloor l/2 \rfloor + 1$ de même, si $l_t(i)$ est impair et positif, ($l_t(i)$=2x+1,$l_t(i)+1$ = 2(x+1)) $\lfloor (l+1)/2 \rfloor = \lfloor l/2 \rfloor + 1$

  -si le voleur se déplace de -1 le policier se déplace de -1 si $l_t(i)$ est impair et négatif ou si $l_t(i)$ est pair et positif (jusqu'en position $extr-_i$)

  en effet, si $l_t(i)$ est impair et négatif, ($l_t(i)$=2*(-x) -1, $l_t(i)$-1 = 2*(-x-1)) $\lfloor (l-1)/2 \rfloor = \lfloor l/2 \rfloor - 1$ de même, si $l_t(i)$ est pair et positif, ($l_t(i)$=2x, $l_t(i)$-1 = 2(x-1) +1) $\lfloor (l-1)/2 \rfloor = \lfloor l/2 \rfloor - 1$

  -sinon il reste immobile et, tous les policiers restant immobiles de même que le voleur, l'invariant i) reste vérifié

- si $l_t(i)$=1 (resp -1) le policier reste immobile (ie en position $(4i+2)d$) sauf si le voleur se déplace de +2,+1 (resp -2,-1) auquel cas il se déplace de +1 (resp -1) cas $l_t(i)$=1 si le voleur se déplace de -1 ou -2 on a $l_t(i)$=0 ou $l_t(i)$=-1 et la valeur de $\lfloor \frac{l}{2} \rfloor$ reste de 0 si le voleur reste immobile, la valeur de $\lfloor \frac{l}{2} \rfloor$ reste de 0 si le voleur se déplace de +1 ou +2 on a $l_{t+1}(i)$=2 ou $l_{t+1}(i)$=3 et la valeur de $\lfloor \frac{l_t(i)}{2} \rfloor$ est augmentée de 1

  le cas $l_t(i)$=-1 est symétrique

- si $l_t(i) = 0$ le policier reste immobile sauf si le voleur se déplace de +2 (resp -2) auquel cas il se déplace de +1 (resp. -1).
  si le voleur se déplace de -1, 0 , 1 alors la valeur de $\lfloor \frac{l_t(i)}{2} \rfloor$ reste de 0 si le voleur se déplace de +2 ou -2 alors $l_{t+1}(i)$=2 ou $l_{t+1}(i)$=-2 la valeur de $\lfloor \frac{l_t(i)}{2} \rfloor$ est augmentée de 1 dans le sens de déplacement du voleur.

L'invariant peut donc être maintenu. Nous allons donc montrer qu'il peut également être atteint en un temps fini. Pour ce faire, les k policiers $C_1, C_2, ..., C_k$ peuvent choisir leurs positions de départs en $2d, 6d, ..., (4k-2)d$, le voleur décidant ensuite de sa position initiale. Chaque policier C_i doit alors atteindre une position guarantissant l'invariant, située entre $(4i+1)d$ et $(4i+3)d$. Après chaque mouvement de l'espion, la position souhaitée de C_i reste identique, ou bien se déplace vers un sommet voisin. Après d étapes,le policier C_i, en appliquant une stratégie naive (si il est à la position souhaitée, il ne bouge pas, sinon il se déplace vers la position désirée), peut atteindre la position guarantissant l'invariant. Tout les policiers peuvent donc atteindre l'invariant, puis le maintenir, ce dont nous déduisons la majoration : en effet à tout instant t on a d'après l'invariant l'existence d'un i tel que d$(pos(C_i), v_{(4i+2)d})$ =

$\lfloor \frac{d(pos(R), v_{(4i+2)d})}{2} \rfloor$ on a donc un voleur à distance $d - l_t(i)$ du policier C_i ($l_t(i)$ positif) donc le voleur n'est jamais à distance supérieure à d de l'ensemble des policiers après que ceux-ci aient mis en place l'invariant, ce qu'il font en un temps fini. □

3.2 Cas du Cycle

Nous étudions ici le cas où le graphe G est un cycle. Cette section est dédiée à la preuve du théorème suivant :

Théorème 2. *Pour tout cycle* Γ *de n sommets,* $\lfloor \frac{n}{6*k-4} \rfloor \leq d_k(\Gamma) \leq \lceil \frac{n+1}{6*k-4} \rceil$.

