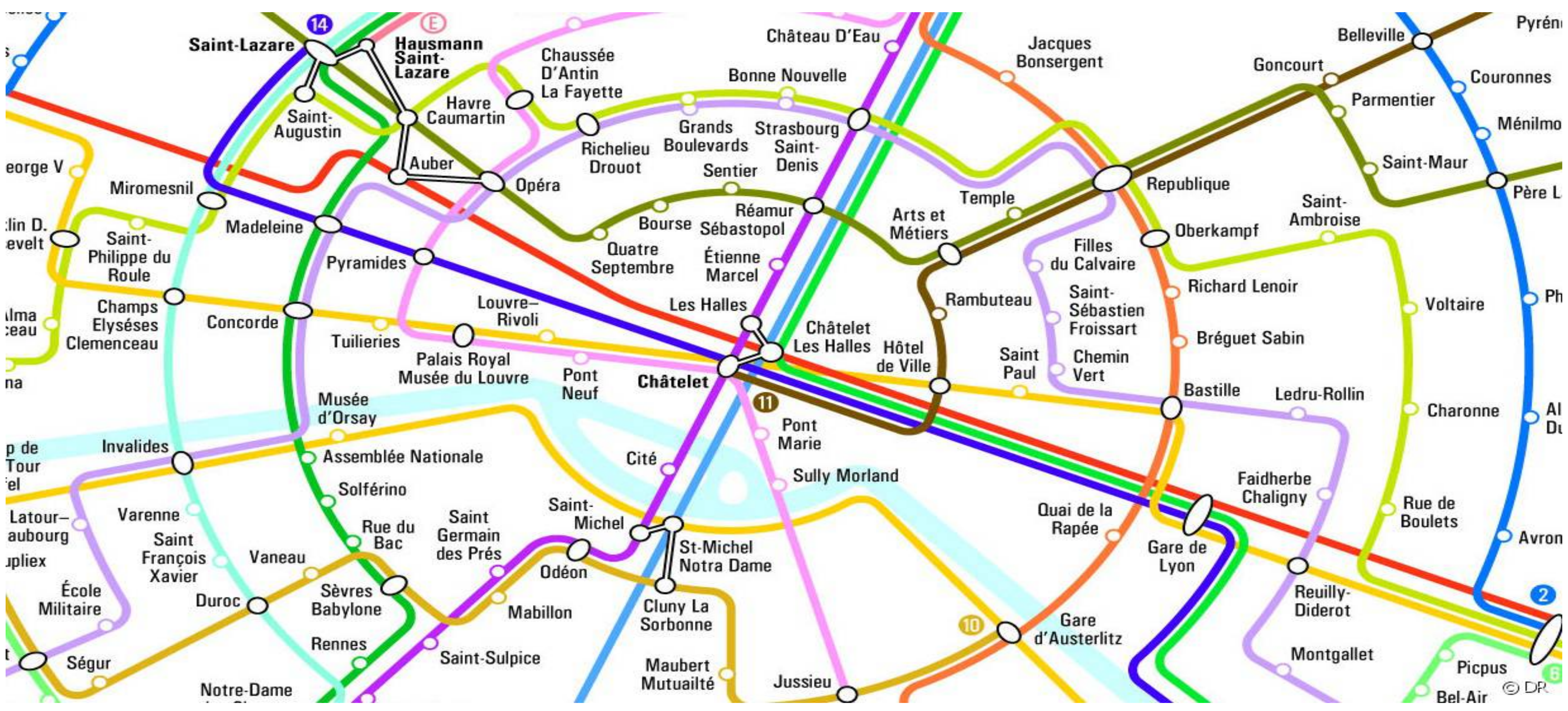
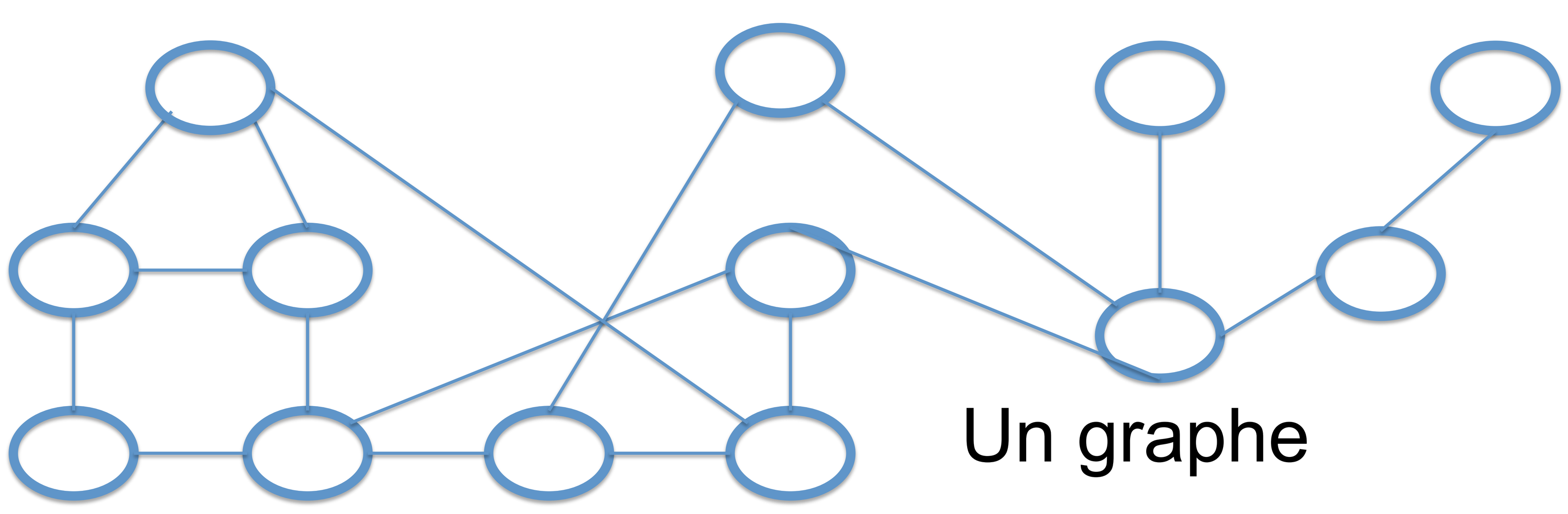
JEUX dans les GRAPHES

