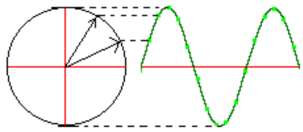
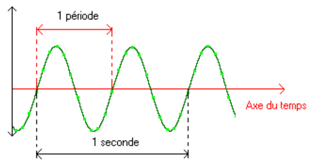
Les fonctions périodiques et les séries de Fourier

On fait tourner un point autour d'un cercle de rayon A avec une vitesse angulaire constante ω, puis on trace la hauteur du point en fonction du temps (diagramme de Fresnel).



Quelle est la fonction $f(t)$ obtenue ?



Sur le dessin ci-dessus, le phénomène observé est périodique : il se répète dans le temps. Si nous mesurons le temps nécessaire au déroulement complet d'un cycle nous obtenons la *période* de notre signal . Cette période sera mesurée en secondes. Une fonction est périodique de période T si pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f(t+T) = f(t).$$

Quelle est la période de $\sin t$, $\sin 2t$, $\sin 3t$, $\sin \omega t$?

Un temps de 1 seconde est représenté sur le dessin ci-dessus. Il est facile de compter combien de cycles complets (tour du cercle) se sont déroulés durant cet intervalle de temps. (Dans notre exemple : 2) Le nombre de cycles par unité de temps s'appelle la *fréquence*, elle est notée f se mesure en Hertz (Hz). Quelle est la fréquence des fonctions $\sin t$, $\sin 2t$, $\sin 3t$, $\sin \omega t$? Quelle est la relation entre fréquence et période ?

Exemple 1. Tracez la fonction périodique de période 2π définie par

$$f(x) = x, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Cette fonction s'appelle "fonction en dents de scie". Tracez les fonctions suivantes :

$$s_1(x) = 2\sin x, \quad s_2(x) = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2}\right), \quad s_3(x) = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3}\right).$$

Q'observez-vous ?

Exemple 2. Tracez la fonction périodique de période 2π définie par

$$f(x) = \begin{cases} -\pi/2 & x \in [-\pi, 0] \\ \pi/2 & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

Cette fonction s'appelle "fonction créneau" ou "fonction carrée". Tracez les fonctions suivantes :

$$s_1(x) = 2\sin x, \quad s_2(x) = 2\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3}\right), \quad s_3(x) = 2\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5}\right).$$

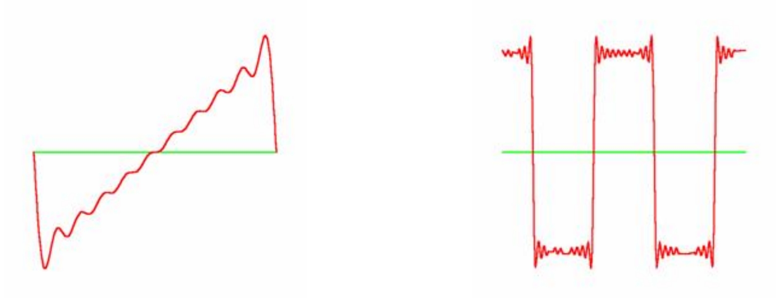
Q'observez-vous ?

Fourier (1768 - 1830) nous a appris que l'on pouvait créer des formes d'ondes très complexes en ajoutant seulement entres elles des courbes sinus et cosinus. La fonction

$$s_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{k=n} a_n \cos nx + \sum_{k=1}^{k=n} b_n \sin nx,$$

est appelée polynôme trigonométrique. Montrez que cette fonction est périodique de période 2π. La fonction $h_n(x) = a_n \sin nx + b_n \sin nx$ est appelée harmonique d'ordre n. Quelle est sa période ?

Si $f(x)$ est une fonction fonction périodique, on peut calculer les coefficients a_n et b_n de façon à ce que s_n ressemble de plus en plus à f lorsque n augmente. Les a_n et b_n sont appelés les coefficients de Fourier de f. Sur ces dessins on a tracé s_n avec $n = 10$ pour la fonction scie et $n = 26$ pour la fonction créneau.



Fourier est à l'origine d'une branche des mathématiques appelée "analyse de Fourier". L'analyse de Fourier fait toujours l'objet d'études mathématiques et a beaucoup d'impact sur les technologies modernes : traitement du signal, traitement de l'image ...

Les filtres de Butterworth

Un filtre est un système physique qui agit sur les entrées sinusoidales de la façon suivante :

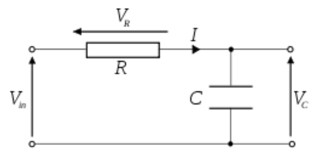
$$\sigma : \sin(\omega t) \mapsto A(\omega)\sin(\omega t + \Phi).$$

La sortie du filtre a la même pulsation que l'entrée mais une amplitude et une phase différentes.