Nous commençeront par donner une borne inférieure pour $d_k(\Gamma)$ avant d'en donner une borne supérieure.

Lemme 3. *Soit* Γ *un cycle de longueur n, i.e. composé de n+1 sommets, alors pour tout k nombre de policier sur ce chemin,* $d_k(\Gamma) \geq \lfloor \frac{n}{6*k-4} \rfloor$.

Proof. Soit d = $\lfloor \frac{n}{6*k-4} \rfloor$

On nomme les sommets du cycle Γ : $\{V_0, V_1, ..., V_{n-1}, V_n = V_0\ \}$

Le voleur peut tenter d'utiliser la même stratégie que sur le chemin, c'est à dire que le voleur part d'un sommet, disons, v_0 et se déplace de deux arêtes dans un sens jusqu'à avoir atteint la distance voulue, puis il réitère l'opération.

Ici cependant, une fois que le voleur a mis une distance supérieure à $\lfloor \frac{n}{6*k} \rfloor$ entre lui et un policier, ce dernier peut le rattraper en allant dans la direction opposée, chose que le policier ne pouvait pas réaliser dans un chemin.

pour toute distance d, si le voleur peut parcourir une distance de $4k*d$ alors le voleur peut distancer tous les policiers qui ne font pas demi-tour (ie n'avancent que dans la même direction que le voleur), ceux-ci étant alors, comme pour le cas du chemin, situés entre V_0 et $V_{(4k-1)d-1}$

Les policiers qui ont changé de sens de déplacement peuvent se rapprocher du voleur en passant de V_0 à V_n, cependant parmis eux un policier (appelons le C_0) se trouve initialement à une distance au plus d du voleur i.e. le voleur est en V_0 et le policier est, au mieux, en V_d puis le voleur se déplace jusqu'au sommet V_{4d} et le policier se trouve en V_{3d} ; le policier est donc sur le point d'être distancé, le voleur vas ensuite vouloir parcourir une distance de $4*(k-1)*d$ dans une direction pour être hors de portée du reste des policiers. Hors, s'il se déplace dans l'autre direction, le policier C_0 peut se retrouver jusqu'en $V_{n+3d-(2(k-1)d)}$ dans le pire des cas (pour le voleur).

Les autres policiers qui ont changés ou non de direction étaient initialements en position supérieure à V_{4d} et donc ils sont finalement cantonné entre V_0 et $V_{(4k-1)d-1}$ ainsi qu'entre $V_{n+3d-(2(k-1)d)}$ et V_n.

On veux qu'une fois que le voleur est en V_{4kd} celui-ci soit aussi à distance supérieure ou égale à d du policier C_0.

d'où on si on a l'inégalitée : $4kd + d \leq n + 3d - (2(k-1)d)$ alors le voleur peut se retrouver à distance d infiniment de fois de chaque policier.

i.e. si $4kd + d - 3d + (2(k-1)d) \leq n$

ie $d(6k + 1 - 3 - 2) \leq n$

$d \leq \frac{n}{(6k-4)}$

Or, par définition de d, on a l'inégalité, donc le voleur peut se retrouver à distance supérieure ou égale à d de tous les policiers infiniment souvent. □

Lemme 4. *Soit* Γ *un cycle composé de n sommets, alors pour tout k nombre de policier sur ce chemin,* $d_k(\Gamma) \leq \lceil \frac{n}{6*k-4} \rceil$.

Proof. Soit le cycle : $\{V_0, V_1, ..., V_{n-1}, V_n = V_0\ \}$ Un déplacement d'un individu -voleur ou policier- de +a correspond à un passage du sommet v_x au sommet v_y où y= (x+ a) mod n

Stratégie :

- si le voleur se déplace vers un sommet adjacent dans une direction ou bien reste immobile, les policiers réalisent un même déplacement (ie ils se déplacent vers un sommet adjacent dans la même direction ou bien restent immobiles)

- si le voleur se déplace de +2 : - si le voleur s'est rapproché du policier le plus proche de lui, ce dernier se déplace de +1 et tout les autres policiers se déplacent de -1

  - si le voleur s'est éloigné du policier le plus proche de lui, ce dernier se déplace de +1 et tout les autres policiers se déplacent de -1

- si le voleur se déplace de -2 : - si le voleur s'est rapproché du policier le plus proche de lui, ce dernier se déplace de -1 et tout les autres policiers se déplacent de +1