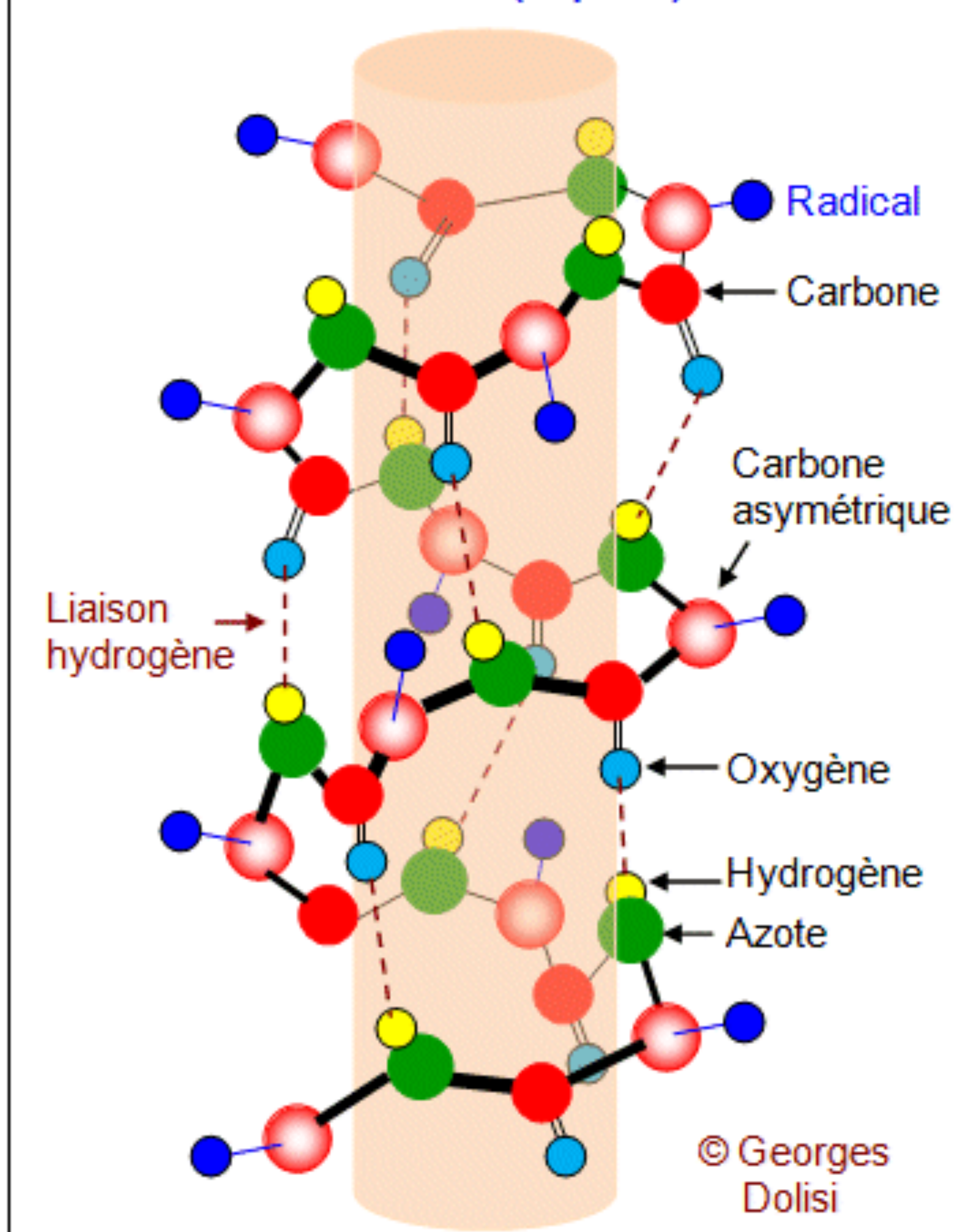


Graphe du métro parisien



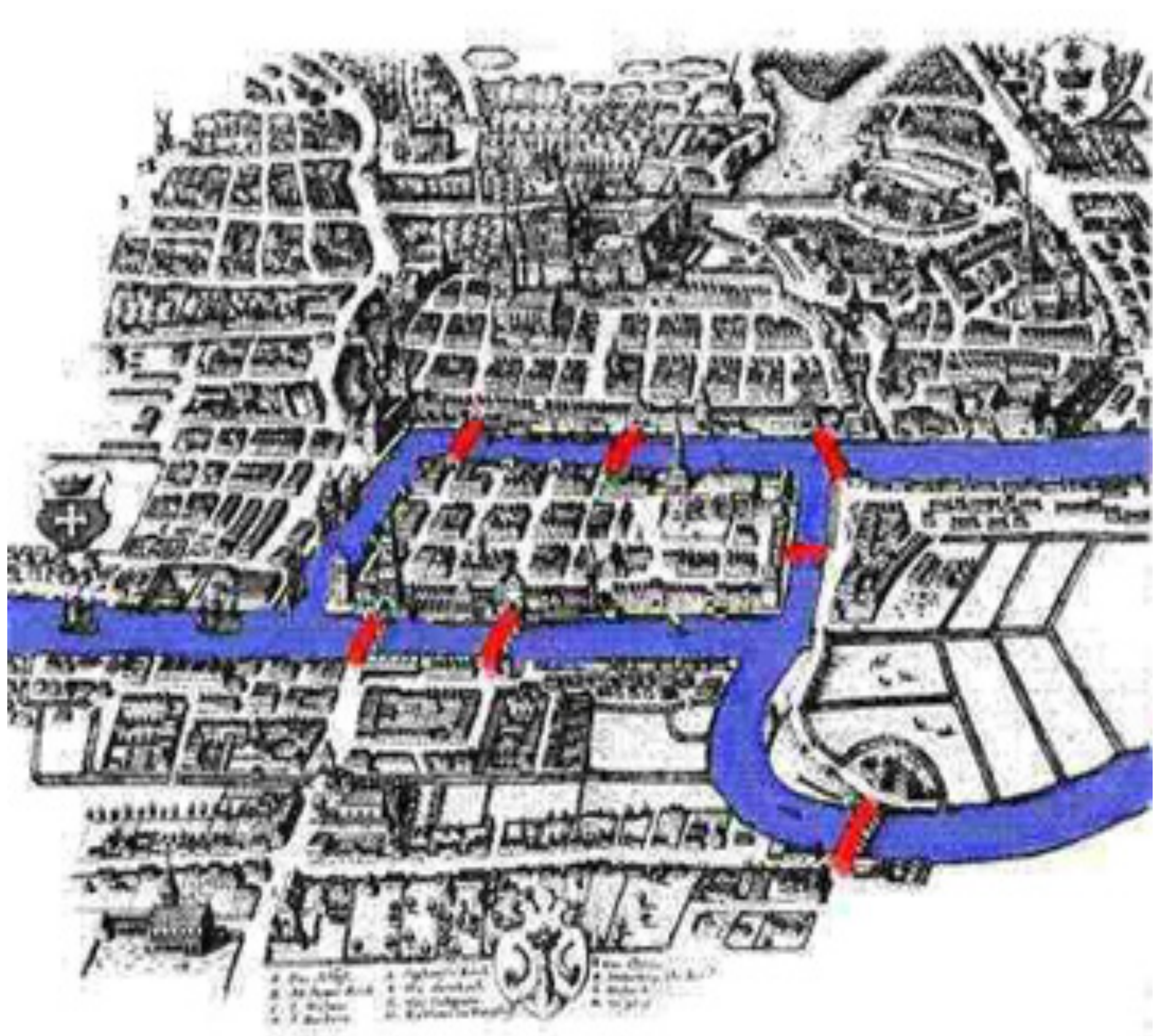
Un graphe

Hélice α (alpha)