Le spectre d'énergie d'un filtre est la fonction définie par :

$$f(\omega) = A(\omega)^2.$$

Pour le filtre RC, $\Sigma : V_{in} \mapsto V_c$



on peut montrer que

$$f(\omega) = \frac{1}{1 + (\frac{\omega}{\omega_c})^2}, \quad \omega_c = 1/RC.$$

Tracez cette fonction pour $\omega_c = 1$. Expliquez pourquoi ce filtre s'appelle un filtre passe-bas.

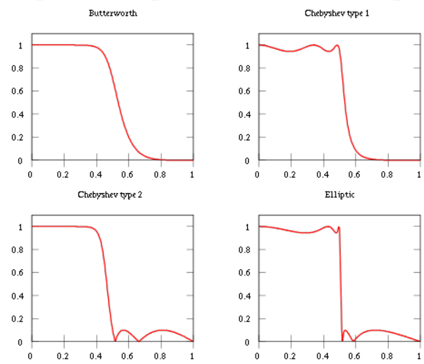
Pour quelle valeur de ω a-t-on $f(\omega) = 1/2$?
La pulsation ω_c s'appelle pulsation de coupure. Pour $\omega = \omega_c$, l'amplitude tombe à $1/\sqrt{2}$, soit à environ 71 pour cent de l'amplitude du signal d'entrée.

Un filtre de Butterworth est un filtre dont le spectre d'energie est de la forme

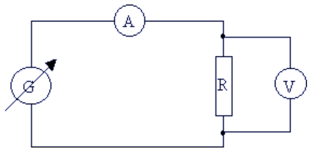
$$f(\omega) = \frac{1}{1 + (\frac{\omega}{\omega_c})^{2n}},$$

où n est un entier naturel positif.
Étudiez les variations de cette fonction et donnez l'allure de sa courbe.
Calculez le coefficient directeur de la tangente au point $\omega = \omega_c$.
Sachant que l'on souhaite restituer au mieux les pulsations ω telle que $|\omega| < |\omega_c|$ et atténuer le plus possible les pulsations ω telles que $|\omega| > |\omega_c|$, comment choisir n ?
Ces filtres sont réalisables par des circuits électriques.

Quelques exemples de filtres électriques :



Un problème d'identification : mesurer une résistance



On se propose de mesurer la valeur d'une résistance en utilisant la loi d'Ohm

$$U = RI.$$

En utilisant un ampèremètre pour mesurer l'intensité I et un voltmètre pour mesurer la tension U aux bornes de la résistance, on obtient le tableau de mesures suivant :

U(Volt)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
I(Ampère)	0,039	0,079	0,118	0,160	0,198	0,238	0,277	0,316	0,355
R=U/I ?									

Calculez la valeur de R obtenue pour chaque mesure. Qu'en pensez-vous ?

On propose trois formules pour calculer R. Soit N, le nombre de mesures (dans notre cas, $N = 9$).

$$R_1 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{k=N} U_k/I_k \quad (1)$$

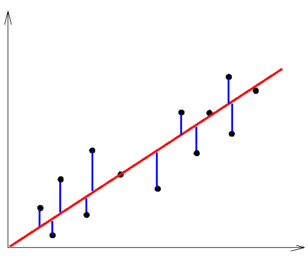
$$R_2 = \frac{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{k=N} U_k}{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{k=N} I_k} \quad (2)$$

$$R_3 = \frac{\sum_{k=1}^{k=N} U_k I_k}{\sum_{k=1}^{k=N} I_k^2} \quad (3)$$

Vérifiez que, lorsque les mesures sont extactes, chacune de ces formules permet d'obtenir la valeur exacte R de la résistance. Interprétez les deux premières formules.

Calculez R_1, R_2 et R_3 à partir des valeurs données dans le tableau.

La methode dite des "moindres carrés" consiste à troiver la droite de cofficients directeur x qui minimise la somme des carrées des longueurs $S(x) = \sum_{k=1}^{k=N}(U_k - xI_k)^2$.



Ecrire $S(x)$ sous la forme d'un polynome du second degré : $S(x) = ax^2 + bx + c$. Pour quelle valeur de x ce polynôme atteint-il son minimum ?

Filtres de Butterworth : $f(w_c) = 1/2$, $f'(w) = -2n\frac{(w/w_c)^{2n-1}}{(1+(w/w_c)^{2n})^2}$. La fonction f est décroissante pour $w > 0$. $f'(w_c) = -n/2$. Il faut choisir n le plus grand possible.

Identification d'une résistance :

U/I	1	2	3	4	5	6	7	8	9	5
I	0.039	0.079	0.118	0.16	0.198	0.238	0.277	0.316	0.355	0.197777778
U/I	25.64	25.32	25.42	25.00	25.25	25.21	25.27	25.32	25.35	25.30923844
UI	0.04	0.16	0.35	0.64	0.99	1.43	1.94	2.53	3.20	1.252333333
I^2	0.00	0.01	0.01	0.03	0.04	0.06	0.08	0.10	0.13	0.049527111
R1	25.30923844									
R2	25.28089888									
R3	25.28581428									