  - si le voleur s'est éloigné du policier le plus proche de lui, ce dernier se déplace de -1 et tout les autres policiers se déplacent de +1

Invariant : soit d = $\lceil \frac{n}{6*k-4} \rceil$
si on considére v_0 le sommet correspondant à la position du voleur dans le cycle : $\{V_0, V_1, ..., V_{n-1}, V_n = V_0\}$
alors il existe l tel que :
- il y a un policier en v_{d-l} et il y a un policier en v_{-d-3l}
- il y a un policier en v_{7*d-3l} et il y a un policier en $v_{-7*d-3l}$
- le reste des policiers est en les points du type $v_{(6i)d+7*(sign(i))*d-3l}$ avec la valeur absolue de i entre 1 et $\lfloor (k-2)/2 \rfloor$. Où sign(i) est égal à 1 si i est positif, et -1 sinon.
(cas où le voleur est en train de se déplacer positivement au sens ou il se rapproche du policier en v_{d-l})
ou bien :
- il y a un policier en v_{d+3l} et il y a un policier en v_{-d+l}
- il y a un policier en v_{7*d+3l} et il y a un policier en $v_{-7*d+3l}$
- le reste des policiers est en les points du type $v_{(6i)d+7*(sign(i))*d+3l}$ avec la valeur absolue de i entre 1 et $\lfloor (k-2)/2 \rfloor$.
(cas où le voleur est en train de se déplacer négativement au sens ou il se rapproche du policier en v_{-d+l})

On s'interresse au maintient de l'invariant dans le cas d' égalité : d = $\frac{n}{6*k-4}$
(on ne traiteras que le cas où le voleur se déplace dans le sens positif, en effet, le cycle étant transitif, les deux cas sont symétriques)

- si le voleur se déplace vers un sommet adjacent dans une direction ou bien reste immobile, les policiers réalisent un même déplacement (ie ils se déplacent vers un sommet adjacent dans la même direction ou bien restent immobiles)

  les positions relatives des policiers par rapport au voleur n'ont alors pas changés et l'invariant reste vrai.

- si le voleur se déplace de +2 :

  - si le voleur s'est rapproché du policier le plus proche de lui, ce dernier se déplace de +1 et tout les autres policiers se déplacent de -1 (ie cas l positif)

  à l'instant t on a : il y a un policier en v_{d-l} il y a un policier en v_{-d-3l}

  il y a un policier en v_{7*d-3l} il y a un policier en $v_{-7*d-3l}$

  le reste des policiers est en les points du type $v_{(6i)d+7*(sign(i))*d-3l}$ avec la valeur absolue de i entre 1 et $\lfloor (k-2)/2 \rfloor$.

  à l'instant t+1 on a il y a un policier en v_{d-l+1} il y a un policier en $v_{-d-3l-1}$

  il y a un policier en $v_{7*d-3l-1}$ il y a un policier en $v_{-7*d-3l-1}$

  le reste des policiers est en les points du type $v_{(6i)d+7*(sign(i))*d-3l-1}$ avec la valeur absolue de i entre 1 et $\lfloor (k-2)/2 \rfloor$.

  et le voleur est en position v_2

  en effectuant le décalage nécessaire, i.e. en retirant 2 à toutes les positions, on obtient : voleur : v_0 il y a un policier en $v_{d-l+1-2} = v_{d-(l+1)}$ il y a un policier en $v_{-d-3l-1-2} = v_{-d-3(l+1)}$

il y a un policier en $v_{7*d-3l-1-2} = v_{7*d-3(l+1)}$ il y a un policier en $v_{-7*d-3l-1-2} = v_{-7*d-3(l+1)}$

le reste des policiers est en les points du type $v_{(6i)d+7*(sign(i))*d-3(l+1)}$ avec la valeur absolue de i entre 1 et $\lfloor (k-2)/2 \rfloor$.