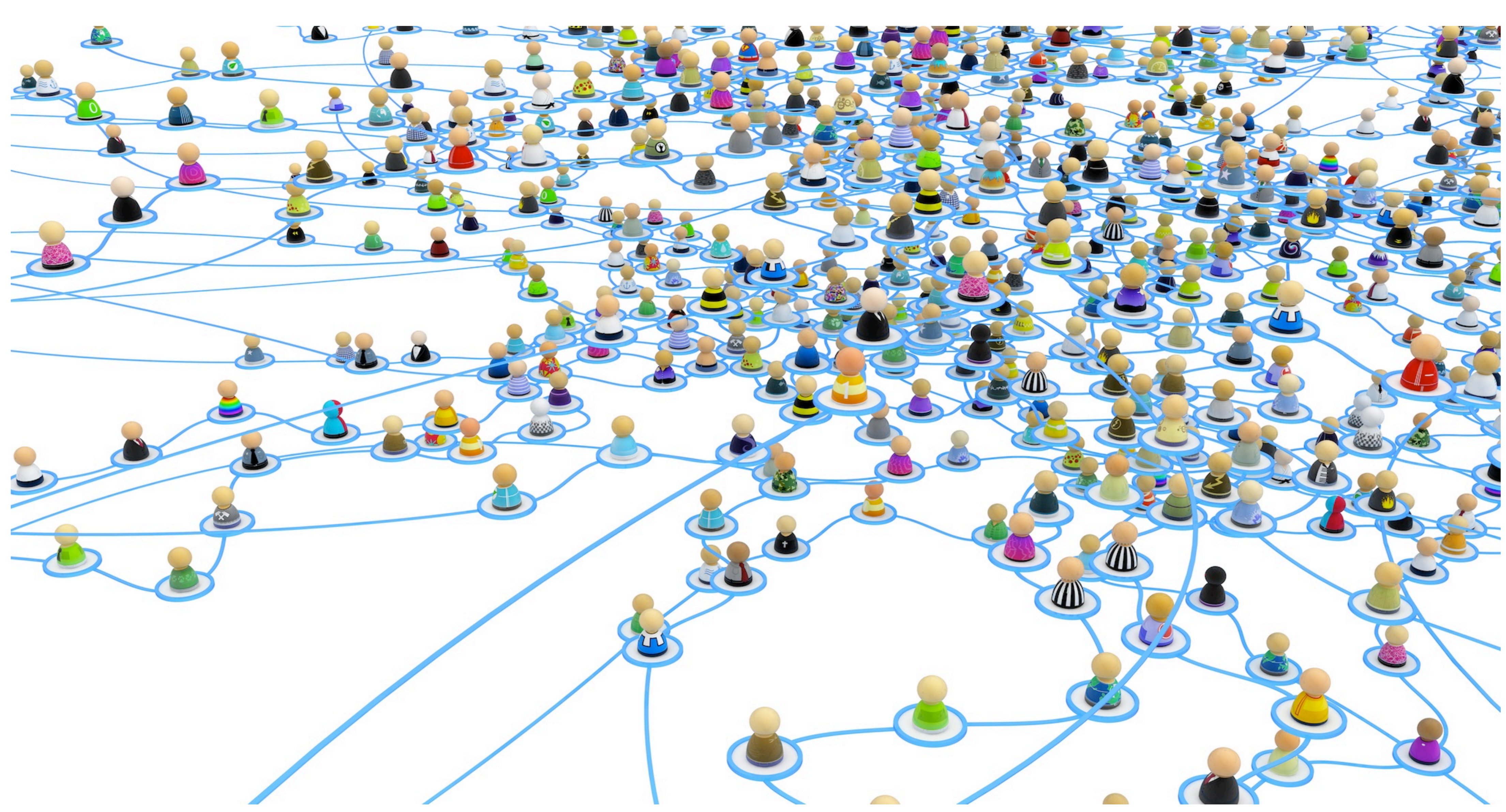


Protéine : structure secondaire

et APPLICATIONS



Les ponts de Königsberg (Russie)



http://wam.wikia.com/

Représentation d'un réseau social sous forme de graphe

i3s sophia antipolis | cnrs | Inria INVENTEURS DU MONDE NUMÉRIQUE | Université Nice Sophia Antipolis | UNIVERSITÉ CÔTE D'AZUR | Institut Esope 21 Maison des sciences

Qu'est ce qu'un GRAPHE ?

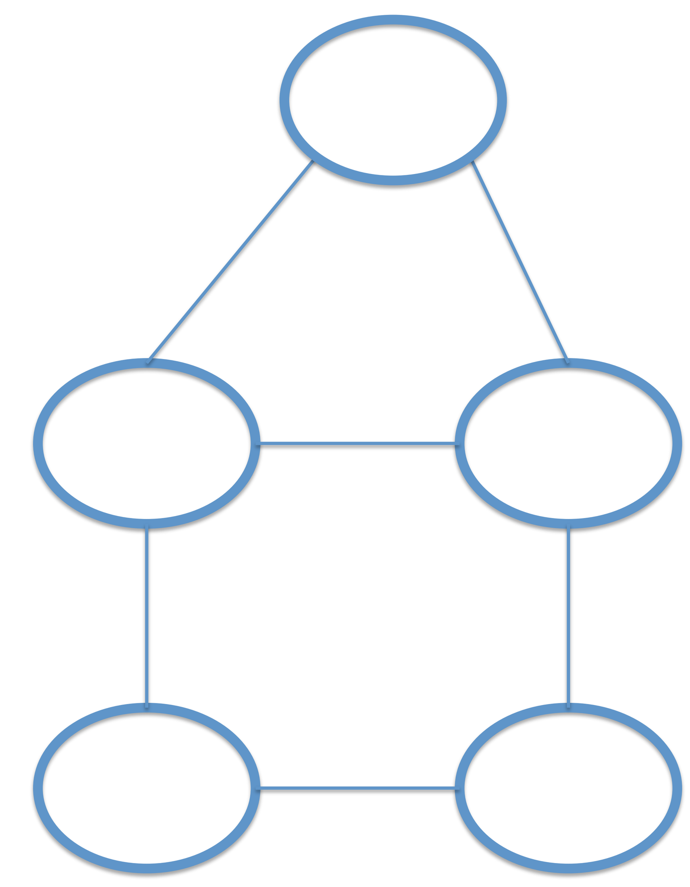
graphe : objet mathématique décrivant les **relations/interactions** entre les **éléments** d'un **ensemble**. Un graphe est composé de **sommets** reliés par des **arêtes** (les liens entre sommets). Les graphes permettent l'étude de nombreux **réseaux** : géographiques (**routiers**), sociaux (**Facebook**), biologiques (**molécules**), informatiques (**Internet**)…

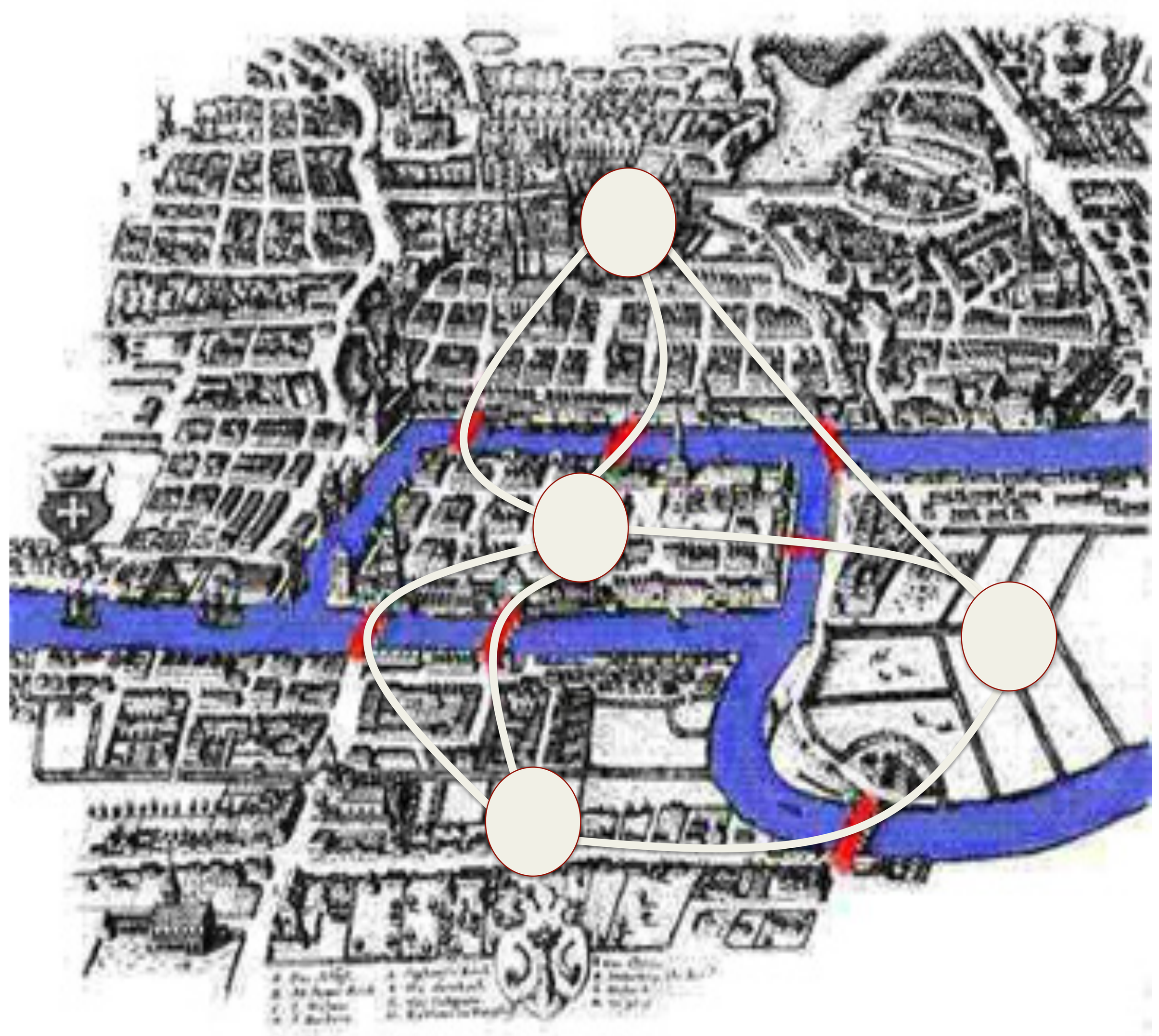
sommets : représentés par des **ronds** modélisant les **éléments** dont on étudie les relations.

Exemples : **villes** (réseaux routiers), **personnes** (réseaux sociaux), **atomes** (molécules), **routeurs** de l'Internet…

arêtes : représentées par des **traits** modélisant les **relations** entre les sommets. Deux sommets en relation sont liés par une arête et sont dits **adjacents** ou **voisins**.

Exemples : **routes** (entre 2 villes), **liens d'amitié** (entre 2 personnes), **liens chimiques** (entre 2 atomes), **fibres optiques** (entre 2 routeurs)…





Les ponts de Königsberg (Russie)

Histoire : Les graphes ont été initialement étudiés par le mathématicien **Leonhard Euler** (1707-1783) en **1735** pour répondre à la question suivante :
Peut on se promener dans la ville de **Königsberg** en passant **exactement une fois** par chacun des 7 **ponts** et revenir à son point de départ?

Théorème **[Euler 1735]** : Etant donné un graphe connexe, on peut se « promener » en visitant chaque arête exactement une fois et revenir à son point de départ si et seulement si chaque sommet est lié par un nombre **pair** d'arêtes.

Quelle est la réponse à la question d'Euler ?

1er jeu **(Cycle Eulérien)** : étant donné un graphe, trouver une « promenade » qui passe exactement une fois par chaque **arête**.

Application : **Problème de la tournée du facteur** : un facteur doit passer dans chaque rue pour y distribuer le courrier mais veut éviter, autant que possible, de passer 2 fois par la même rue.

2e jeu **(Cycle Hamiltonien)** : étant donné un graphe, trouver une « promenade » qui passe exactement une fois par chaque **sommet**.

Application : **Problème du voyageur de commerce (VRP)** : un VRP doit passer dans chaque ville pour y démarcher mais veut éviter, autant que possible, de passer 2 fois par la même ville.

Note : Le 2nd jeu est BEAUCOUP plus difficile que le 1er

I3S sophia antipolis · CNRS · Inria INVENTEURS DU MONDE NUMÉRIQUE · Université Nice Sophia Antipolis · UNIVERSITÉ CÔTE D'AZUR · Institut Esope 21 Maison des sciences

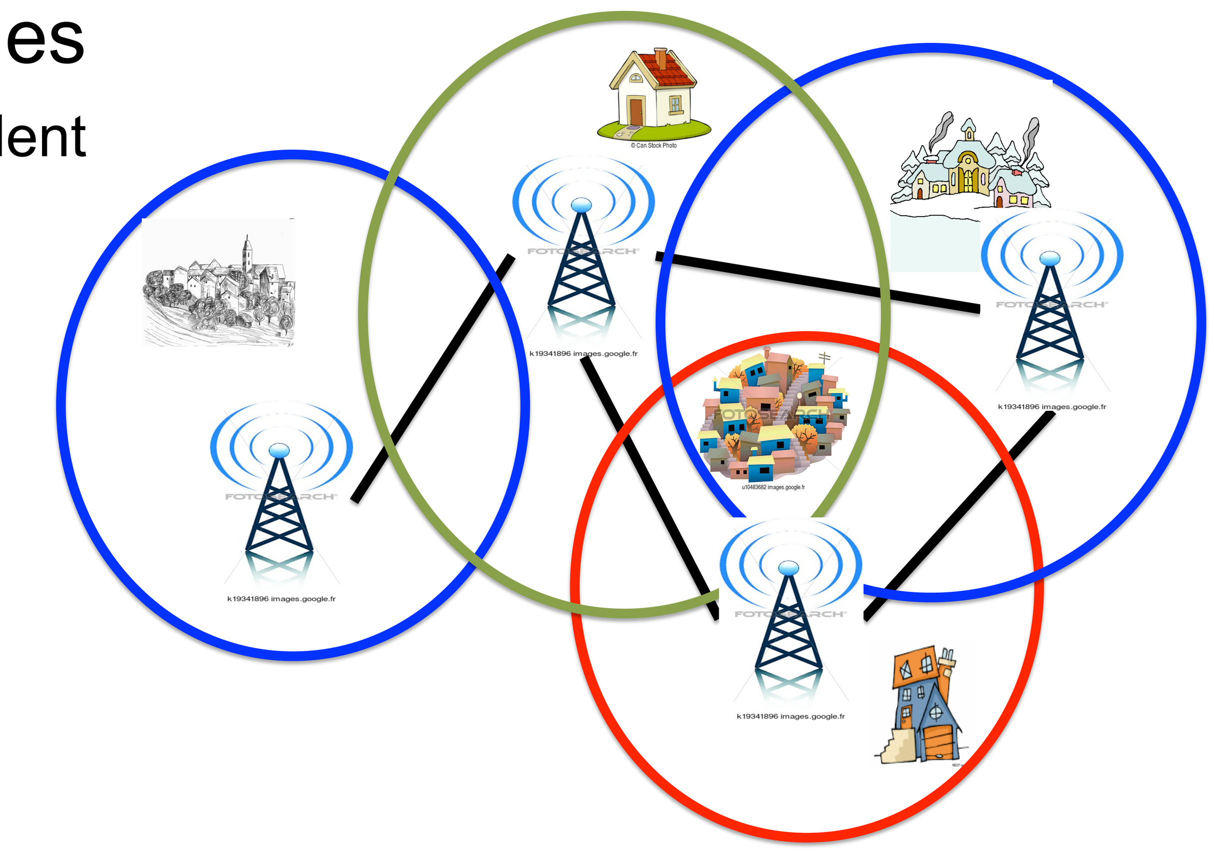
Graphes : APPLICATIONS

Affectation de fréquences dans les réseaux de téléphonie mobile

Deux antennes voisines utilisant la même fréquence vont créer des interférences (si deux personnes parlent en même temps, on ne comprend rien)

Il faut donc affecter des fréquences différentes à des antennes voisines

Tout en minimisant le nombre total de fréquences (une bande de fréquences coûte cher)



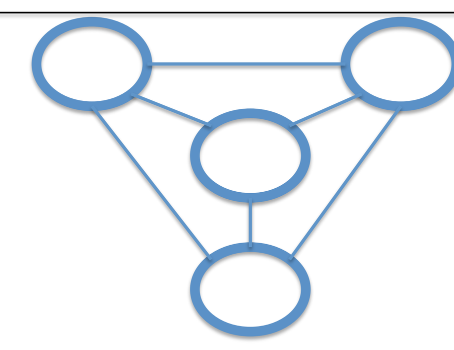
Modélisation avec des graphes :

- Sommet = antenne
- Couleur = fréquence

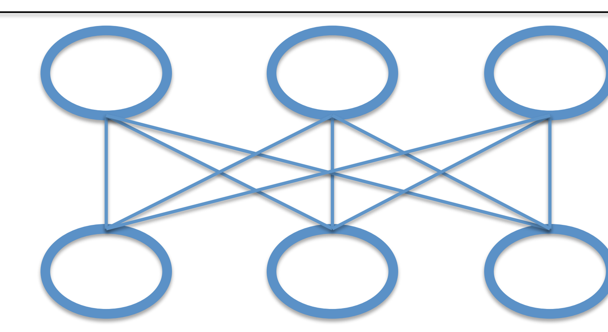
Coloration propre :
Donner une couleur à chaque sommet tel que 2 sommets adjacents reçoivent des couleurs différentes.