- si le voleur s'est éloigné du policier le plus proche de lui, ce dernier se déplace de +1 et tout les autres policiers se déplacent de -1 (ie cas l négatif)

à l'instant t, on a par invariant : il y a un policier en v_{d+3l} il y a un policier en v_{-d+l}

il y a un policier en v_{7*d+3l} il y a un policier en $v_{-7*d+3l}$

le reste des policiers est en les points du type $v_{(6i)d+7*(sign(i))*d+3l}$ avec la valeur absolue de i entre 1 et $\lfloor (k-2)/2 \rfloor$.

en se déplaçant de +2, le voleur "fait marche arrière" les policiers vont en fait eux aussi faire "marche arrière" et se comporter comme s'ils reprenaient le coup joués avant t -en imaginant qu'avant t, le voleur avait effectué un mvt de -2 -

à l'instant t+1, on a par invariant : il y a un policier en v_{d+3l-1} il y a un policier en v_{-d+l+1}

il y a un policier en $v_{7*d+3l-1}$ il y a un policier en $v_{-7*d+3l-1}$

le reste des policiers est en les points du type $v_{(6i)d+7*(sign(i))*d+3l-1}$ avec la valeur absolue de i entre 1 et $\lfloor (k-2)/2 \rfloor$.

et le voleur est en v_2.

en effectuant un décalage similaire au cas précédent, on obtient :

il y a un policier en $v_{d+3l-1-2} = v_{d+3(l-1)}$ il y a un policier en $v_{-d+l+1-2} = v_{-d+(l-1)}$

il y a un policier en $v_{7*d+3l-1-2} = v_{7*d+3(l-1)}$ il y a un policier en $v_{-7*d+3l-1-2} = v_{-7*d+3(l-1)}$

le reste des policiers est en les points du type $v_{(6i)d+7*(sign(i))*d+3l-1-2} = v_{(6i)d+7*(sign(i))*d+3(l-1)}$ avec la valeur absolue de i entre 1 et $\lfloor (k-2)/2 \rfloor$.

et le voleur est en v_0.

- si le voleur se déplace de -2 : le cas est symétrique au cas où le déplacement est de +2

On a donc une preuve de l'invariant : il existe donc toujours un policier tel que la distance de celui-ci au voleur soit en valeur absolue de d-l, avec l positif, et donc inférieure à d. Donc d est bien un majorant. □

3.3 Cas des arbres

Nous étudions ici le cas où le graphe G est un abre enraciné.

Nous commenceront par donner une borne inférieure pour $d_k(G)$ avant d'en donner une borne supérieure.

On définit la hauteur h d'un arbre comme la distance maximale d'un sommet de cet arbre à la racine de l'arbre.

Definition 1. *Un arbre enraciné est dit l-aire si chacun de ses sommets possède au plus l fils. Un arbre l-aire est dit complet si chacun de ses sommets, exeptées ses feuilles, possède exactement l fils, toutes les feuilles doivent alors être à la meme hauteur.*

Lemme 5. *Pour tout arbre A l-aire complet de hauteur h,* $k_{d+1} \le (\sum_{i=0}^{\lceil \frac{h}{4d} \rceil -1} l^{(4i+2)*d})$

Proof. Tout d'abords, on considère un premier arbre l-aire complet A de hauteur h. On s'interesse à une stratégie sur l'arbre l-aire complet A' de hauteur $4d * \lceil \frac{h}{4d} \rceil$.

On considére une stratégie à $(\sum_{i=0}^{\lceil \frac{h}{4d} \rceil -1} l^{(4i+2)*d})$ policiers ;

On assigne un policier à chaque sommet de profondeur (4i+2)d pour i entre 0 et $\lceil \frac{h}{4d} \rceil - 1$. Un policier associé à un tel sommet est originellement positionné sur ce dernier.

La stratégie suivie par les policiers est ici semblable à celle utilisée dans le cas du chemin, où chaque policier associé à un sommet de profondeur (4i+2)d a pour objectif de maintenir les invariants vérifiés par la stratégie utilisée sur les chemins, et ce, sur le chemin qui vas de (4i+2)d à la position du voleur, dès que le voleur est suffisement proche du policier. Lorsque le voleur est dans certaines positions relatives au sommet associé à un policier, ledit policier n'aura pas à se déplacer, cependant certaines positions du voleur amènent ce même policier à agir, positions qui se distinguent en deux cas : le cas où le voleur est situé sur un sommet de profondeur p inférieure à $(4i+2)d$ et ancêtre du sommet associé au policier, cas où la position souhaitée du policier est l'ancêtre de profondeur $(4i+2)d - \lceil \frac{(4i+2)d-p}{2} \rceil$ du sommet associé au policier. Le policier est alors assuré, tant que le voleur reste dans ce cas, d'être à distance inférieure à d du voleur, et, également, si le voleur prends place sur le sommet associé au policier, ce dernier est également présent sur ledit sommet. Le second cas est celui où le voleur est situé sur un descendant, de profondeur inférieure à (4i+4)d, du sommet associé au policier. Dans ce cas la position souhaitée est la même que dans le cas du chemin, où le chemin considéré est le chemin qui vas de la racine jusqu'à la position du voleur.