But : minimiser le nombre de couleurs utilisées

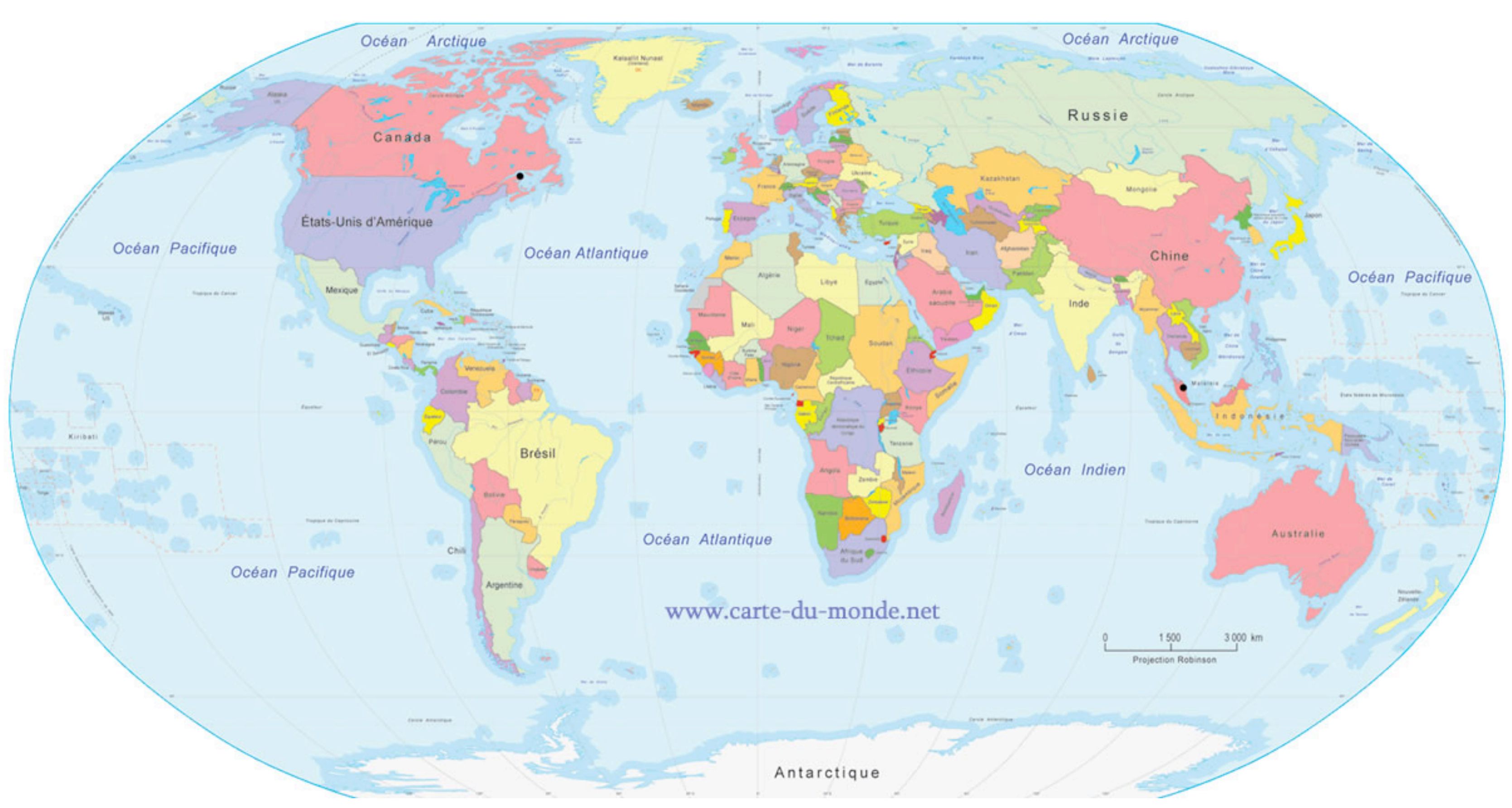
graphe planaire : graphe que l'on peut dessiner (dans le plan) sans croisement d'arêtes.
Exemple : planisphère (pays = sommets ; 2 pays sont adjacents si leurs frontières se touchent).



graphe **planaire**



graphe **non planaire** (essayez de le dessiner sans croisements...)



Histoire : En 1852, Francis Guthrie demande si tout graphe planaire admet une coloration propre avec seulement 4 couleurs. Il faut attendre 1976 pour que Kenneth Appel et Wolfgang Haken répondent à cette question (en utilisant la puissance de calcul d'ordinateurs).

Théorème des 4 couleurs : Tout graphe planaire a une coloration propre avec 4 couleurs.

3e jeu (Coloration) : colorer une carte du monde (une couleur par pays) tel que deux pays voisins reçoivent toujours des couleurs différentes. Saurez vous n'utiliser que 4 couleurs ?

Comprendre les réseaux sociaux : « le monde est petit »

Histoire : En 1963, Milgram réalise l'expérience suivante : des américains doivent transmettre des lettres. Ils ne connaissent que le nom, le métier, l'état… du destinataire.
La **règle** est qu'on ne peut transmettre la lettre que "de la main à la main".

Résultats : ≈20% des lettres sont arrivées. En moyenne, les lettres victorieuses sont arrivées en 6 étapes.

En 2000, Jon Kleinberg propose un modèle des réseaux sociaux à l'aide de graphes qui explique pourquoi les distances sont petites (logarithmiques).

4e jeu : Quelle est la distance entre votre page Facebook et celle de Justin Bieber ? de Michelle Bachelet (présidente du Chili) ? de Antoine Griezmann ? …

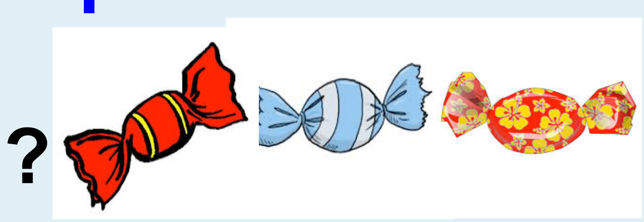
i3S sophia antipolis · CNRS · Inria INVENTEURS DU MONDE NUMÉRIQUE · Université Nice Sophia Antipolis · UNIVERSITÉ CÔTE D'AZUR · Institut Esope 21 Maison des sciences

Jeu à 2 joueurs dans les graphes :

SURVEILLANCE

5me jeu : Un avion a, par erreur, déversé son chargement de bonbons dans une forêt (modélisée par un graphe). Un **enfant** veut sortir de sa maison pour manger un bonbon. Ses **parents** veulent l'en empêcher et doivent trouver les bonbons avant lui.

A quel point les parents doivent ils être rapides pour gagner ?

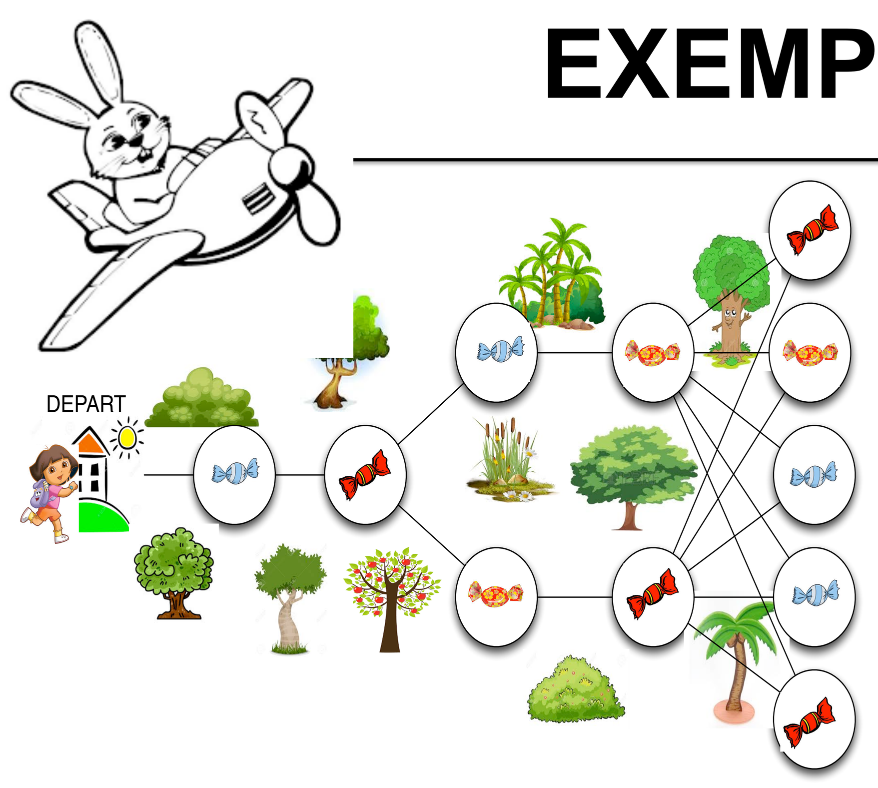


Règles du jeu :

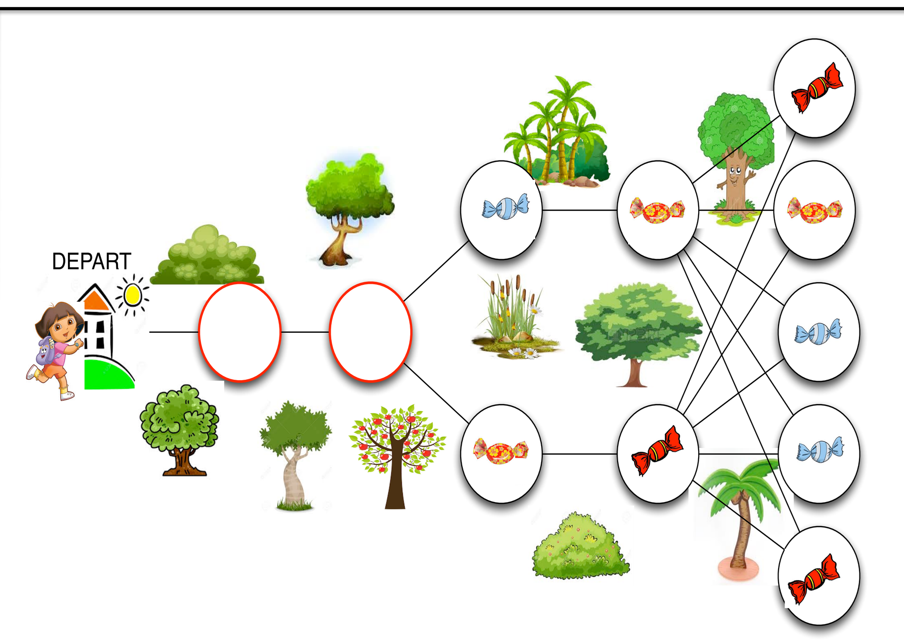
1) Choisir la **vitesse X** des Parents (X = 1 ou 2 ou 3 ou 4…)
2) L'**Enfant** commence dans la **maison** (notée DEPART)
3) **Tour-à-tour** :
   - Les Parents prennent **X bonbons** (n'importe où)
   - L'Enfant **se déplace** le long d'une arête

Fin du jeu : **Les Parents gagnent s'ils arrivent à ramasser tous les bonbons avant que l'Enfant n'en prenne un. L'Enfant gagne s'il arrive à manger un bonbon.**

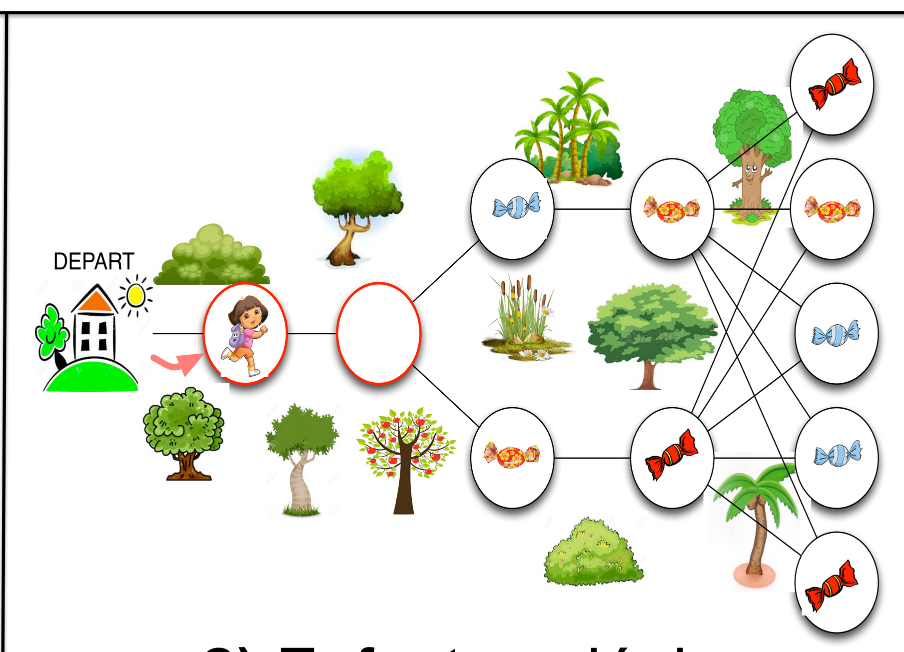
EXEMPLE de DEROULEMENT du JEU (avec vitesse X=2)