On remarqueras que, si jamais le voleur réussi à ne se retrouver dans aucun des deux cas précédents, si après un certains temps il se retrouve de nouveau dans un des deux cas précédents, alors c'est en passant par le même endroit que celui par lequel il avait quitté le cas dans lequel il se trouvait, et donc, il se retrouve dans le même cas, et, de plus, le policier n'ayant pas bougé, ce dernier est en position souhaitée, ou peu s'y rendre en jouant son coup après que le voleur ait joué. La position souhaitée pour un policier qui n'a pas à agir est la position souhaitée pour le seul cas où le policier est actif par lequel le voleur est obligé de passer s'il veut retourner dans un cas où le policier est actif.

La stratégie est la suivante :

- S'il n'existe pas après coup, ni avant coup, de sous-arbre de hauteur 2d dont la racine est la position du voleur qui contienne le sommet associé au policier, ou bien si le sommet associé au policier n'est pas l'ancêtre du sommet où se trouve le voleur, alors le policier reste immobile.

  C'est en effet un cas où le policier n'a pas à agir, le voleur ne se trouvant dans aucun des deux cas d'actions décris.

- Cas 1 : Si il existe un sous-arbre de hauteur 2d -avant coup du voleur- dont la racine est la position du voleur qui contienne le sommet associé au policier, alors le policier descend vers son sommet associé si jamais le voleur effectue un déplacement de longueur 2 vers le sommet associé, ou si le voleur effectue un déplacement de longueur 1 vers le sommet associé, et que la profondeur après coup du voleur est impaire. Le policier effectue un déplacement vers le voleur si ce dernier effectue un déplacement de longueur 2 vers un sommet plus haut, ou si ce dernier effectue un déplacement de longueur 1 vers un sommet plus haut, et que la profondeur aprés coup du voleur est paire. De plus, si jamais le voleur effectue un déplacement de longueur 2 constitué d'un déplacement de longueur 1 susdécrit, puis d'un déplacement de longueur 1 le mettant dans un cas d'inacation du policier (S'il n'existe pas de sous-arbre de hauteur 2d dont la racine est la position du voleur qui contienne le sommet associé au policier, ou bien si le sommet associé au policier n'est pas l'ancêtre du sommet où se trouve le voleur) alors le policier agis comme si le voleur avait effectué le premier déplacement de longueur 1 seulement.

  Si il existe un sous-arbre de hauteur 2d dont la racine est la position du voleur qui contienne le sommet associé au policier, mais ce après déplacement du voleur, alors le policier se déplace vers la position souhaitée : Si le voleur se trouve exactement à l'endroit duquel il avait quitté le cas 1, le policier n'a alors pas à se déplacer car il est déjà en position souhaitée. Sinon, le voleur passe par l'endroit duquel il avait quitté le cas 1, qu'il atteint avec un déplacement de longueur au moins 1, puis il effectue au plus un second déplacement de longueur 1. Le policier agit alors comme si le voleur avait juste effectué le dernier déplacement.

- Cas 2 : Si, avant coup du voleur, le sommet associé à un policier est un ancêtre du sommet sur lequel se trouve le voleur, et que ces sommets ne sont pas distants de plus de 2d, alors le policier doit suivre le voleur, et ce à vitesse deux fois moindre. Si le voleur effectue un déplacement qui augmente sa profondeur de 2- ou bien seulement de 1, mais qui le place à une profondeur paire- le policier effectue un déplacement vers le voleur. Si le voleur effectue un déplacement qui diminue sa profondeur de 2, tout en le faisant rester dans ce cas - ou bien seulement de 1, mais qui le place à une profondeur impaire- le policier doit remonter vers son sommet associé. Si le coup du voleur ne modifie guère sa profondeur, le policier reste immobile.