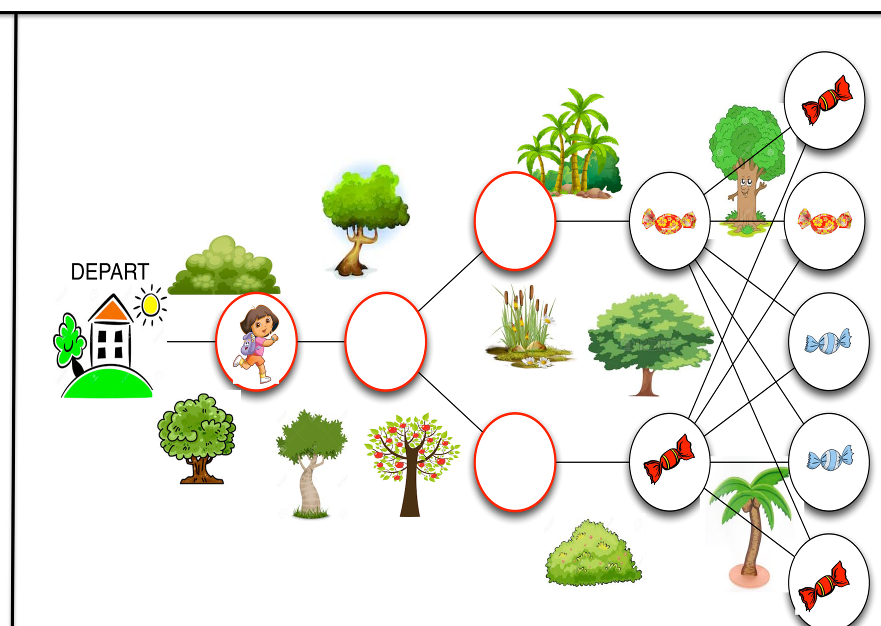
0) L'enfant part de la maison



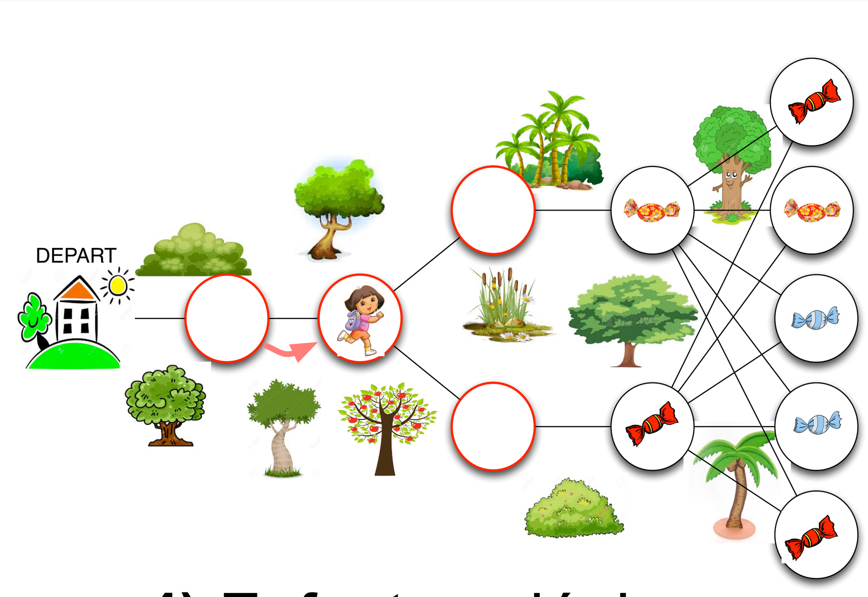
1) Parents enlèvent 2 bonbons



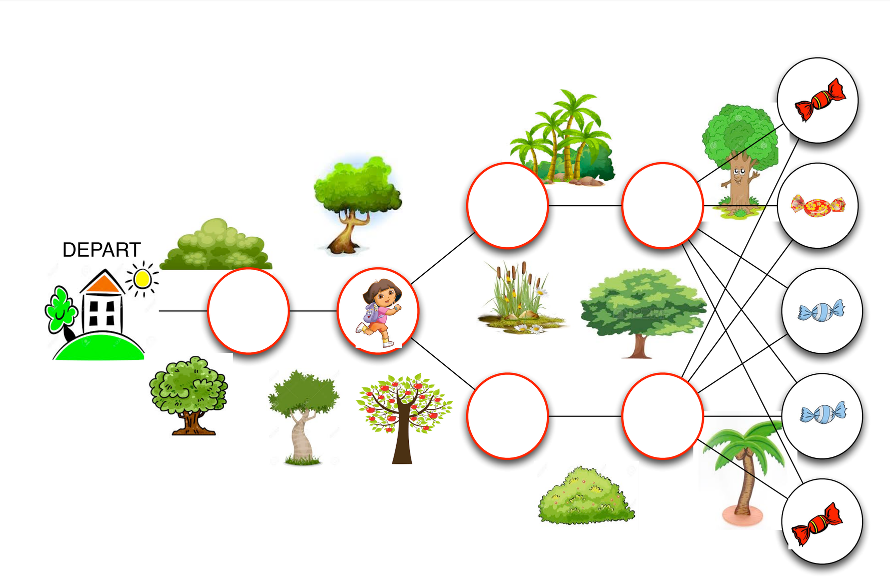
2) Enfant se déplace



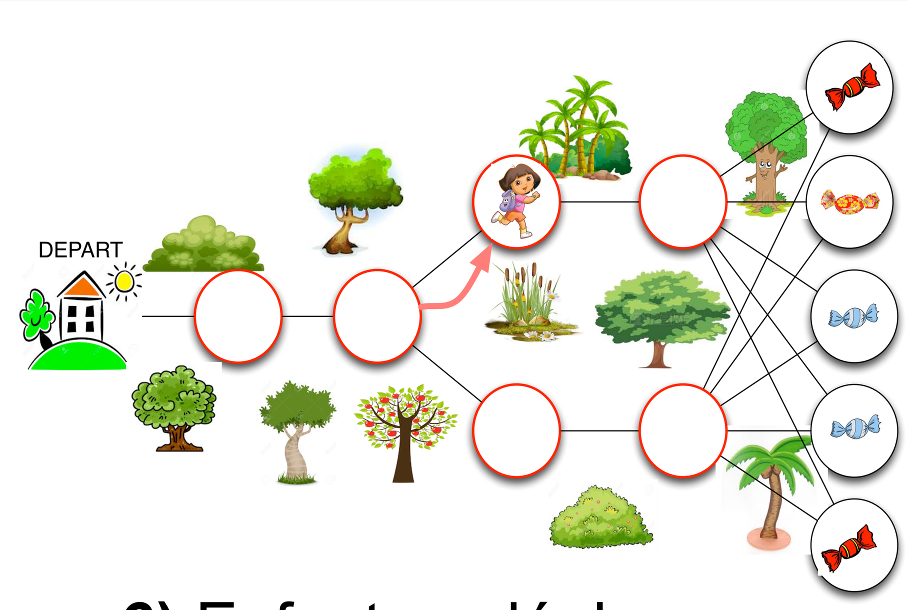
3) Parents enlèvent 2 bonbons



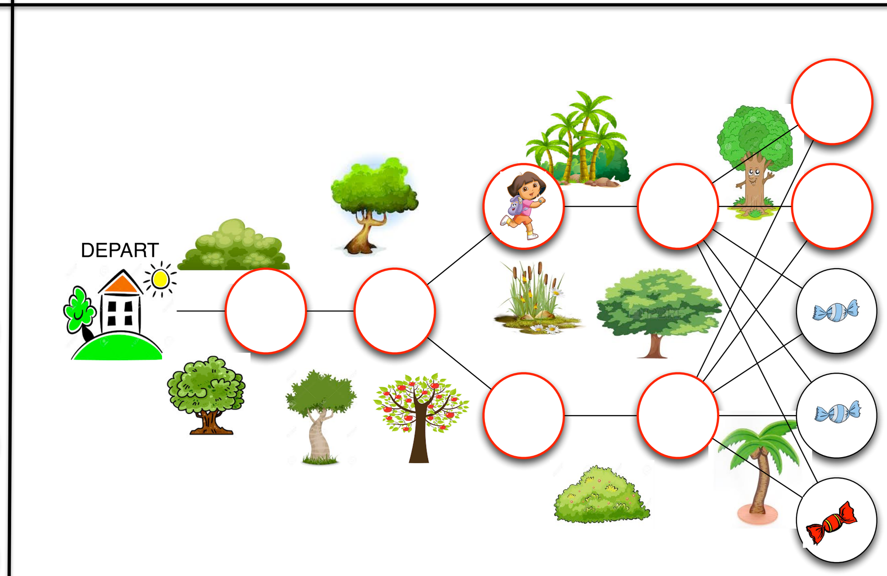
4) Enfant se déplace



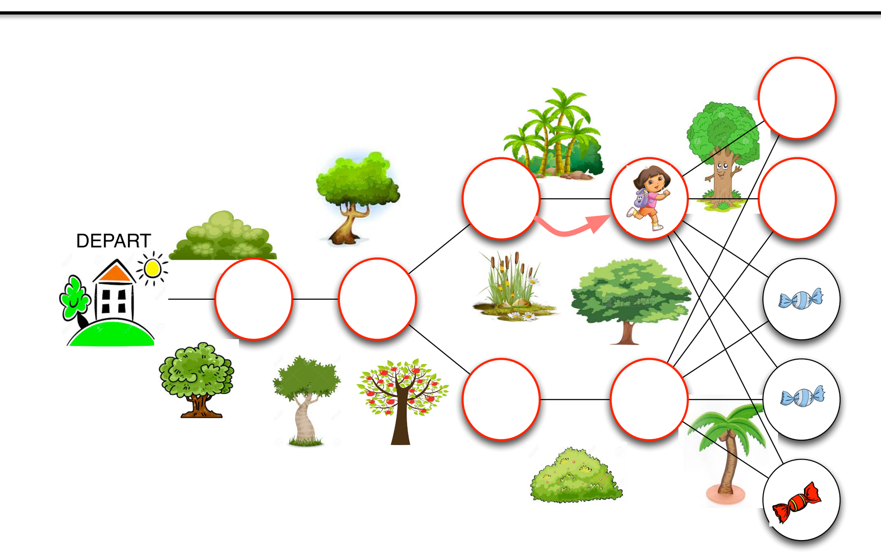
5) Parents enlèvent 2 bonbons



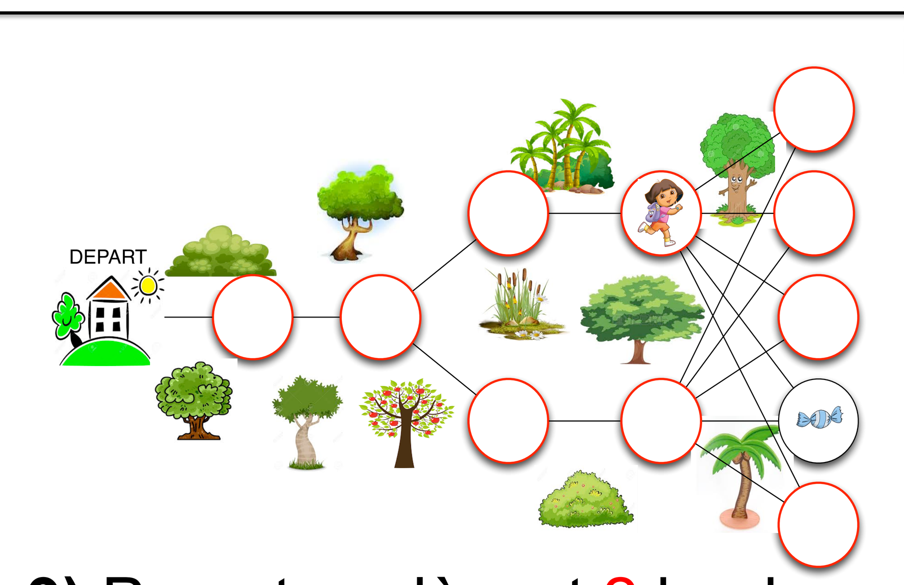
6) Enfant se déplace



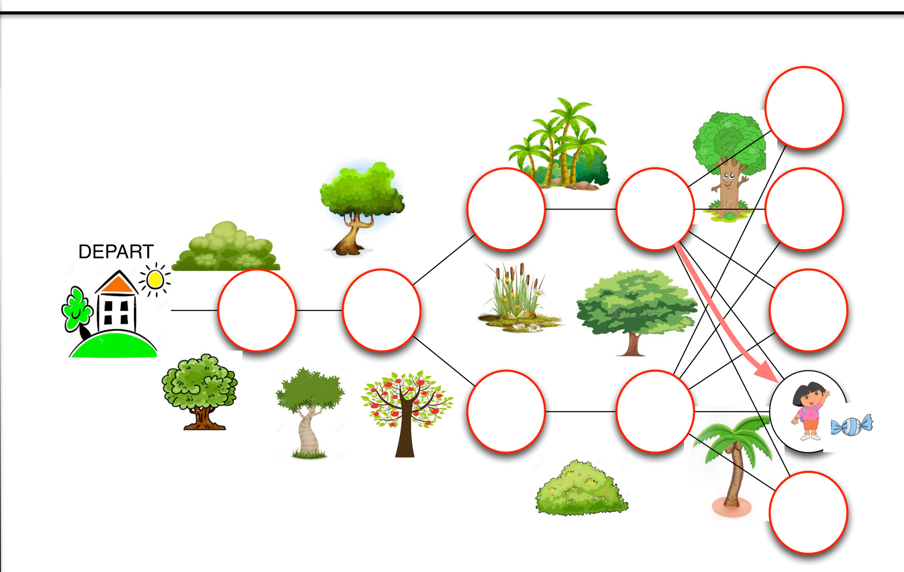
7) Parents enlèvent 2 bonbons



8) Enfant se déplace



9) Parents enlèvent 2 bonbons



10) Enfant GAGNE !!

Parents, saurez-vous gagner avec vitesse 2 ?

Application : Les programmes informatiques ont souvent besoin de données obtenues au préalable. Un moyen d'accélérer les calculs est d'anticiper ces besoins et de « pré-calculer » des données grace à des programmes auxiliaires. Afin d'économiser les capacités de calcul, il n'est pas possible de pré-calculer trop de données (on ne peut enlever qu'un nombre limité de bonbons). De plus, les données qui seront effectivement nécessaires ne sont pas connues à l'avance (la trajectoire de l'Enfant est indéterminée). **Exemples** : Jeux vidéo, pré-téléchargement de pages web (youtube), …

i3S sophia antipolis · CNRS · Inria INVENTEURS DU MONDE NUMÉRIQUE · Université Nice Sophia Antipolis · UNIVERSITÉ CÔTE D'AZUR · Institut Esope 21 Maison des sciences

Jeu à 2 joueurs dans les graphes : Gendarmes et voleur

6e jeu : Qui n'a jamais joué à ce jeu étant petit ? Une équipe de « gendarmes »  essaie d'attraper un « voleur »  qui se déplace dans un graphe.

Combien de gendarmes sont-ils nécessaires pour gagner ?

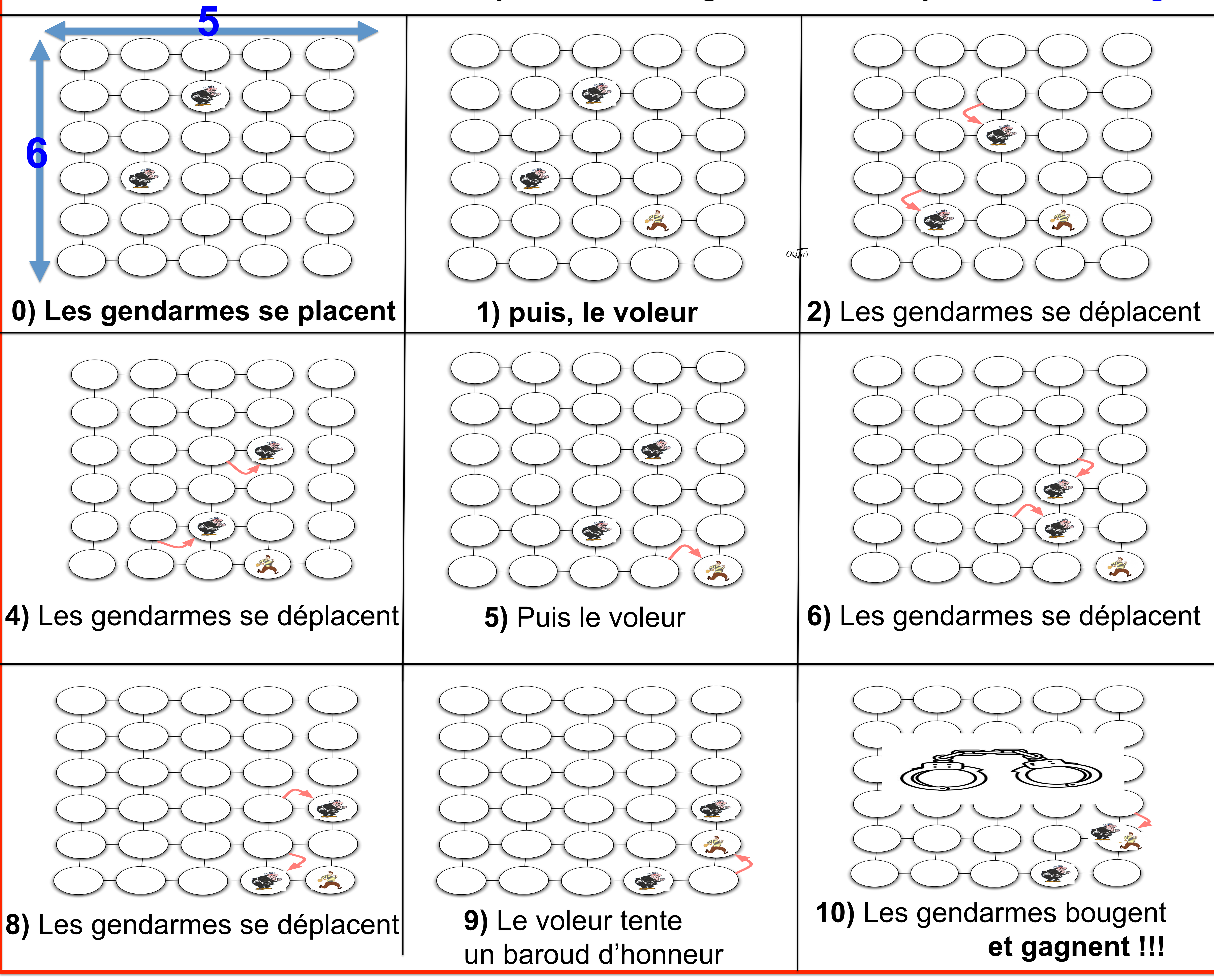
Règles du jeu :

1) Choisir le **nombre X** de gendarmes (X = 1 ou 2 ou 3 ou 4…)
2) Chacun des X gendarmes choisit un sommet et s'y place (possiblement plusieurs gendarmes par sommets)
3) Le voleur se place sur un sommet
4) **Tour-à-tour** :
   - Chaque Gendarme peut se déplacer le long d'une arête (ou rester immobile).
   - Le Voleur peut se déplacer le long d'une arête.

Jeu défini en 1983 par Peter Winkler, Richard Nowakowski, Alain Quilliot

Fin du jeu : **Les Gendarmes gagnent s'ils attrapent le Voleur (si un Gendarme arrive sur le même sommet que le Voleur). Le Voleur gagne sinon.**

EXEMPLE de JEU (avec X=2 gendarmes) dans une grille 5x6



0) Les gendarmes se placent

1) puis, le voleur

2) Les gendarmes se déplacent

3) Puis le voleur

4) Les gendarmes se déplacent

5) Puis le voleur

6) Les gendarmes se déplacent

7) Le voleur passe son tour pour rester libre

8) Les gendarmes se déplacent

9) Le voleur tente un baroud d'honneur

10) Les gendarmes bougent **et gagnent !!!**

Saurez-vous gagner avec 2 gendarmes dans une grille 13x9 ?

Dans n'importe quelle grille ?

Histoire : En 1985, Henri Meyniel demande si $O(\sqrt{n})$ gendarmes gagnent toujours dans un graphe connexe avec n sommets ?? **La question est toujours sans réponse ☹**, cependant :

Théorème [Aigner, Fromme 1984] : 3 gendarmes peuvent toujours gagner dans un graphe planaire connexe (quel que soit le nombre de sommets).

Applications : Jeux vidéos, robotique, drones, IA, et résultats fondamentaux en théorie des graphes.

I3S sophia antipolis · CNRS · Inria INVENTEURS DU MONDE NUMÉRIQUE · Université Nice Sophia Antipolis · UNIVERSITÉ CÔTE D'AZUR · Institut Espace 21 Maison des sciences