Si le sommet associé à un policier est un ancêtre du sommet sur lequel se trouve le voleur, et que ces sommets ne sont pas distants de plus de 2d, et ce, après coup -et pas avant- du voleur, alors le policier doit se remettre à suivre le voleur, et ce à vitesse deux fois moindre. Si le voleur se trouve exactement à l'endroit duquel il avait quitté le cas 2, le policier n'a alors pas à se déplacer car il est déjà en position souhaitée. Sinon, le voleur passe par l'endroit duquel il avait quitté le cas 2, qu'il atteint avec un déplacement de longueur au moins 1, puis il effectue au plus un second déplacement de longueur 1. Le policier agit alors comme si le voleur avait juste effectué le dernier déplacement.

L'initialisation est similaire à celle utilisée pour le cas du chemin : chaque policier commence sur le sommet qui lui est associé, et, à chaque tour, se déplace vers la position souhaitée. Un policier ne peut s'éloigner de son sommet associé d'une distance supérieure à d, de même pour sa position souhaitée. Le policier peut alors rejoindre sa position souhaitée en un temps inférieur ou égal à d.

Le policier, une fois la position souhaitée atteinte, reste en position souhaitée par la suite. En effet dans le cas 1, la stratégie du policier lui permet de se rapprocher de son sommet associé à un rythme deux fois moindre que celui du voleur, or sa position souhaitée est telle que lorsqu'il commence à se déplaçer, la distance entre le sommet associé et le voleur est le double de celle entre le sommet associé et le policier, tout en étant inférieure à 2d. Par conséquent, tant que le voleur reste sur le chemin entre la racine et le sommet associé au policier, comme la stratégie du policier est l'équivalent de celle utilisée sur le chemin, le policier joue bien son role. Comme on l'a vu, si le voleur s'écarte du chemin, il ne peut y revenir que par le même sommet, et donc, lorsqu'il revient, le policier est bien positionné pour pouvoir être en position souhaitée. De même, quand le voleur a une profondeur plus grande que celle d'un policier, ce dernier appliquant une stratégie similaire à celle du chemin sur le chemin entre lui et le voleur, il reste en position souhaitée.

Les policiers peuvent donc se placer en position souhaitée, et y rester. De plus, peu importe la position du voleur, il existe i_0 entre 0 et $\lceil \frac{h}{4d} \rceil - 1$ tel que la profondeur du voleur est comprise entre $4i_0$d et ($4i_0$+4)d. Dans ce cas, le sommet sur lequel se trouve le voleur possède un ancêtre V_a de profondeur $4i_0$d. Tout les sommets de profondeurs ($4i_0$+2)d descendant de V_a ont un policier qui leur est associé. Si le voleur a une profondeur comprise entre $4i_0$d et ($4i_0$+2)d, alors il existe au moins un policier actif (cas 1), en position souhaitée, et donc tel que la distance de ce policier au voleur est inférieure à d. Si le voleur a une profondeur comprise entre ($4i_0$+2)d et ($4i_0$+4)d, alors il est dans le sous-arbre de hauteur 2d d'un des sommet de profondeur ($4i_0$+2)d, et le policier associé à se sommet, actif (cas 2), en position souhaitée, est alors à une distance inférieure à d du voleur.

Dans tout les cas, il existe donc bien un policier à distance inférieure à d du voleur. On a donc bien là une borne supérieure sur le nombre de policier nécessaire à ce qu'à partir d'un certain rang, il y en ait toujours un à distance inférieure à d du voleur.

Ainsi, avec $(\sum_{i=0}^{\lceil \frac{h}{4d} \rceil - 1} l^{(4i+2)*d})$ policiers, il est possible d'appliquer notre stratégie à A' pour que le voleur,à partir d'un certain rang, soit toujours à distance inférieure ou égale à d d'au moins un policier.

D'où ce nombre de policier suffit à empêcher le voleur d'atteindre une distance supérieure stricte à d (par exemple d+1) vis à vis de l'ensemble des policiers lorsque ceux-ci se déplacent sur A'. On a donc $k_{d+1}(A') \leq (\sum_{i=0}^{\lceil \frac{h}{4d} \rceil - 1} l^{(4i+2)*d})$

On peut appliquer cette même stratégie, restreinte, au sous-arbre de A' de même racine que A' et de hauteur h, qui est exactement A.

Ce nombre de policier permettant d'empêcher le voleur de distancer tous les policiers dans A', il permet également d'empêcher le voleur de distancer tous les policiers dans l'arbre A. D'où le résultat.

□

Lemme 6. *Pour toute distance d, pour tout arbre A l-aire complet de hauteur h supérieure à 2d+2,* $k_{d+1} \geq l^{h-2d-1}$.

Proof. On considère que le voleur commence son périple à la racine, et que à chaque étape t, ce dernier se déplace vers un sommet inférieur V(t) de manière à minimiser le nombre de policier sur les descendants de V(t).

À chaque étape, donc, le nombre de policier sur les descendants du sommet sur lequel se trouve le voleur est donc divisé par au moins l^2

Lorsque le voleur a atteint un sommet V de profondeur de h-2d-2, le nombre de policiers sur les descendants dudit sommet est donc inférieur à $\frac{k}{l^{h-2d-2}}$

Or supposons que $k < l^{h-2d-1}$

Le nombre de policiers sur les descendants du sommet V est donc inférieur strict à l. Or l'arbre étant l-aire complet, cela signifie qu'il existe un sous-arbre fils du sommet V ne comportant aucun policier.

Il est possible qu'un policier soit présent sur le sommet du voleur. Même dans ce cas, le voleur peut parcourir la distance 2d + 2 avant d'atteindre une feuille de l'arbre -noeud de profondeur h.

L'hypotétique policier, lui, ne pourra donc parcourir qu'une distance de d+1, ce qui le place à une profondeur de $h-d-1$ Les policiers qui étaient dans les autres sous-arbres du sommet V ne peuvent faire mieux, et ceux qui étaient dans le reste de l'arbre non plus, car ils doivent aller en V avant de pouvoir descendre dans le sous-arbre dans lequel se trouve le voleur. Le voleur qui a atteint une profondeur de $h-d-1+(d+1)=h$ est donc à distance supérieure stricte à d de tous les policiers.

Il est donc nécessaire pour pouvoir guarrantir que la distance du voleur à l'ensemble des policier n'atteint pas d+1, en devenant supérieure à d, d'avoir au minimum l^{h-2d-1} policiers. □

3.4 Cas de la Grille

Nous étudions ici le cas où le graphe G est une Grille.

Le résultat principal de cette section est la borne inférieure suivante :

Théorème 3. *Pour toute $n \times n$ grille G_n, $d_k(G_n) = \Omega(n * log(n))$.*

Proof. Nous détaillerons ici l'idée de la preuve qui à conduit à ce résultat. Nous nous interessons à une stratégie particulière du voleur, à savoir un trajet horizontal jusqu'à un sommet de la grille puis vertical jusqu'au bord haut de la grille. On construit un graphe G' en bijection avec G, avec pour bijection σ de G dans G', pour tout sommet v dans G, on note v' = σ(v) sommet appartenant à G'. On construit G' de sorte à ce qu'il existe une arête entre deux sommets v1' et v2' de G' si et seulement si, lorsque le voleur pars du sommet v0 de G correspondant au sommet de même abscisse que v1, mais d'ordonnée nulle, dans la grille, si un policier C_0 est apte à se trouver à distance inférieure à d du voleur si jamais ce dernier se déplaçais rapidement (ie en utilisant un plus court chemin) vers v1, alors ce même policier C_0 ne peut pas être à distance inférieure à d du voleur si celui-ci emprunte un plus court chemin de v0 vers v2. l'idée est que v1' et v2' sont reliés entre eux si jamais un policier seul peut nécessairement être distancé par le voleur partant de v0, ou bien si le voleur se rends en v1, ou bien s'il se rends en v2. Il est donc nécessaire qu'un premier policier, qui ne soit pas distancé par le voleur se rendant en v1 depuis v0, soit présent, ainsi qu'un second policier, qui ne soit pas distancé par le voleur se rendant en v2 depuis v0 - car le premier policier est distancé par le voleur si ce dernier se rends en v2 depuis v0 en passant par un plus court chemin.

Après avoir définit ce graphe G', on y recherche une clique K de taille maximale. Le nombre de sommet de cette clique est alors un minorant du nombre de policier nécessaire. En effet si ce nombre n'est pas atteint, alors le voleur dispose d'une stratégie gagnante:

Le voleur démarre au coin inférieur gauche de la grille, au sommet v_0. Si jamais il s'apperçoit que quel que soit le sommet v_i au dessus de lui, tel que v_i' est dans K, v_i est tel qu'il existe un policier pouvant être à distance d de v_i si le voleur emprunte un plus court chemin en direction de v_i, le voleur continue son déplacement latéral. Sinon il emprunte un plus court chemin vers un v_i tel qu'il n'existe pas de policier pouvant être à distance d de v_i à temps, et, lors de son arrivée en v_i, est alors à distance supérieure à d de tous les policiers.

Cette stratégie est bien gagnante pour le voleur. En effet, par définition de G', lorsque le voleur se trouve en dessous d'un sommet v_i tel que v_i' est dans K, s'il existe un policier C_0 pouvant être à distance d de v_i si le voleur emprunte un plus court chemin en direction de v_i, alors ce dernier ne peut pas être à distance inférieure à d d'un autre sommet correspondant à un sommet de K si jamais le voleur décide de s'y rendre par un plus court chemin. En effet comme on l'a vu, ce premier policier C_0 est nécessairement distancé si le voleur se rends en un sommet v_j tel que v_j' et v_i' sont liés par une arête, c'est la condition nécessaire à la présence d'une telle arête. Lorsque le voleur continue son déplacement latéral, c'est que les sommet qui étaient situés au dessus de lui, dont l'image par σ est dans K, étaient tous tels qu'un policier pouvait être à distance d de ces sommets si le voleur s'y rendait. Un policier différent pour chacun des sommets car, leurs homologues dans G' étant reliés entre eux, un policier n'étant pas distancé si le voleur se rends en l'un d'eux est forcément distancé si le voleur se rends sur un autre desdits sommets. De même, ces policiers sont également distincts des potentiels policiers aptes à se trouve à distance inférieure à d des autres sommets dont l'image par σ forme K, et ce pour les mêmes raisons. Il est donc nécessaire pour que le voleur ne bifurque jamais (ne cesse jamais son déplacement latéral) qu'au moins un policier soit associé à chacun des sommets de K. Or si le nombre de policier est trop faible, le voleur se trouveras dans une situation où il existe un sommet au dessus de lui dont l'image par σ est tel qu'aucun policier ne peut être à distance d de ce sommet si le voleur s'y rends. Le voleur, appliquant la stratégie, s'y rends donc, et distance tous les policiers.

Il est donc nécessaire pour pouvoir guarrantir que la distance du voleur à l'ensemble des policier n'excède pas d d'avoir au minimum |K | policiers.

Pour l'instant, les valeurs de taille de clique maximale de G_n' qu'on ait pu trouver, pour G_n grille n x n, sont de l'ordre de $nlog(n)$.

On a donc bien la minoration. □

Lemme 7. *Pour toute $n \times n$ grille G_n, $d_k(G_n) = O(n^2)$.*

-

4 Complexité

Théorème 4. *Le calcul de $d_k(G)$ pour un graphe G et un nombre de policier k donnés en entrée, lorsque le voleur se déplace à vitesse s =3, est NP-Difficile.*

5 Perspectives générales

Le problème considéré ici demeure ouvert sur de nombreux points. Nous avons ainsi l'ordre de grandeur de $d_k(G)$ pour les cas simples, et nous avons même des bornes inférieures et supérieures, dans les cas des cycles et chemins, telles que la valeur exacte est connue parfois à 1 près. Cependant, comme on l'a vu, les bornes sur la valeur de $d_k(G)$ dans le cas où G est une grille ne permettent pas encore d'en connaître l'ordre de grandeur. De plus, il existe bien des types de graphes pour lesquels nous n'avons pas encore de bornes, ne serait-ce que les graphes non planaires.

La question de la complexitée elle aussi reste ouverte. Quelle est la complexitée du problème dans le cas où le voleur avance à vitesse 2? quelle est-elle dans le cas où la vitesse du voleur est un paramètre donné en entrée (obtient-on un problème EXPTIME-difficile, par exemple)?

6 Remerciements

Je voudrais maintenant remercier Nicolas Nisse, Stéphanes Pérennes ainsi que Nathann Cohen, qui m'ont encadré pendant ce stage, m'ont fournis maints conseils et m'ont apporté leur aide dans la conception ainsi que l'écriture des résultats ainsi que leurs preuves - je voudrais remercier, enfin, tous ceux qui ont participés de près ou de loin à ce stage.